Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi
Supliment la tomul XXVII, s. I a, 1981

EXISTENCE ET ARBITRARIETE DES CONNEXIONS COMPATIBLES A DES STRUCTURES RIEMANN GENERALISEES DU TYPE PRESQUE 1-HORSYMPLECTIQUES METRIQUES

PAR

RADU MIRON et GHEORGHE ATANASIU

Dédié à la mémoire du Professeur Mendel Haimovici

§.0. **Introduction.** Dans un article [9], nous avons récemment établi par des méthodes géométriques, la solution du problème d'Eisenhart [2] au cas des structures Riemann généralisées du type presque hermitien.

La note présente porte sur un cas plus général, celui où la 2-forme associée à la structure Riemann généralisée g est dégénérée. Notamment, nous y avançons la solution du problème d' Eisenhart, la connexion canonique et la forme générale des connexions linéaires compatibles à g, au cas des structures du type presque 1-horsymplectique métrique.

Le premier paragraphe contient la définition de la structure Riemann généralisée g d'indice 1, la structure presque cosymplectique associée et les opérateurs Obata déterminés par g. Au §.2 on introduit la structure Riemann généralisée du type presque 1-horsymplectique métrique et on différencie les cas éliptique et hyperbolique. Deux exemples viennent prouver l'existence de telles structures. On §.3 on démontre qu'il existe des connexions linéaires compatibles à g si et seulement si les cas éliptique et hyperbolique ont lieu. Alors, l'existence de la solution au problème d'Eisenhart est prouvée en construisant les connexions (3.3) et (3.5) pour chaque cas séparément. Finalement, au §.4 on détermine les connexions pour la structure g et la forme générale de la solution (4.1).

Les auteurs envisagent de présenter la solution du problème d'Eisenhart pour les structures Riemann généralisées du type presque k horsymplectique métrique, dans une note à venir.

§.1. **Structures Riemann généralisées d indice 1.** Soit M une variété C^∞-différentiable, de dimension impaire, $2n+1$, et $g \in \tau(M)$ une structure Riemann généralisée. Le champ de tenseurs g a la décomposition. :

$$g_{ij} = g_{\underline{ij}} + g_{\underset{\vee}{ij}}, \quad g_{\underline{ij}} = g_{\underline{ji}}, \quad g_{\underset{\vee}{ij}} = -g_{\underset{\vee}{ji}}, \tag{1.1}$$

$$\det \| g_{\underline{ij}} \| \neq 0. \tag{1.2}$$

Definition 1. *On dét que la structure Riemann généralisée donnée par $g \in \tau^0_2(M)$ est d'indice 1, si*

$$\operatorname{rang} \| g_{\underset{\vee}{ij}} \| = \dim M - 1 = 2n. \tag{1.3}$$

Dans les circonstances de la définition 1, il existe sur M un champ de vecterurs $\xi^i \in \tau_0^1(M)$, uniquement déterminé à l'orientation près, par les conditions :

$$g_{\underset{\vee}{ij}}\xi^j = 0, \quad g_{\underline{ij}}\xi^i\xi^j = 1. \tag{1.4}$$

Le champ de vecteurs $\xi \in \tau_0^1(M)$, déterminé par (1.4) conduit à l'existence sur M d'un champ de covecteurs $\eta_i \in \tau_1^0(M)$ donné par

$$\eta_j = \xi^i g_{\underline{ij}}. \tag{1.5}$$

On peut considérer les champs de formes

$$\underset{\vee}{g} = \frac{1}{2} g_{\underset{\vee}{ij}} dx^i \wedge dx^j, \quad \eta = \eta_i dx^i, \tag{1.6}$$

et on a le

Théorème 1. *Si g est une structure Riemann généralisée d'indice 1 alors :*

(i) *$\underset{\vee}{g}$, η sont globalement définies sur M ;*

(ii) *$g^n \wedge \eta \neq 0$ partout sur M ;*

(iii) *$(\underset{\vee}{g}, \eta)$ réalise une structure presque cosymplectique sur M.*

Démonstration. (i) $g_{\underset{\vee}{ij}}$ et η_j étant globalement définies sur M, il résulte que $\underset{\vee}{g}$ et η ont la même propriété

(ii) La matrice antisymétrique

$$\begin{Vmatrix} g_{\underset{\vee}{ij}} & -\eta_i \\ \eta_j & 0 \end{Vmatrix} \tag{1.7}$$

est non-singulière.

En effet, d'apsès (1.4) et (1.5), le système linéaire

$$\begin{Vmatrix} g_{\underset{\vee}{ij}} & -\eta_i \\ \eta_j & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} X^j \\ Y^j \end{Vmatrix} = 0$$

admet seulement la solution triviale.

(iii) Soit

$$\begin{Vmatrix} g^{\underset{\vee}{ij}} & \xi^i \\ -\xi^j & 0 \end{Vmatrix} \tag{1.7'}$$

la matrice inverse de (1.7). On a les relations

$$\begin{cases} g_{\underset{\vee}{jk}} g^{\underset{\vee}{ik}} + \eta_j \xi^i = \delta_j^i, \\ \eta_i \xi^i = 1, \\ g_{\underset{\vee}{ij}} \xi^j = 0, \quad g^{\underset{\vee}{ij}} \eta_j = 0 \end{cases} \tag{1.8}$$

ce qui prouve que $(\underset{\vee}{g}, \eta)$ est une structure presque cosymplectique sur M [5] [6]. q.e.d.

Notons par

$$\theta_{ij}^{kh} = \frac{1}{2}(\delta_i^k \eta_j \xi^h + \eta_i \xi^k \delta_j^h - \eta_i \xi^k \eta_j \xi^h) \tag{1.9}$$

l'opérateur Miron-Oproiu [10] de la structure $(\underset{\vee}{g}, \eta)$ et par $\underset{a}{\Lambda}, \underset{a}{\Phi}$ $(a = 1, 2)$ les opérateurs Obata [11] de $g_{\underline{ij}}$ et $g_{\underset{\vee}{ij}}$:

$$\underset{1}{\Lambda}{}_{ij}^{kh} = \frac{1}{2}(\delta_i^k \delta_j^h - g_{\underline{ij}} g^{\underline{kh}}), \quad \underset{2}{\Lambda}{}_{ij}^{kh} = \frac{1}{2}(\delta_i^k \delta_j^h + g_{\underline{ij}} g^{\underline{kh}})$$

$$\underset{1}{\Phi}{}_{ij}^{kh} = \frac{1}{2}(\delta_i^k \delta_j^h - g_{\underset{\vee}{ij}} g^{\underset{\vee}{kh}}), \quad \underset{2}{\Phi}{}_{ij}^{kh} = \frac{1}{2}(\delta_i^k \delta_j^h + g_{\underset{\vee}{ij}} g^{\underset{\vee}{kh}}).$$

Si par le produit de deux d'entre les opérateurs mentionnés plus haut, par exemple $\underset{1}{\Lambda} . \underset{1}{\Phi}$, on entend le champ de composantes

$$(\underset{1}{\Lambda} . \underset{1}{\Phi})_{ij}^{kh} = \underset{1}{\Lambda}{}_{ir}^{sh} \underset{1}{\Phi}{}_{sj}^{kr},$$

et par la contraction d'un champ de tenseurs $t \in \tau_2^1(M)$ avec un des opérateurs $\underset{a}{\Lambda}, \underset{a}{\Phi}, \underset{a}{\theta}$, par exemple $\underset{a}{\Lambda}$, on entend

$$(\underset{a}{\Lambda} . t)_{jk}^h = \underset{a}{\Lambda}{}_{jr}^{sh} t_{sk}^r \qquad (a = 1, 2),$$

alors, on prouve aisément le :

Théorème 2. (i) *$\underset{1}{\Lambda}, \underset{2}{\Lambda}$ sont des projecteurs supplémentaires sur le $\mathcal{F}(M)$ module $\tau_2^1(M)$;*

(ii) $\underset{a}{\Lambda} . \Theta = \Theta . \underset{a}{\Lambda} \quad (a = 1, 2)$;

(iii) *$\underset{1}{\Phi} - \Theta$, $\underset{2}{\Phi} + \Theta$ sont des projecteurs supplémentaires sur $\tau_2^1(M)$.*

(iv) *Si $\underset{1}{\Lambda} . \underset{1}{\Phi} = \underset{1}{\Phi} . \underset{1}{\Lambda}$, alors les projecteurs $(\underset{1}{\Lambda}, \underset{1}{\Phi} - \Theta)$ et $(\underset{2}{\Lambda}, \underset{2}{\Phi} + \Theta)$ sont permutables et les opérateurs $\underset{1}{\Lambda} . (\underset{1}{\Phi} - \Theta)$, $\underset{2}{\Lambda} . (\underset{2}{\Phi} + \Theta)$ sont des projecteurs supplémentaires sur $\tau_2^1(M)$.*

Corollaire 1. *Si $\underset{1}{\Lambda} . \underset{1}{\Phi} = \underset{1}{\Phi} . \underset{1}{\Lambda}$, alors le système d'équations tensorielles*

$$\underset{1}{\Lambda} . X = 0, \ (\underset{1}{\Phi} - \Theta) . X = 0, \ [\textit{resp.} \ \underset{2}{\Lambda} . X = 0, \ (\underset{2}{\Phi} + \Theta) . X = 0]$$

dans le champ tensoriel inconnu $X \in \tau_2^1(M)$ a des solutions non-triviales et sa solution générale est

$$X = \underset{2}{\Lambda} . (\underset{2}{\Phi} + \Theta) . Y, \quad [\textit{resp.} \ X = \underset{1}{\Lambda} . (\underset{1}{\Phi} - \Theta) . Y],$$

où $Y \in \tau_2^1(M)$ est complètement arbitraire.

§.2. **Structures Riemann généralisées du type presque 1-horsymplectiques métriques. Définition 2.** *Une structure Riemann généralisée $g \in \tau_2^0(M)$ s'appelle du type presque 1-horsymplectique métrique si g est d'indice 1 et les opérateurs Obata $\underset{1}{\Lambda}$ et $\underset{1}{\Phi}$ sont permutables :*

$$\underset{1}{\Lambda} \cdot \underset{1}{\Phi} = \underset{1}{\Phi} \cdot \underset{1}{\Lambda}, \tag{2.1}$$

Théorème 3. *La structure Riemann généralisée g d'indice 1 est presque 1-horsymplectique métrique si et seulement s'il existe une fonction non-nulle μ sur M, de manière que*

$$g_{\underline{ir}} g_{\underline{js}} g^{\underset{\vee}{rs}} = \mu g_{\underset{\vee}{ij}}. \tag{2.2}$$

En effet, (2.1) est équivalente à

$$g_{\underline{ir}} g_{\underline{jm}} g^{\underset{\vee}{rm}} g_{\underset{\vee}{kh}} = g_{\underline{kr}} g_{\underline{hm}} g^{\underset{\vee}{rm}} g_{\underset{\vee}{ij}}.$$

On note

$$c_{ij} = g_{\underline{ia}} g_{\underline{jb}} g^{\underset{\vee}{ab}} \tag{2.3}$$

et de la dernière égalité, on a

$$c_{ij} g_{\underset{\vee}{kh}} = c_{kh} g_{\underset{\vee}{ij}}.$$

Si on réalise la contraction de cette égalité avec $g^{\underset{\vee}{kh}}$, on constate que $g_{\underset{\vee}{kh}} g^{\underset{\vee}{kh}} = 2n$, et on note $\mu = \frac{1}{2n} c_{kh} g^{\underset{\vee}{kh}}$, on obtient (2.2). De (2.2) il résulte $\mu \neq 0$. La réciproque est immédiate.

Exemple 1. Soit $(F^i_j, \xi^i, \eta_j, g_{\underline{ij}})$ une structure presque de contact métrique elliptique :

$$F^i_j F^k_i = -\delta^k_j + \eta_j \xi^k, \quad \eta_k F^k_i = 0, \quad F^k_i \xi^i = 0, \quad F^c_i F^b_j g_{\underline{cb}} = g_{\underline{ij}} - \eta_i \eta_j.$$

Si on note $g_{\underset{\vee}{ij}} = F^k_i g_{\underline{jk}}$, alors $g_{ij} = g_{\underline{ij}} + g_{\underset{\vee}{ij}}$ est une structure Riemann généralisée du type presque 1 horsymplectique métrique (elliptique).

Exemple 2. Soit $(P^i_j, \xi^i, \eta_j, g_{\underline{ij}})$ une structure presque de contact métrique hyperbolique :

$$P^i_j P^k_i = \delta^k_j - \eta_j \xi^k, \quad \eta_k P^k_i = 0, \quad P^k_i \xi^i = 0, \quad P^c_i P^b_j g_{\underline{cb}} = -g_{\underline{ij}} + \eta_i \eta_j.$$

Si on note $g_{ij} = P^k_i g_{\underline{jk}}$, alors $g_{ij} = g_{\underline{ij}} + g_{\underset{\vee}{ij}}$ est une structure Riemann généralisée du type presque 1-horsymplectique métrique (hyperbolique).

Définition 3. *La structure g du type presque 1-horsymplectique métrique s'appelle : elliptique si $\mu = a^2 (a > 0,\ a \in R)$ et hyperbolique si $\mu = -a^2 (a > 0,\ a \in R)$.*

1°. *Cas elliptique.* L'équation (2.2) est équivalente à

$$a g^{\underline{ir}} g_{\underset{\vee}{jr}} = -\frac{1}{a} g^{\underset{\vee}{ir}} g_{\underline{jr}}.$$

On considère le champ

$$F^i_j = a g^{\underline{ir}} g_{\underset{\vee}{jr}}. \tag{2.4}$$

Théorème 4. (i) *L'ensemble $(F^i_j, \eta_j, \xi^i, g_{\underline{ij}})$ est une structure presque de contact métrique elliptique ;*

(ii) $F_{ij} = a g_{\underset{\vee}{ij}}$.

Démonstration. (i) $F^i_j F^k_i = a g^{\underline{ir}} g_{\underset{\vee}{jr}} \left(-\frac{1}{a} g^{\underset{\vee}{ks}} g_{\underline{is}}\right) = -g_{\underset{\vee}{jr}} g^{\underset{\vee}{kr}} = -\delta^k_j + \eta_j \xi^k$, $F^i_j \xi^j = 0$, $F^i_j \eta_i = 0$, $F^r_i F^s_j g_{\underline{rs}} = -g^{\underline{rc}} g_{\underset{\vee}{ic}} g^{\underset{\vee}{sb}} g_{\underline{jb}} g_{\underline{rs}} = -g_{\underset{\vee}{is}} g^{\underset{\vee}{sb}} g_{\underline{jb}} = (\delta^b_i - \eta_i \xi^b) g_{\underline{jb}} = g_{\underline{ij}} - \eta_i \eta_j$;

(ii) $F_{ij} = F^b_i g_{\underline{jb}} = a g^{\underline{bc}} g_{\underset{\vee}{ic}} g_{\underline{jb}} = a g_{\underset{\vee}{ij}}$.

q.e.d.

2°. *Cas hyperbolique.* L'équation (2.2) est équivalente à

$$a g^{\underline{ir}} g_{\underset{\vee}{jr}} = \frac{1}{a} g^{\underset{\vee}{ir}} g_{\underline{jr}}.$$

On considère le champ

$$P^i_j = a g^{\underline{ir}} g_{\underset{\vee}{jr}}. \tag{2.5}$$

Théorème 5. (i) *L'ensemble $(P^i_j, \eta_j, \xi^i, g_{\underline{ij}})$ est une structure presque de contact métrique hyperbolique ;*

(ii) $P_{ij} = a g_{\underset{\vee}{ij}}$.

Démonstration. (i) $P^i_j P^k_i = a g^{\underline{ir}} g_{\underset{\vee}{jr}} \cdot \frac{1}{a} g^{\underset{\vee}{ks}} g_{\underline{is}} = g_{\underset{\vee}{jr}} g^{\underset{\vee}{kr}} = \delta^k_j - \eta_j \xi^k$, $P^i_j \xi^j = 0$, $P^i_j \eta_i = 0$, $P^r_i P^s_j g_{\underline{rs}} = g^{\underline{rc}} g^{\underset{\vee}{ic}} g^{\underset{\vee}{sb}} g_{\underline{jb}} g_{\underline{rs}} = g_{\underset{\vee}{is}} g^{\underset{\vee}{sb}} g_{\underline{jb}} = (-\delta^b_i + \eta_i \xi^b) g_{\underline{jb}} = -g_{\underline{ij}} + \eta_i \eta_j$;

(ii) $P_{ij} = P^r_i g_{\underline{jr}} = a g^{\underline{rb}} g_{\underset{\vee}{ib}} g_{\underline{jr}} = a g_{\underset{\vee}{ij}}$.

q.e.d.

§.3. **Connexions compatibles aux structures Riemann généralisées du type presque 1-horsymplectique métrique. Définition 4.** *Une connexion linéaire Γ est compatible à la structure Riemann généralisée $g \in \tau(M)$ si $g_{ij|k} = 0$.*

On remarque immédiatement que Γ est compatible à g si et seulement si :

$$g_{\underline{ij}|k} = 0, \quad g_{\underset{\vee}{ij}|k} = 0. \tag{3.1}$$

Théorème 6. *Si $g \in \tau_2^0(M)$ est une structure Riemann généralisée du type presque 1-horsymplectique métrique et Γ est compatible à elle, alors*

$$\xi^i_{|k} = 0, \quad \eta_{i|k} = 0, \quad g^{\underline{ij}}_{|k} = 0, \quad g^{\underset{\vee}{ij}}_{|k} = 0. \tag{3.2}$$

Démonstration. De (3.1) et de la première relation (1.4), il résulte $g_{\underset{\vee}{ij}}\xi^j_{|k}=0$. On réalise la contraction avec $g^{\underset{\vee}{ib}}$ et on a $\xi^b_{|k}=\rho_k\xi^b$, où on a noté $\rho_k=\eta_j\xi^j_{|k}$. Mais la deuxième relation (1.4) et (3.1) conduisent à $\rho_k=0$, c'est à dire $\xi^i_{|k}=0$. A présent, de $\eta_i=g_{ij}\xi^j$ il résulte $\eta_{j|k}=0$. Par la suite, on constate que $g^{ij}{}_{|k}=0$ et la première relation de (1.8) nous offre $g_{jk}g^{\underset{\vee}{ik}}_{|i}=0$. On opère la contraction avec $g^{\underset{\vee}{js}}$ et on obtient $g^{is}_{|i}=\eta_k\xi^s g^{\underset{\vee}{ik}}_{|i}$. Compte tenu de $\xi^j_{|1}=(g^{\underset{\vee}{ik}}\eta_k)_{|1}=0$, il résulte $\eta_{k|1}=0$ et $\eta_k g^{\underset{\vee}{ik}}_{|1}=0$. C'est-à-dire $g^{\underset{\vee}{is}}_{|1}=0$. q.e.d.

Théorème 7. *Il existe des connexions linéaires compatibles à la structure Riemann généralisée g du type presque 1-horsymplectique métrique si et seulement si g est presque 1-horsymplectique métrique éliptique ou hyperbolique.*

Démonstration. On suppose qu'il existe Γ compatible à la structure g qui est du type presque 1-horsymplectique métrique. En dérivant (2.2) d'une manière covariante il résulte $g_{\underset{\vee}{ij}}\partial\mu/\partial x^k=0$. On opère la contraction de cette égalité avec $g^{\underset{\vee}{ij}}$ et on a $(1/2)\partial\mu/\partial x^k=0$. Il résulte $\mu=$constant.

Reciproquement. On a à considérer, les cas $\mu=a^2(a>0,\ a\in R)$ et $\mu=-a^2(a>0,\ a\in R)$.

1°. **Cas elliptique. Lemme 1.** *Si $\mathring{\Gamma}$ est une connexion linéaire fixée sur M et ; désigne la dérivée covariante par rapport à $\mathring{\Gamma}$, alors la connexion linéaire suivante*

$$\overset{k}{\Gamma}{}^h_{jk}=\mathring{\Gamma}^h_{jk}+\frac{1}{4}[g^{\underline{rh}}g_{\underline{rj};k}+g^{\underset{\vee}{rh}}g_{\underset{\vee}{rj};k}+F^r_jF^h_{r;k}+2\xi^h\eta_{j;k}-2\eta_j\xi^h_{;k}+ \tag{3.3}$$
$$+\xi^h g_{\underline{rj}}\xi^r_{;k}-g^{\underline{rh}}\eta_j\eta_{r;k}].$$

est compatible à la structure g du type presque 1-horsymplectique métrique élliptique.

En effet, on montre par un calcul direct que

$$g_{ij|l}^{\ \ k}=0,\quad g_{\underset{\vee}{ij}|l}^{\ \ k}=0. \tag{3.4}$$

Nous appellerons la connexion $\overset{k}{\Gamma}$ donnée sur (3.3) la *connexion Kawaguchi* correspondante à $\mathring{\Gamma}$, compatible à la structure Riemann généralisée du type presque 1-horsymplectique métrique. élliptique.

2°. **Cas hyperbolique. Lemme 2.** *Si $\mathring{\Gamma}$ est une connexion linéaire fixée sur M et ; note la dérivée covariante par rapport à $\mathring{\Gamma}$, alors la connexion linéaire suivante.*

$$\overset{k}{\Gamma}{}^h_{jk}=\mathring{\Gamma}^h_{jk}+\frac{1}{4}g^{\underline{rh}}g_{\underline{rj};k}+g^{\underset{\vee}{rh}}g_{\underset{\vee}{rj};k}-P^r_jP^h_{r;k}+2\xi^h\eta_{j;k}-2\eta_j\xi^h_{;k}+ \tag{3.5}$$
$$+\xi^h g_{\underline{rj}}\xi^r_{;k}-g^{\underline{rh}}\eta_j\eta_{r;k}].$$

est compatible à la structure g du type presque 1-horsymplectique métrique hyperbolique :

En effet, on montre par un calcul direct que (3.5) satisfait aux équations (3.4) pour ce cas ci.

Nous appellerons la connexion $\overset{k}{\Gamma}$ donnée par (3.5) *la connexion Kawaguchi* correspondant à $\mathring{\Gamma}$ compatible à la structure Riemann généralisée du type presque 1 horsymplectique métrique hyperbolique.

Les lemmes 1 et 2 démontrent completement le théorème 7. Q.e.d.

§.4. **Arbitrariété de la solution.** 1°. *Structure g du type presque 1-horsymplectiques éliptique.*

Définition 5. *La connexion Kawaguchi (3.3), correspondante à la connexion Riemann-Christoffel du champ g_{ij}, s'appelle connexion canonique de la structure g du type presque 1-horsymplectique métrique élliptique.*

Proposition 1. *La connexion canonique $\overset{c}{\Gamma}$ de la structure Riemann généralisée du type presque 1-horsymplectique métrique élliptique présente une des formes, équivalentes deux par deux :*

$$\text{(i)}\quad \overset{c}{\Gamma}{}^h_{jk}=\{{}^h_{jk}\}+\frac{1}{4}[g^{\underset{\vee}{rh}}g_{\underset{\vee}{rj}k}+F^r_jF^h_{r;k}+3\xi^h\eta_{j;k}-3\eta_j\xi^h_{;k}],$$

$$\text{(ii)}\quad \overset{c}{\Gamma}{}^h_{jk}=\{{}^h_{jk}\}+\frac{1}{2}[g^{\underset{\vee}{rh}}g_{\underset{\vee}{rj};k}+2\xi^h\eta_{j;k}-\eta_j\xi^h_{;k}].$$

$$\text{(iii)}\quad \overset{c}{\Gamma}{}^h_{jk}=\{{}^h_{jk}\}+\frac{1}{2}[F^r_jF^h_{r;k}+\xi^h\eta_{j;k}-2\eta_j\xi^h_{;k}],$$

où F^r_j est donné par (2.4).

Si on applique une méthode de [7] [11], alors le corollaire 1 nous permet d'affirmer :

Théorème 8. *Toutes les connexions linéaires compatibles à une structure Riemann généralisée du type presque 1-horsymplectique métrique élliptique sont données par la formule*

$$\Gamma^h_{jk}=\overset{c}{\Gamma}{}^h_{jk}+(\underset{1}{A}\,.\,(\underset{1}{\Phi}-\Theta))^{rh}_{js}Y^s_{rk}, \tag{4.1}$$

où $\overset{c}{\Gamma}$ est la connexion canonique de la proposition 1, et Y est un champ de tenseurs du type (1.2) arbitraire.

2°. **Structure g du type presque 1-horsymplectique métrique hyperbolique. Définition 6.** *La connexion Kawaguchi (3.5) correspondante à la connexion Riemann-Christoffel du champ g_{ij}, s'appelle la connexion canonique de la structure g du type presque 1-horsymplectique métrique hyperbolique.*

Proposition 2. *La connexion canonique $\overset{c}{\Gamma}$ de la structure Riemann généralisée du type presque 1-horsymplectique métrique hyperbolique g présente une des formes, équivalentes deux par deux*

$$\text{(i)}\quad \overset{c}{\Gamma}{}^h_{jk}=\{{}^h_{jk}\}+\frac{1}{4}[g^{\underset{\vee}{rh}}g_{\underset{\vee}{rj};k}-P^r_jP^h_{r;k}+3\xi^h\eta_{j;k}-3\eta_j\xi^h_{;k}],$$

$$\text{(ii)}\quad \overset{c}{\Gamma}{}^h_{jk}=\{{}^h_{jk}\}+\frac{1}{2}[g^{\underset{\vee}{rh}}g_{\underset{\vee}{rj};k}+2\xi^h\eta_{j;k}-\eta_j\xi^h_{;k}],$$

$$\text{(iii)}\quad \overset{c}{\Gamma}{}^h_{jk}=\{{}^h_{jk}\}-\frac{1}{2}[P^r_jP^h_{r;k}-\xi^h\eta_{j;k}+2\eta_j\xi^h_{;k}],$$

où P^i_j est le champ de tenseurs donné par (2.5).

Théorème 9. *Toutes les connexions linéaires compatibles à la structure Riemann généralisée du type presque 1-horsympllectique métrique hyoperbolique g sont données par la formule* (4.1) *où $\overset{c}{\Gamma}$ est la connexion canonique de la proposition* 2, *et Y est un champ de tenseurs du type* (1.2) *arbitraire.*

BIBLIOGRAPHIE

1. Atanasiu Gh. — *Sur le problème d'Eisenhart*, Rev. Roum. Math. pures et appl., XVI, 3 (1971), 309—311.
2. Eisenhart L. P. — *General Riemann spaces* I, II, Proc. Nat. Sc., U.S.A. 37 (1951, 5, 38 (1952), 6.
3. Ianuş S. — *Sulla geometria delle varietà consimplectische*, Relajione 18, Università di Napoli, 1972, pg. 42.
4. Kawaguchi A. — *Beziehung zwischen einer metrischen linearen Übertragung und einer nicht — metrischen in einem allgemeinen metrischen Raume*, Akad. Wetensch. Amsterdam Proc., 40 (1937), 596—611.
5. Libermann P. — *Sur les automorphismes infinitésimaux des structures symplectiques et des structures de contact*. Coll. Géom. Diff., Bruxelles (1957), 37—53.
6. Lichenerowicz A. — *Réductivité des algèbres d'automorphismes de structures symplectiques, cosymplectiques et des structures de contact*. Rend. Mat. Univ. Roma, 1—2 (1963), 197—244.
7. Miron R. — *Connexions compatibles aux structures conformes presque symplectiques*. C.R. Acad. Sc. Paris, sér. A, 265 (1967), 685—687.
8. Miron R. and Atanasiu Gh. — *Hyperbolical almost Hermitian structures*. Lucr. Coll. Naţ. Geom. Top., Buşteni-Prahova, 27—30 iunie 1981.
9. Miron R. et Atanasiu Gh. — *Existence et arbitraire des connexions compatibles aux structures Riemann généralisées du type hermitien* (sous presse dans TENSOR, Japan).
10. Miron R. et Oproiu V. — *Connexions compatibles aux structures presque cosymplectiques et conformes presque cosymplectiques*. C.R. Acad. Sc. Paris, sér. A, 268 (1969), 451—454.
11. Obata M. — *Affine connections on manifolds with almost complex, quaternion or Hermitian structure*. Jap. J. Math., 26 (1957) 43—77.
12. Vanstone J. R. — *Connections satisfying a generalized Ricci lemma*. Canadian J. of Math., XVI, 3 (1964).
13. Yano K. — *Differential Geometry on complex and almost complex spaces*. Pergamon Press, New-York (1965).

Université „Al. I. Cuza"
Fac. de Mathématiques
6600 Iassy, Roumanie

Université de Braşov
Fac. de Mathématiques
2200 Braşov, Roumanie

Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi
Supliment la tomul XXVII, s. I a, 1981

A CHARACTERIZATION OF TRANSVERSALITY TO DISTRIBUTIONS

BY

DUMITRU MOTREANU

To the memory of Professor Mendel Haimovici

In this paper we introduce the notion of transversal mapping to a regular distribution (subbundle of the tangent bundle) and we give a characterization of this transversality in terms of the preimage of the distribution by the tangent map.

All manifolds considered are finite dimensional paracompact and smooth. The distributions are always smooth and regular (subbundles of the tangent bundle). As usual, we shall denote by T_xX the tangent space of the smooth manifold X at the point $x \in X$ and by $df_x : T_xX \to T_{f(x)}Y$ the differential of the smooth mapping $f : X \to Y$ at $x \in X$. Also if D is a distribution on a manifold Y, then D_y will denote the fiber of D over $y \in Y$.

Definition 1. *Let X, Y be smooth manifolds and let D be a distribution on Y. A smooth mapping $f : X \to Y$ is said to be transversal to D* (and we denote $f \pitchfork D$) *if for each $x \in X$ we have*

$$df_x(T_xX) + D_{f(x)} = T_{f(x)}Y.$$

The concepts of transversality to a submanifold and to a foliation are well known and are very important for the differential topology (see for example [2]). We think that the notion of transversality to an arbitrary distribution (not necessarily integrable) we have just defined could be also of interest in view of the importance of the distributions for the differential geometry. Certainly, if the distribution is integrable, Definition 1 reduces to the transversality to the corresponding foliation.

Now we give some examples of transversal mappings to distributions.

Example 1. Let $\pi : E \to X$ be a vector bundle and let $s : X \to E$ be a smooth section of E. Then $s \pitchfork TF(E)$, where $TF(E)$ is the vertical tangent bundle ($TF(E) = \ker d\pi$).

Example 2. Let G, H be Lie groups and let $f : G \to H$ be a homomorphism of Lie groups. Let K be a connected Lie subgroup of H and let D be the Lie algebra of K. Then the following are equivalent :

(i) $f \pitchfork D$ (here D is considered as a distribution on H) ;

(ii) $f \pitchfork K$;

(iii) $f \pitchfork K$ at the unity of G.

Example 3. Let D be the distribution on R^3 generated by the vector fields $\partial/\partial x^1$ and $(\partial/\partial x^2) + (\exp x^1)(\partial/\partial x^3)$ which is clearly not integrable (see [3], p. 195). The mapping $f : R \to R^3$ defined by $f(t) = (0, t, 0)$ is transversal to D.