Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi
Supliment la tomul XXVIII, s. I a, 1982

Δ^α-STRUCTURES DIFFÉRENTIABLES SUR UNE VARIÉTÉ

PAR

ELENA MACOVEI

La précision de la notion de distribution différentiable par C. Chevalley [3] et le développement de la théorie des systèmes Pfaff initiée par E. Cartan [2] permit de fondamenter la géométrie différentielle des variétés qui possèdent des structures différentiables définies par un système de distributions (A. P. Sirocov [11]).

Cette Note contient l'étude des propriétés globales des structures différentiables définies par une paire de distributions différentiables, non complémentaires $\Delta^\alpha(\alpha=1,2)$ nommées Δ^α-structures différentiables [7].

§ 1. **Δ^α-structures différentiables sur une variété.** Soit M une variété différentiable de classe C^∞ et de dimension n, sur laquelle sont données globalement deux distributions différentiables :

$$\Delta^\alpha : x \in M \to \Delta^\alpha_x \subset T_xM, \ \forall x \in M \ ; n_\alpha = \dim \Delta^\alpha_x, \ 1 \leqslant n_\alpha \leqslant n. \tag{1.1}$$

Supposons l'existence des distributions $\Delta^\alpha(\alpha=1,2)$ et considérons les distributions canoniques associées :

$$\begin{gathered} K : x \in M \to K_x = \Delta^1_x \cap \Delta^2_x \subset T_xM, \ \forall x \in M \ ; \ 0 \leqslant \varkappa = \dim K_x \leqslant \\ \leqslant \min(n_1, n_2) \\ \Delta : x \in M \to \Delta_x = \Delta^1_x + \Delta^2_x \subseteq T_xM, \ \forall x \in M \ ; \ 2 \leqslant p = \dim \Delta_x \leqslant n. \end{gathered} \tag{1.2}$$

Nous nous proposons d'étudier la structure géométrique (M, Δ^α) dans l'hypothèse : $\Delta^1_x + \Delta^2_x \subset T_xM$, $\forall x \in M (n_1 + n_2 < n)$ et qui s'appelera Δ^α-structure réelle sur M. Nous nous occupons des Δ^α-structures réelles suivantes :

Définition 1.1. *On appelle Δ^α_k-structure réelle sur M une paire de distributions différentiables Δ^α pour lesquelles l'intersection K est une distribution et* $\dim \Delta^1_x + \dim \Delta^2_x - \dim K_x < n$, $\forall x \in M$.

Définition 1.2. *On appelle Δ^α_0-structure réelle sur M une paire de distributions Δ^α pour lesquelles $\Delta^1_x \cap \Delta^2_x = \{0\}_x$ et* $\dim \Delta^1_x + \dim \Delta^2_x < n$, $\forall x \in M$.

Définition 1.3. *On appelle Δ^α_μ-structure réelle sur M une paire de distributions Δ^α où Δ^1 est involutive et pour lesquelles $\Delta^1_x \cap \Delta^2_x = \Delta^1_x$,* $\dim \Delta^2_x < n$, $\forall x \in M$.

Les Δ^α_k-structures représentent les cas génériques, c'est pourquoi nous étudierons complètement tous les problèmes de géométrie différentielle pour ces structures. Ces résultats sont valables pour les structures subordonnées Δ^α_0 et Δ^α_μ.

Le groupe d'automorphismes de T_xM qui conserve les sous-espaces linéaires K_x, Δ^1_x, Δ^2_x (donc, les distributions K, Δ^1, Δ^2 qui définissent une

Δ_k^α-structure) sera noté par G_K et respectivement par G_{Δ^α}. G_K est isomorphe avec le groupe multiplicatif des matrices réelles, carrées, non singulières, de forme :

$$\begin{Vmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 \\ A_2 & A_3 & 0 & 0 \\ A_4 & 0 & A_5 & 0 \\ A_6 & A_7 & A_8 & A_9 \end{Vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &A_1 \in GL(\varkappa, R),\ A_3 \in GL(n_1-\varkappa, R),\ A_5 \in GL(n_2-\varkappa, R) \\ &A_9 \in GL(n-n_1-n_2+\varkappa, R),\ A_2 \in \mathrm{Hom}\,(R^\varkappa, R^{\varkappa_1-\varkappa}) \\ &A_4 \in \mathrm{Hom}\,(R^\varkappa, R^{n_2-\varkappa})\ A_6 \in \mathrm{Hom}\,(R^\varkappa, R^{n-n_1-n_2+\varkappa}), \\ &A_7 \in \mathrm{Hom}\,(R^{n_1-\varkappa}, R^{n-n_1-n_2+\varkappa}),\ A_8 \in \mathrm{Hom}\,(R^{n_2-\varkappa}, R^{n-n_1-n+\varkappa}) \end{aligned} \tag{1.3}$$

et on montre qu'il est un sous-groupe fermé du groupe $GL(n, R)$ [6].

Du point de vue local, les distributions d'une Δ_k^α-structure peuvent être définies de deux manières équivalentes : à l'aide d'un système de champs de vecteurs ou à l'aide d'un système de formes différentielles [4]. Ainsi, nous avons :

(K) défini par $\varkappa$ champs de vecteurs linéairement indépendants (X_u) $(1 \leqslant u \leqslant \varkappa)$,

(Δ^α) défini par n_α champs de vecteurs linéairement indépendants $(X_u, X_{j\alpha})$ $(\varkappa+1 \leqslant j_\alpha \leqslant n_\alpha, \alpha=1,2)$,

(Δ) défini par $(n_1+n_2-\varkappa)$ champs de vecteurs linéairement indépendants (X_u, X_{j_1}, X_{j_2}),

à condition que $(X_u)_x$, $(X_u, X_{j\alpha})_x$, $(X_u, X_{j_1}, X_{j_2})_x$ soient des bases pour les sous-espaces linéaires : K_x, Δ_x^α, Δ_x. D'une manière duale, les distributions K, Δ^α, Δ sont définies par les systèmes Pfaff :

$$\begin{gathered} (K) : \omega^{j_1} = \omega^{j_2} = \omega^\mu = 0 \quad (\varkappa+1 \leqslant j_\alpha \leqslant n_\alpha,\ \alpha=1,2\ ;\ n_1+n_2-\varkappa+1 \leqslant \mu \leqslant n) \\ (\Delta^\alpha) : \omega^{j\beta} = \omega^\mu = 0\ (\alpha \neq \beta\ ;\ \alpha, \beta = 1,2), \\ (\Delta) : \omega^\mu = 0 \end{gathered}$$

à condition que $(\omega_x^{j_1}, \omega_x^{j_2}, \omega_x^\mu)$, $(\omega_x^{j\beta}, \omega_x^\mu)$, (ω_k^μ) soient linéairement indépendants en chaque point $x \in M$.

On considère les ensembles de champs de vecteurs définis localement sur M, la propriété :

$$\begin{gathered} X \in \mathcal{V}(K) \Leftrightarrow X_x \in K_x,\ \forall x \in \mathrm{dom}\, X\ ;\ \mathrm{dom}\, X \subset U \subset M \\ X \in \mathcal{V}(\Delta^\alpha) \Leftrightarrow X_x \in \Delta_x^\alpha,\ \forall x \in \mathrm{dom}\, X\ ;\ U \text{ ouvert} \\ X \in \mathcal{V}(\Delta) \Leftrightarrow X_x \in \Delta_x,\ \forall x \in \mathrm{dom}\, X \end{gathered} \tag{1.4}$$

et d'une manière duale, les ensembles des formes différentielles définies localement sur M, par :

$$\begin{gathered} \omega \in I(K) \Leftrightarrow \omega(X_1, \ldots, X_1) = 0,\ \forall X_1, \ldots, X_R \in \mathcal{V}(K), \\ \omega \in I(\Delta^\alpha) \Leftrightarrow \omega(X_1, \ldots, X_h) = 0,\ \forall X_1, \ldots, X_h \in \mathcal{V}(\Delta^\alpha), \\ \omega \in I(\Delta) \Leftrightarrow \omega(X_1, \ldots, X_s) = 0,\ \forall X_1, \ldots, X_s \in \mathcal{V}(\Delta). \end{gathered} \tag{1.5}$$

On peut démontrer que $\mathcal{V}(K)$, $\mathcal{V}(\Delta^\alpha)$, $\mathcal{V}(\Delta)$ sont des F-modules ($F(M)$ est l'algèbre des fonctions differentiables définies, sur les ouverts de M) et

$I(K)$, $I(\Delta^\alpha)$, $I(\Delta)$ sont des idéaux dans l'algèbre des formes différentielles définies localement sur M.

Si K^α sont les distributions supplémentaires de K en Δ^α, et $\Delta^\perp$ est une distribution différentielle arbitraire avec la propriété: $T_xM = \Delta_x \oplus \Delta_x^\perp$ ($\dim \Delta_x^\perp =$ constant, $\forall x \in M$) alors, pour chaque choix de $\Delta^\perp$ on a les des compositions suivantes :

$$\begin{gathered} T_xM = \Delta_x \oplus \Delta_x^\perp,\quad \forall x \in M, \\ \Delta_x^\alpha = K_x \oplus K_x^\alpha (\dim K_x^\alpha = n_\alpha - \varkappa),\quad \forall x \in M, \\ T_xM = K_x \oplus K_x^1 \oplus K_x^2 \oplus \Delta_x^\perp,\quad \forall x \in M, \end{gathered} \tag{1.6}$$

En tenant compte des décompositions (1.6) si $(e_i(x))$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ est une base de l'espace linéaire tangent T_xM avec $e_u(x) \in K_x$, $e_{j\alpha}(x) \in \Delta_x^\alpha$, $e_\mu(x) \in \Delta_x^\perp$ et si $(f^i(x)) = (f^u(x)), f^{j_1}(x), f^{j_2}(x), f^\mu(x)$ est une base duale $(f^i(e_j) = \delta_j^i)$, alors tout $X(x) \in T_xM$ et respectivement $\omega_i(x) \in T_x^* M$ admettent des décompositions de la forme :

$$\begin{gathered} X(x) = X^u(x) e_u(x) + X^{j_1}(x) e_{j_1}(x) + X^{j_2}(x) e_{j_2}(x) + X^\mu(x)\, e_\mu(x),\ \forall x \in M \\ \omega(x) = \omega_u(x) f^u(x) + \omega_{j_1}(x) f^{j_1}(x) + \omega_{j_2}(x) f^{j_2}(x) + \omega_\mu(x) f^\mu(x),\quad \forall x \in M \\ (1 \leqslant u \leqslant \varkappa\ ;\ \varkappa+1 \leqslant j_\alpha \leqslant n_\alpha,\ \alpha=1,2\ ;\ n_1+n_2-\varkappa+1 \leqslant \mu \leqslant n) \end{gathered} \tag{1.7}$$

En géneral, un champ de tenseurs $T \in \mathcal{D}_s^r(M)$ admet une décomposition du type suivant :

$$T = T^{\substack{u \ldots j_1 \ldots j_2 \ldots \mu \ldots \\ v \ldots l_1 \ldots l_2 \ldots \lambda \ldots}} e_u \otimes \ldots e_{j_1} \otimes \ldots e_{j_2} \otimes \ldots e_\mu \otimes \ldots f^v \otimes \ldots f^{l_1} \otimes \ldots f^{l_2} \otimes \ldots f^\lambda \ldots + \ldots$$

§ 2. Théorèmes de caractérisation pour les Δ^α-structures réelles. Dans ce qui suit nous allons démontrer des théorèmes de caractérisation pour les Δ^α-structures réelles sur une variété ; ceux-ci ont été démonstrés en utilisant quelques résultats de la théorie générale des G-structures et de la théorie des espace fibrés (le théorème de réduction de groupe structural [1], le théorème d'existence des sections globales dans les fibrés principaux [5] et le théorème sur l'intersection des sous-fibrés fermés [8]). Dans ce sens nous prouverons qu'une Δ^α-structure sur M est une G_{Δ^α}-structure.

Nous supposons que la variété M possède une Δ_K^α-structure réelle définie par les distributions $(\Delta^\alpha) = (\Delta^1, \Delta^2)$. Cette hypothèse implique l'existence d'un atlas de trivialisation, $\mathcal{A} = \{h = (U, \varphi_u)\}$ pour le fibré principal des repères linéaires $E(M)$. Sur chaque ouvert U on donne une base locale $(X_i(x))$ de l espace linéaire tangent T_xM avec la propriété suivante : $\varkappa$ champs de vecteurs linéairement indépendants, $X_u(x)$, appartiennent au sous-espace K_x, $n_\alpha - \varkappa$ champs de vecteurs, $X_{j\alpha}(x)$, appartiennent aux-espaces Δ_x^α $(\alpha=1,2)$ et $(X_u, X_{j\alpha})_x$ est une base locale pour Δ_x^α. Ce système (X_u, X_{j_1}, X_{j_2}) est complété par $n-n_1-n_2+\varkappa$ champs de vecteurs arbitraires, $X_\mu(x)$, tels que $(X_u, X_{j_1}, X_{j_2}, X_\mu)x$ soit un système linéairement indépendant en chaque point.

Définition 2.1. *Une base locale de l'espace linéaire tangent* $T_xM(X_i(x)) = (Xu(x), X_{j_1}(x), X_{j_2}(x), X_\mu(x))$ *avec la propriété :*

$$X_u(x) \in K_x,\ X_{j\alpha}(x) \in \Delta_x^\alpha\ ;\ (X_u(x),\ X_{j\alpha}(x)) \tag{2.1}$$

Sont linéairement indépendantes pour $\forall x \in U \subset M$, s'appelle base locale adaptée à Δ_K^α-structure considérée.

Tout repère linéaire $(x, X_i(x))$ est nommé repère adapté pour une Δ_K^α-structure si $(X_i(x))$ est une base locale adaptée.

Les homéomorphismes de trivialisation φ_U sont définis par

$$\varphi_U : (x, \| a_j^i \|) \in U \times G_K \to (x, a_j^i X_i) \in E(M) \ (1 \leq i, j \leq n) \tag{2.2}$$

où $(x, X_i(x))$ est un repère adapté. En outre, pour deux ouverts U, U' avec $U \cap U' \neq \emptyset$, les fonctions de transition sont définies par : $g(x) = \varphi_{U'}^{-1} \varphi_U(x)$, $\forall x \in U \cap U'$ et prennent des valeurs dans le groupe G_K. L'atlas $\mathcal{A} = \{h = (U, \varphi_U)\}$ avec φ_U données par (2.2) s'appelle atlas admissible pour la Δ^α-structure donnée sur M. On peut montrer que $\mathcal{A}$ est un atlas structural maximal du fibré principal des repères linéaires $E(M, GL(n, R)) = E(M)$. On note la projection canonique par : $\pi : E(M) \to M$ [10].

Théorème 2.1. *L'ensemble des repères adaptés à une Δ_K^α-structure donnée sur M, notée par $E_1(M, G_{\Delta^\alpha})$ est un sous fibré principal du fibré des repères $E(M)$.*

Le groupe G_{Δ^α} isomorphe au groupe multiplicatif des matrices réelles carrées, non singulières est un sous-groupe Lie fermé de $GL(n, R)$ [6]. Alors l'ensemble $E_1(M, G_{\Delta^\alpha}) \subset E(M)$ admet la structure différentielle de sous-variété avec la propriété que $\pi_1 : E_1 \to M$ coïncide avec la restriction $\pi/_{E_1}$, qui est une application surjective.

Dans ces conditions il existe un recouvrement ouvert $\{U\}$ de M avec la propriété suivante : sur chaque ouvert U on définit une section locale en $E(M)$, $s : x \in U \to E_1(M, G_{\Delta^\alpha})_x \subset E(M)$ et pour $(x, X_i(x)) \in E_1(M, G_{\Delta^\alpha})$ il y a $c \in G_{\Delta^\alpha}$, telle que $X_i(x) = s(x)\, c$. Donc, pour chaque $x \in U \subset M$, le fibre en x pour $E_1(M, G_{\Delta^\alpha})$ est un ensemble de repères sur lesquels agit le groupe G_{Δ^α} simplement transitif par translation à droite (la restriction des translations à droite, définies par $c \in G_{\Delta^\alpha}$ sur $E(M)$). Si l'on considère une autre section locale, $s' : x \in U' \to s'(x) \in E_1(M, G_{\Delta^\alpha})_x$ alors, sur $U \cap U' \neq \emptyset$, on trouve un repère adapté de $E_1(M, G_{\Delta^\alpha})$ parce que c'est un autre élément de E_1 obtenu de s à l'aide d'un certain élément $c \in G_{\Delta^\alpha}$. Alors, on vérifie que :
$(\pi_1 \circ s)(x, X_i(x)) = x$, $\forall X_i(x) \in E_1(M, G_{\Delta^\alpha})$, $\forall x \in U \subset M$ et $\pi_1 \circ s = \mathrm{id}_M$.
D'après un théorème de la théorie des G structures [1], il résulte que $E_1(M, G_{\Delta^\alpha})$ est un sous-fibré principal de $E(M, GL(n, R), \pi)$.

Remarque. On peut démontrer que $E_1(M, G_{\Delta^\alpha}, \pi_1)$ est un sous-fibré fermé de $E(M, GL(n, R), \pi)$ à l'aide du théorème d'existence des sections globales dans les fibrés principaux [5]. Dans ce qui suit, pour la même démonstration nous allons utiliser la proposition suivante relative à l'intersection de sous-fibrés principaux fermés :

Proposition 2.1. [8]. *Soit $P(M, G)$ un fibré principal et $P_1(M, G_1)$, $P_2(M, G_2)$ deux sous-fibrés fermés de $P(M, G)$ tels que $G_1 \cap G_2$ soit un sous-groupe Lie de G. L'intersection $P_1 \cap P_2$ est un sous-fibré principal de P, si et seulement si : $\pi(P_1 \cap P_2) = M$.*

Théorème 2.2. *Une Δ^α-structure réelle sur M est une G-structure avec groupe structural G_{Δ^α}.*

Supposons donnée sur M une Δ^α-structure réelle définie par une paire de distributions différentiables Δ^α. Alors, chaque distribution Δ^α définit un sous-fibré principal B_{Δ^α} de $E(M)$ ayant comme groupe structural $G_{\Delta^\alpha} =$

$$\{c = \|c_j^i\| \in GL(n, R) \,;\, c_{j\alpha}^{i'\alpha} = 0 \,;\ 1 \leq i, j \leq n \,;\ 1 \leq i'_\alpha \leq n_\alpha \,;\ n_\alpha + 1 \leq \bar{j}_\alpha \leq n \,;$$
$$\alpha = 1, 2\}.$$

Si on applique la proposition 2.1 à ces sous-fibrés principaux on obtient la condition suivante : $B_{\Delta^1} \cap B_{\Delta^2}$ est un sous-fibré principal de $E(M)$ si et seulement si leurs fibres locales en chaque point de M ont l'intersection non vide.

Si M est munie d'une Δ_K^α-structure réelle (définition 1.1) alors, la paire de distributions Δ^α satisfait à la condition : $\dim \Delta_x^1 \cap \Delta_x^2 =$ constant, $\forall x \in M$. Le groupe $G_{\Delta^1} \cap G_{\Delta^2}$ est isomorphe à un groupe de matrices carrées non singulières qui conservent les sous-espaces linéaires : Δ_x^1, Δ_x^2, K_x de T_xM et coïncide avec le groupe G_K défini par (1.3). Les structures B_{Δ^α} ont la propriété que leurs fibres locales ont l'intersection non vide dans chaque point de M et, alors, $B_{\Delta^1} \cap B_{\Delta^2}$ est une G_K-structure sur M qui coïncide avec la Δ_K^α-structure donnée.

§ 3. **L'intégrabilite des Δ^α-structures.** La notion d'intégrabilité pour les Δ^α-structures réelles sera caractérisée à l'aide de l'intégrabilité des distributions Δ^1, Δ^2 et aussi de quelques objets géométriques associés.

Définition 3.1. *Une Δ^α-structure réelle sur la variété M définie par la paire des distributions $\Delta^\alpha (\alpha = 1, 2)$ est intégrable si les distributions de la structure : K, Δ^1, Δ^2 sont intégrables.*

Théorème 3.1. *Une Δ^α-structure réelle sur la variété M est intégrable si et seulement si les F-modules $\mathcal{V}(K)$, $\mathcal{V}(\Delta^\alpha)$ sont des algèbres Lie locales.*

D'après la théorème de Frobenius, appliqué au système de distributions (K, Δ^1, Δ^2) données sur M, il résulte que les F-modules $\mathcal{V}(K)$, $\mathcal{V}(\Delta^\alpha)$ sont des algèbres Lie locales [4] si et seulement si, $\forall X, Y \in \mathcal{V}(K)$ et $\forall X, Y \in \mathcal{V}(\Delta^\alpha)$ nous avons $[X, Y] \in \mathcal{V}(K)$ et $[X, Y] \in \mathcal{V}(\Delta^\alpha)$. Si l'on considère une base locale adaptée $(X_i(x))$ pour T_xM et $[X_u, X_v]_x = C_{uv}^i(x) X_i(x)$, $[X_u, X_{j_\alpha}]_x = C_{uj_\alpha}^i(x) X_i(x)$, $[X_{j_\alpha}, X_{h_\alpha}]_x = C_{j_\alpha h_\alpha}^i(x) X_i(x)$, on trouve les conditions nécessaires et suffisantes afin que $\mathcal{V}(K)$, $\mathcal{V}(\Delta^\alpha)$ soyent des algèbres Lie locales exprimées par :

$$\begin{gathered} C_{uv}^{i_\alpha}(x) = C_{uv}^{\lambda}(x) = C_{uj_\alpha}^{i_\beta}(x) = C_{uj_\alpha}^{\lambda}(x) = C_{j_\alpha h_\alpha}^{i_\beta}(x) = C_{j_\alpha h_\alpha}^{\lambda}(x) = 0, \\ \forall x \in U \subset M, \\ (1 \leq u, v \leq \varkappa \,;\ \varkappa + 1 \leq j_\alpha, l_\alpha, h_\alpha \leq n_\alpha \,;\ \alpha \neq \beta,\ \alpha, \beta = 1, 2 \,;\ n_1 + n_2 - \varkappa + \\ + 1 \leq \lambda \leq \varkappa). \end{gathered} \tag{3.1}$$

L'objet géométrique défini par $\tau = (\tau_{jk}^i)$:

$$\begin{gathered} \tau_{uv}^{i_\alpha} = C_{uv}^{i_\alpha},\ \tau_{uv}^{\lambda} = C_{uv}^{\lambda},\ \tau_{uv}^{i_\beta} = C_{uv}^{i_\beta},\ \tau_{uj_\alpha}^{\lambda} = C_{uj_\alpha}^{\lambda},\ \tau_{j_\alpha h_\alpha}^{i_\beta} = C_{j_\alpha h_\alpha}^{i_\alpha} \\ \tau_{j_\alpha h_\alpha}^{\lambda} = C_{j_\alpha h_\alpha}^{\lambda} \,;\ \tau_{jk}^{i} = 0 \end{gathered} \tag{3.2}$$

pour les autres indices, se transforme d'après la loi tensorielle par rapport aux changements des bases locales, adaptées à T_xM.

Conséquence 3.1. *Une Δ^α-structure réelle sur M est intégrable si et seulement si, l'objet géométrique τ a les composantes identiquement nulles en chaque point de la variété.*

Nous donnerons d'une manière duale, des caractérisations pour l'intégrabilité des Δ^α-structures réelles dans le language des formes différentielles. Si $(X_i)_x$ este une base adaptée de l'espace linéaire tangent, alors, le système de formes linéaires indépendantes $(\theta^i)_x=(\theta^u, \theta^{j_1}, \theta^{j_2}, \theta^\mu)_x$ avec la propriété $\theta^i(X_j)=\delta^i_j$, définit un corepère adapté. Les distributions de la structure sont définies par les systèmes d'équations Pfaff : $(K)\theta^{j_1}\ \theta^{j_2}\ \theta^\mu=0$, $(\Delta^\alpha)\theta^{j\beta}=$ $=\theta^\mu=0$ $(\alpha\neq\beta\ ;\ \alpha, \beta=1,2)$. L'intégrabilité des distributions K, Δ^α est caractérisée par la propriété : $(K)d\theta^{j_1}=d\theta^{j_2}=d\theta^\mu=0$ (mod $\theta^{j_1}, \theta^{j_2}\ \theta^\mu$), $(\Delta^\alpha)\ d\theta^{j\beta}=$ $=d\theta^\mu=0$ (mod $\theta^{j\beta}, \theta^\mu$). Si l'on considère les différentielles exterieures $d\theta^i=W^i_{jk}\theta^j\wedge\theta^k$ par rapport à un corepère adapté, on a :

$$
\begin{aligned}
&d\theta^u=\theta^i\wedge\pi^u_i\\
&d\theta^{j_1}=\theta^{l_1}\wedge\pi^{j_1}_{l_1}+\theta^{l_2}\wedge\pi^{j_1}_{l_2}+\theta^\lambda\wedge\pi^{j_1}_\lambda+\frac{1}{2}\ W^{j_1}_{uv}\ \theta^u\wedge\theta^{h_2},\\
&d\theta^{j_2}=\theta^{l_2}\wedge\pi^{j_2}_{l_2}+\theta^{l_1}\wedge\pi^{j_2}_{l_1}+\theta^\lambda\wedge\pi^{j_2}_\alpha+\frac{1}{2}\ W^{j_2}_{uv}\ \theta^u\wedge\theta^v,\\
&d\theta^\mu=\theta^\lambda+\pi^\mu\wedge+\frac{1}{2}\ W^\mu_{uv}\ \theta^u\wedge\theta^v+W^\mu_{uh_1}\ \theta^u\wedge\theta^{h_1}+W^\mu_{uh_2}\ \theta^u\wedge\theta^v+\\
&\quad+\frac{1}{2}\ W^\mu_{l_1h_1}\ \theta^{l_1}\wedge\theta^{h_1}+W^\mu_{l_1h_2}\ \theta^{l_1}\wedge\theta^{h_2}+\frac{1}{2}\ W^\mu_{l_1h_2}\theta^{l_2}\wedge\theta^{h_2}.
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

Théorème 3.2. *Une Δ^α-structure reélle sur M est intégrable si et seulement si, pour tout corepère adapté $(\theta^\mu, \theta^{j_1}, \theta^{j_2}, \theta^\mu)$ on a les conditions : $d\theta^{j_1}=d\theta^{j_2}=$ $=d\theta^\mu=0$ (mod $I(K)$) et $d\theta^{j\beta}=d\theta^\mu=0$ (mod $I(\Delta^\alpha)$).*

Les coefficients W des équations (3.3) se transforment selon la loi tensorielle aux changements de corepères adaptés de T^*_xM et définissent, d'après G. Vrănceanu [12], les tenseurs d'intégrabilité des distributions de la structure :

$$
\begin{aligned}
&\tau_k=\left(\frac{1}{2}W^{j_1}_{uv}, \frac{1}{2}W^{j_2}_{uv}, \frac{1}{2}\ W^\mu_{uv}\right);\ \alpha\neq\beta\ ;\ \alpha, \beta=1,2\\
&\tau_{\Delta^\alpha}=\left(\frac{1}{2}W^{j_\beta}_{uv}, W^{j\beta}_{uh_\alpha}, \frac{1}{2}\ W^{j\beta}_{l_\alpha h_\alpha}, \frac{1}{2}W^\mu_{uv}, W^\mu_{uh_\alpha}, \frac{1}{2}\ W^\mu_{l_\alpha h_\alpha}\right)
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

Définition 3.2. *Le tenseur $\tau=(\tau^i_{jk})$ défini par :*

$$
\begin{aligned}
&\tau^{j_1}_{uv}=W^{j_1}_{uv},\ \tau^{j_1}_{uh_2}=W^{j_1}_{uh_2},\ \tau^{j_2}_{uv}=W^{j_2}_{uv},\ \tau^{j_2}_{uh_1}=W^{j_2}_{uh_1}\\
&\tau^{j_1}_{l_2h_2}=W^{j_1}_{l_2h_2},\ \tau^{j_2}_{l_1h_1}=W^{j_2}_{l_1h_1},\ \tau^\mu_{uv}=W^\mu_{uv},\ \tau^\mu_{uh_1}=W^\mu_{uh_1}\\
&\tau^\mu_{uh_2}=W^\mu_{uh_2},\ \tau^\mu_{l_1h_1}=W^\mu_{l_1h_1},\ \tau^\mu_{l_2h_2}=W^\mu_{l_2h_2}\ ;\\
&\tau^i_{jk}=0 \text{ pour les autres indices,}
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

s'appelle le tenseur de structure d'une Δ^α-structure réelle

Théorème 3.3. *Une Δ^α-structure réelle sur M est intégrable si et seulement si, le tenseur de structure τ est nul sur M.* La démonstration présente pas des difficultés.

Conséquence 3.2. *Une Δ^α-structure réelle sur M est intégrable si et seulement si, (M, Δ^α) est une variété feuilletée.*

§ 4. **Δ^α-connexions.** Supposons que la variété M est munie d'une Δ^α-structure réelle définie par une paire de distributions (Δ^1, Δ^2) et nous nous proposons de déterminer la famille des connexions linéaires associées à cette structure.

Définition 4.1. *Une connexion infinitésimalle Γ sur le fibré principal des repères adaptés $E_1(M, G_{\Delta^\alpha})$ s'appelle Δ^α-connexion sur la variété M munie d'une Δ^α-structure* [10].

Pour déterminer l'expression locale d'une Δ^α-connexion on considère un recouvrement ouvert $\{U\}$ de la variété M avec la propriété que chaque ouvert U est muni d'une section locale du fibré principal des repères adaptés $E_1(M, G_{\Delta^\alpha})$. Une Δ^α-connexion Γ est donnée localement par la matrice pfaffienne de connexion $\omega_U=\|\omega^i_j\|_U$ où ω_U est définie sur M et prend des valeurs dans l'algèbre Lie du groupe G_{Δ^α}. Les éléments de $\|\omega^i_j\|_U$ sont des formes linéaires locales et nous avons pour ω_U, la matrice :

$$
\left\|\begin{matrix}
\omega^u_v & 0 & 0 & 0\\
\omega^{l_1}_v & \omega^{l_1}_{jl} & 0 & 0\\
\omega^{l_2}_v & 0 & \omega^{l_2}_{j_2} & 0\\
\omega^\lambda_v & \omega^\lambda_{j_1} & \omega^\lambda_{j_2} & \omega^\lambda_\mu
\end{matrix}\right\|
\quad
\begin{matrix}
1\leqslant i, j\leqslant n\\
1\leqslant u, v\leqslant \varkappa\\
\varkappa+1\leqslant j_\alpha,\ l_\alpha\leqslant n_\alpha(\alpha=1,2)\\
n_\alpha+n_2-\varkappa+1\leqslant\lambda,\ \mu\leqslant n
\end{matrix}
\tag{4.1}
$$

Les éléments de la matrice de connexion s'expriment par :

$$
\omega^i_j=\Gamma^i_{ju}\theta^u+\Gamma^i_{jl_1}\theta^{l_1}+\Gamma^i_{jl_2}\theta^{l_2}+\Gamma^i_{j\mu}\theta^\mu.
\tag{4.2}
$$

Une Δ^α-connexion sur M d'après la définition 4.1, est une connexion infinitésimale sur $E_1(M, G_{\Delta^\alpha})$ et détermine canoniquement une connexion linéaire L représentée par la matrice de connexion $\pi=\|\pi^i_j\|$. La connexion linéaire L peut s'identifier à une Δ^α-connexion Γ donnée sur M si et seulement si, la matrice pfaffienne de connexion π satisfait aux conditions :

$$
\pi^u_{j_1}=\pi^u_{j_2}=\pi^u_\mu=\pi^{l_1}_{j_2}=\pi^{l_1}_\mu=\pi^{l_2}_{j_1}=\pi^{l_2}_\mu=0
\tag{4.3}
$$

À la Δ^α-connexion Γ sur M on peut associer le tenseur de courbure et le tenseur de torsion, on peut écrire les équations de structure de E. Cartan et les identités de Bianchi car Γ est une loi de dérivation dans le fibré tangent $T(M)$ [6].

Définition 4.2. *Une distribution D sur M est parallèle par rapport à une connexion linéaire L si les vecteurs de D transportés parallèlement par L donnent des vecteurs qui appartiennent à D*[9].

Définition 4.3. *Une connexion linéaire $L(L^i_{jk})$ est compatible à une Δ^α-structure réelle sur M si les distributions des structure : K, Δ^1, Δ^2 sont parallèles par rapport à L.*

Les dérivées covariantes des vecteurs d'un repère adapté par rapport à une connexion linéaire L, s'expriment par :

$$\Delta_l X^i_u = \frac{\partial X^i_u}{\partial x^l} + L^h_{ul} X^{l'}_h ,$$

$$(4.4) \qquad \Delta_l X^i_{j_1} = \frac{\partial X^{l'}_{j_1}}{\partial x^l} + L^h_{j_1 l} X^{l'}_h ,$$

$$\Delta_l X^{j_2}_i = \frac{\partial X^{j_2}_{l'}}{\partial x^l} + L^h_{j_2 l} X^{l'}_h .$$

La connexion linéaire $L(L^i_{jk})$ est compatible avec une Δ^α-structure sur M si et seulement si nous avons :

$$L^{l_1}_{ul}(x) = L^{l_2}_{ul}(x) = L^{\mu}_{ul}(x) = L^{l_2}_{j_1 l}(x) = L^{\mu}_{j_1 l}(x) = L^{l_1}_{j_2 l}(x) = L^{\mu}_{j_2 l}(x) = 0,$$

$$(4.5) \qquad \forall x \in M (1 \leqslant l \leqslant n \; ; \; 1 \leqslant u \leqslant \varkappa \; ; \; \varkappa + 1 \leqslant l_\alpha \; ; \; j_\alpha \leqslant n_\alpha , \; \alpha = 1,2$$

$$n_1 + n_2 - \varkappa + 1 \leqslant \mu \leqslant n)$$

En utilisant la définition 4.3 et les relations (4.4) et (4.5) on peut démontrer sous difficultés :

Théorème 4.1. *Une connexion linéaire L sur une varieté M munie d'une Δ^α-structure s'identifie à une Δ^α-connexion, si et seulement si, elle est compatible à la Δ^α-structure donnée.*

Théorème 4.2. *La connexion symmétrique, associée à une connexion linéaire L compatible à une Δ^α-structure sur M est compatible à cette structure si et seulement si les distributions $K_\alpha \Delta^\alpha (\alpha = 1,2)$ sont involutives.*

Théorème 4.3. *Une Δ^α-structure réelle sur M est intégrable si et seulement si, il y a une connexion linéaire et symmétrique compatible à cette structure.*

BIBLIOGRAPHIE

1. Bernard, D. — *Sur la géométrie différentielle des G-structures*, Ann. Inst.Fourier, 1960 T. 10 ; 151—270
2. Cartan, E. — *La théorie des groupes finis et la géométrie différentielle traitées par la méthode de repère mobile*, Gauthier-Villars, Paris, 1937
3. Chevalley, C. — *Theory of Lie Groups*, I. Princeton, 1946
4. Gheorghiev, Gh., Oproiu, V. — *Geometrie diferențială*, București EDP, 1977
5. Kobayashi, S., Nomizu, K. — *Foundation of Differential Geometry*, vol. I, II 1963, 1969. Willey Interscience, Publ. New York, London
6. Miron, R. — *Introducere în geometrie diferențială*, vol. I, Universitatea „Al. I. Cuza"-Iași (litografiat), 1971
7. Macovei, E. — *Geometria diferențială a Δ^α-structurilor pe o varietate diferențială*, Teză de doctorat, Iași, 1980
8. Neagu, A. — *On the intersection of principal fibre subbundles*, Atti Acad. Naz. Lincei 57, 1978 ; 350—354
9. Papuc, D. — *Sur la géométrie différentielle des champs de drapeaux des variétés différentiables*. An. Univ. Timișoara, T. VI, 1968, 275—284
10. Papuc, D., Albu, A. — *Elemente de geometrie diferențială globală*. EDP, București, 1973
11. Sirocov, A. P. — *Structuri pe varietăți diferențiabile* (l. rusă) Itoghi nauk — *Algebra—Topologia—Geometria*, Moscova 1969, 127—188
12. Vrănceanu, Gh. — *Asupra invarianților intrinseci ai spațiilor neolonome*, An. Univ. București, T. II, 1956, 9—23

Reçue 8. VII.1981

Faculte de Mathématiques
Université de Iassy
6600 Iași — Roumanie

Analele științifice ale Universității „Al. I. Cuza" din Iași
Supliment la tomul XXVIII, s. I a, 1982

ON THE FIRST STRAIN-GRADIENT THEORY OF ELASTODYNAMICS

BY

D. IEȘAN

To Professor Adolf Haimovici on the occasion of his 70-th birthday

1. Introduction. The elastic energy density of non-simple bodies depends on the derivatives of the displacement vector up to the n-th order, $n > 1$ (see e.g. [1]). In the case that $n = 2$, we speak of the first strain-gradient theory. For detailed analysis of this case see [2, 3].

This paper is concerned with the boundary-initial-value problem in the first strain-gradient theory. Using the method established in [4, 5], in the first part of the paper we derive the reciprocal theorem and a variational theorem of Gurtin type. Variational theorems in the static case were established in [3]. In the second part of the paper we establish two complete solutions of the field equations for isotropic solids and derive the fundamental solution in the case of steady vibrations.

2. Preliminaries. We refer the motion of the continuum to a fixed system of rectangular Cartesian axes $Ox_i (i = 1, 2, 3)$. We shall employ the usual summation and differentiation conventions: Latin subscripts are understood to range over the integers (1, 2, 3), summation over repeated subscripts is implied and subscripts preceded by a comma denote partial differentiation with respect to the corresponding Cartesian coordinate. A superposed dot denotes partial derivation with respect to time t. We assume that the body occupies a bounded region B with Lipschitz boundary ∂B which consists of a finite number of smooth surfaces. Let γ_α be intersections of two adjointed smooth surfaces and $\Gamma = \cup \gamma_\alpha$.

Let $T = [0, t_0)$ or $[0, \infty)$, and let u and v be scalar fields on $B \times T$ that are continuous in time. We denote by $u \overset{*}{\cdot} v$ the convolution of u and v

$$[u \overset{*}{\cdot} v](x, t) = \int_0^t u(x, t - \tau) v(x, \tau) d\tau .$$

The basic equations in the linear theory of anisotropic elastic solids are [2]:

— the equations of motion

$$(2.1) \qquad \tau_{ji,j} - \mu_{sji,sj} + F_i = \rho \ddot{u}_i ,$$

— the constitutive equations

$$(2.2) \qquad \tau_{ij} = A_{ijrs} e_{rs} + B_{ijpqr} \varkappa_{pqr} ,$$

$$\mu_{ijk} = B_{rsijk} e_{rs} + C_{ijkpqr} \varkappa_{pqr} ,$$