Supliment la tomul XXVIII, s. I a, 1982
Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi

REMARQUES SUR LES POINTS FIXES COMMUNS POUR DES PAIRES DE FONCTIONS ET DE FONCTIONS MULTIVOQUES CONTRACTIVES

PAR

NICOLETA NEGOESCU

Le problème des points fixes pour des fonctions φ-contractives pour un seul opérateur sur des espaces métriques complets a été abordé pour la première fois en 1969 par Boyd et Wong [10] et le résultat principal a été inclus dans le livre de I.A. Rus [7].

Le problème des applications φ-contractives pour deux opérateurs définis sur des espaces métriques complets a été traité par Hussain et Sehgal [1] en 1975 et a été continué pour des fonctions multivoques par A.K. Sharma [9] en 1979.

Dans cette note nous nous occupons des points fixes communs à deux opérateurs définis sur des espaces métriques pour les φ-contractions, où nous avons remplacé la condition de complétitude des espaces métriques par des conditions suggérées par une note de K. Iséki [3] et nous avons généralisé ce problème pour les applications multivoques.

§ 1. Soit (X, d) un espace métrique et $T_1, T_2 : X \to X$ qui satisfont à l'inégalité :

$$(1) \qquad d(T_1 x, T_2 y) \leqslant \varphi(d(x, T_1 x), d(y, T_2 y), d(x, T_2 y), d(y, T_1 x), d(x, y))$$

pour tous $x, y \in X$, où $\varphi : R_+^5 \to R_+$ et soit (x_n) la suite construite de la manière suivante : soit $\xi \in X$ un point arbitraire et $x_1 = T_1 \xi$, $x_2 = T_2 x_1, \ldots, x_{2n-1} = T_1 x_{2n-2}$, $x_{2n} = T_2 x_{2n-1}, \ldots$. On note $d_n = d(x_n, x_{n+1})$ pour tous $n \in N$.

Proposition 1.1. *Si $T_1, T_2 : X \to X$ satisfont à la condition (1), où $\varphi : R_+^5 \to R_+$ est une fonction non décroissante en chaque variable, alors on a les inégalités :*

$$(2) \qquad d_{2k+1} \leqslant \varphi(d_{2k}, d_{2k+1}, d_{2k} + d_{2k+1}, 0, d_{2k}) \text{ et}$$

$$(3) \qquad d_{2k+2} \leqslant \varphi(d_{2k+2}, d_{2k+1}, 0, d_{2k+1} + d_{2k+2}, d_{2k+1}).$$

Démonstration. Soit :

$$d_{2k+1} = d(x_{2k+1}, x_{2k+2}) = d(T_1 x_{2k}, T_2 x_{2k+1}) \leqslant \varphi(d(x_{2k}, T_1 x_{2k}), d(x_{2k+1}, T_2 x_{2k+1}),$$

$d(x_{2k}, T_2 x_{2k+1}), d(x_{2k+1}, T_1 x_{2k}), d(x_{2k}, x_{2k+1})) \leqslant \varphi(d(x_{2k}, x_{2k+1}), d(x_{2k+1}, x_{2k+2}),$ $d(x_{2k}, x_{2k+1}) + d(x_{2k+1} x_{2k+2}), 0, d(x_{2k}, x_{2k+1}))$, c'est à dire on a (2).

De la même manière on obtient (3).

On note $\varphi_1(t)=\varphi(t, t, 2t, 0, t)$ et $\varphi_2(t)=\varphi(t, t, 0, 2t, t)$.

Proposition 1.2. *Si T_1, $T_2: X\to X$ satisfont à l'inégalité (1) où φ est une fonction nondécroissante en chaque variable et si $\varphi_1(t)<t$, $\varphi_2(t)<t$, pour tous $t>0$, alors la suite (d_n) est décroissante.*

Démonstration. En supposant qu'il existerait $k>k_0$, $k\in N$ tel que $d_{2k}<d_{2k+1}$, alors de l'inégalité (2), en employant le fait que φ est monotone, on aura :

$$d_{2k+1}\leqslant\varphi(d_{2k+1}, d_{2k+1}, 2d_{2k+1}, 0, d_{2k+1})<d_{2k+1}, \tag{4}$$

ce qui est une contradiction. Donc $d_{2k}\geqslant d_{2k+1}$.

De la même manière, en supposant qu'il existerait $k\in N$ tel que $d_{2k+1}<$ $<d_{2k+2}$, de l'inégalité (3) on aura :

$$d_{2k+2}\leqslant\varphi(d_{2k+2}, d_{2k+2}, 0, 2d_{2k+2}, d_{2k+2})<d_{2k+2}, \tag{5}$$

ce qui montre que $d_{2k+1}\geqslant d_{2k+2}$. Donc (d_n) est décroissante.

Proposition 1.3. *Si dans les conditions de la Proposition 1.2 φ_1 ou φ_2 est continue à droite pour tous $t>0$, alors la suite (d_n) est convergente à 0.*

Démonstration. La suite (d_n) est décroissante et minorée par 0 car d_n sont des distances ; il suit qu'elle est convergente. Soit $d=\lim\limits_{n\to\infty} d_n$. Evidemment $d\geqslant 0$. En supposant $d>0$, il suit, en faisant $n\to\infty$ dans l'inégalité (4) et en employant la continuité à droite de la fonction φ_1 pour tous $t>0$, que : $d\leqslant\lim\limits_{k\to\infty}\varphi_1(d_{2k+1})\leqslant\varphi_1(d)=\varphi(d, d, 2d, 0, d)<d$, ce qui est une contradiction.

Si φ_2 est continue à droite pour tous $t>0$ on obtient, en faisant $n\to\infty$ dans (5),

$$d\leqslant\lim_{k\to\infty}\varphi_2(d_{2k+2})\leqslant\varphi_2(d)=\varphi(d, d, 0, 2d, d)<d,$$

ce qui est aussi une contradiction. Donc $d=0$.

Théorème 1.1. *Soit (X, d) un espace métrique et T_1, T_2: $X\to X'$. deux opérateurs Si :*
(i) T_1, T_2 satisfont à l'inegalité (1) pour tous $x, y\in X$, où $\varphi: R_+^5\to R_+$ est une fonction non décroissante en chaque variable qui a les propriétés : $\varphi_1(t)=$ $=\varphi(t, t, 2t, 0, t)<t$, $\varphi_2(t)=\varphi(t, t, 0, 2t, t)<t$, $\varphi_3(t)=\varphi(0, t, t, 0, 0)<t$, $\varphi_4(t)=$ $=\varphi(0, 0, t, t, t)<t$ et une des fonctions φ_1 et φ_2 est continue à droite pour $t>0$,
(ii) T_1 est un opérateur continu dans un point $x_0\in X$,
(iii) il existe un point $\xi\in X$ tel que la suite (x_n), construite au commencement de la note, a une suite partielle ou une sous-suite (x_{2m_i}) convergente à x_0, alors x_0 est le point fixe commun unique pour les opérateurs T_1 et T_2.

Démonstration. Soit la suite partielle (x_{2m_i}) de (x_n) qui converge à x_0. Supposons que x_0 n'est pas un point fixe de T_1, donc $d(x_0, T_1x_0)>0$. Alors il existe un nombre $\varepsilon>0$ qui peut être fixé tel que :

$$0<\varepsilon<\frac{1}{3}d(x_0, T_1x_0). \tag{6}$$

Pour cet ε il existe un nombre entier i_0 tel que :

$$d(x_{2m_i}, x_0)<\varepsilon,\ d(T_1x_{2m_i}, T_1x_0)<\varepsilon, \text{ pour tous } i\geqslant i_0, \text{ de} \tag{7}$$

(iii) et *(ii)*. Donc pour $i\geqslant i_0$ on a :

$$d(x_0, T_1x_0)\leqslant d(x_0, x_{2m_i})+d(x_{2m_i}, T_1x_{2m_i})+d(T_1x_{2m_i}, T_1x_0).$$

En employant les inégalités (6) et (7) il suit :

$$d(x_{2m_i}, T_1x_{2m_i})\geqslant d(x_0, T_1x_0)-d(x_0, x_{2m_i})-d(T_1x_{2m_i}, T_1x_0)>3\varepsilon-\varepsilon-$$

$\varepsilon=\varepsilon$, c'est à dire :

$$d(x_{2m_i}, T_1x_{2m_i})>\varepsilon \text{ pour tous } i\geqslant i_0. \tag{8}$$

De la proposition 1.3 $d_n\to 0$ et en particulier $d_{2m_i}\to 0$. De (8) il suit que $d_{2m_i}>$ $>\varepsilon$ pour tous $i\geqslant i_0$ et de $\lim\limits_{i\to\infty} d_{2m_i}=0$, donc il existe i_1 tel que pour tout $i\geqslant i_1$ $d_{2m_i}<\varepsilon$. Alors pour tous $i>\max\{i_0, i_1\}$ il suit $\varepsilon<d_{2m_i}<\varepsilon$, ce qui est une contradiction, et montre que l'hypothèse $d(x_0, T_1x_0)>0$ est fausse et donc $d(x_0, T_1x_0)=0$, c'est à dire $x_0=T_1x_0$ et donc x_0 est un point fixe de T_1.

Pour démontrer que x_0 est aussi un point fixe de l'opérateur T_2 on suppose que $d(x_0, T_2x_0)>0$. Alors on a :

$$d(x_0, T_2x_0)=d(T_1x_0, T_2x_0)\leqslant\varphi(d(x_0, T_1x_0), d(x_0, T_2x_0), d(x_0, T_2x_0),$$
$$d(x_0, T_1x_0), d(x_0, x_0))=\varphi(0, d(x_0, T_2x_0), d(x_0, T_2x_0), 0, 0)<$$
$$<d(x_0, T_2x_0),$$

ce qui est aussi une contradiction et donc $d(x_0, T_2x_0)=0$ où $x_0=T_2x_0$, ce qui signifie que x_0 est un point fixe pour T_2. Pour démontrer l'unicité du point fixe commun, nous supposons que $y_0\in X$, $y_0\neq x_0$ est aussi un point fixe commun pour les opérateurs T_1 et T_2. Alors dans les conditions du théorème on obtient: la contradiction $d(x_0, y_0)<d(x_0, y_0)$. Il suit que $x_0=y_0$ et le point fixe commun des opérateurs T_1 et T_2 est unique.

Remarque 1.1. La condition $\varphi(t)=\varphi(t, t, t, t, t)<t$, pour tous $t>0$ implique les conditions $\varphi_3(t)<t$ et $\varphi_4(t)<t$.

Du théorème 1.1 on obtient les résultats suivants :

Théorème 1.2. *Soit (X, d) un espace métrique et T_1, $T_2: X\to X$ deux opérateurs, T_1 continu en $x_0\in X$, qui satisfont à l'inégalité $d(T_1x, T_2y)\leqslant$ $\leqslant\alpha d(x, y)$ pour tous $x, y\in X$ et $0<\alpha<1$. S'il existe un point $\xi\in X$ tel que la suite $x_1=T_1\xi$, $x_2=T_2x_1, \ldots, x_{2n-1}=T_1x_{2n-2}$, $x_{2n}=T_2x_{2n-1}, \ldots$ a une suite partielle (x_{2m_i}) convergente à x_0, alors x_0 est point fixe commun unique pour T_1 et T_2.*

Théorème 1.3. *Soit (X, d) une espace métrique et T_1, $T_2: X\to X$ deux opérateurs. Si :*

(i) $d(T_1x, T_2y)\leqslant\alpha d(x, T_1x)+\beta d(y, T_2y)+\gamma[d(x, T_2y)+d(y, T_1x)]+\delta d(x, y)$

pour tous $x, y\in X$, où α, β, γ, $\delta\geqslant 0$ et $\alpha+\beta+2\gamma+\delta<1$,

(ii) T_1 *est continu dans un point* $x_0 \in X$,

(iii) il existe un point $\xi \in X$ *tel que la suite* (x_n) *a une suite partielle* (x_{2m_i}) *convergente à* x_0, *alors* x_0 *est le point fixe unique commun pour les opérateurs* T_1, T_2.

Démonstration. Pour démontrer ce théorème, il faut démontrer que l'inégalité *(i)* de ce théorème est un cas particulier de l'inégalité (1).

En effet, en prenant $\varphi(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5) = \alpha t_1 + \beta t_2 + \gamma(t_3 + t_4) + \delta t_5$, on a :

$$\varphi_1(t) = \varphi(t, t, 2t, 0, t) = (\alpha + \beta + 2\gamma + \delta)t < t, \quad \varphi_2(t) = \varphi(t, t, 0, 2t, t) =$$
$$= (\alpha + \beta + 2\gamma + \delta)t < t,$$
$$\varphi_3(t) = \varphi(0, t, t, 0, 0) = (\beta + \gamma)t < t, \quad \varphi_4(t) = \varphi(0, 0, t, t, t) = (2\gamma + \delta)t < t.$$

Remarque 1.2. Un cas particulier du théorème 1.3 est le résultat de K. Iséki [3] qui s'énonce ainsi :

Théorème 1.4. *Soit* (X, d) *un espace métrique et* $T_1, T_2 : X \to X$ *deux opérateurs. Si :*

(i) $d(T_1x, T_2y) \leqslant \beta[d(x, T_1x) + d(y, T_2y)] + \gamma[d(x, T_2y) + d(y, T_1x)] + \alpha d(x, y)$

pour tous $x, y \in X$ *avec* $\alpha, \beta, \gamma \geqslant 0$ et $\alpha + 2\beta + 2\gamma < 1$

(ii) T_1 *est continu dans un point* $x_0 \in X$,

(iii) il existe un point $\xi \in X$ *tel que la suite* (x_n) *a une suite partielle* (x_{2m_i}) *convergente à* x_0, *alors* x_0 *est le point fixe commun unique des opérateurs* T_1 *et* T_2.

Remarque 1.3. Nous pouvons obtenir des théorèmes analogues avec les théorèmes 1.1, 1.2, 1.3, 1.4 en considérant que (x_n) a une suite partielle (x_{2m_i+1}) convergente à $x_0 \in X$ et l'opérateur T_2 est continu en x_0.

Une autre conséquence du théorème 1.1 est :

Théorème 1.5. *Soit* (X, d) *un espace métrique et* $T : X \to X$ *un opérateur. Si :*

(i) l'inégalité (1) *est satisfaite pour* $T_1 = T_2 = T$,

(ii) T *est continu dans un point* $x_0 \in X$,

(iii) il existe un point $\xi \in X$ *tel que la suite* (x_n) *a une suite partielle* (x_{m_i}) *convergente à* x_0, *alors* x_0 *est point fixe unique pour l'opérateur* T.

§ 2. Soit (X, d) un espace métrique. On note $D(x, A) = \inf\{d(x, y) : y \in A\}$ et $\mathrm{Cpt}(X)$ la famille des sousensembles nonvides, compactes de X.

Pour $A, B \in \mathrm{Cpt}(X)$ on définit $H(A, B) = \max(\sup_{x \in A} D(x, B), \sup_{y \in B} D(y, A))$, H est la métrique Hausdorff-Pompeiu induite par d sur $\mathrm{Cpt}(X)$. Alors on a les propositions suivantes :

Proposition 2.1. *Si* $A, B \in \mathrm{Cpt}(X)$ *et* $x \in A$ *alors* $D(x, B) \leqslant H(A, B)$.

Proposition 2.2. (v. S.B. Nadler Jr. [5]). *Si* $A, B \in \mathrm{Cpt}(X)$ *alors pour tout* $a \in A$ *il existe* $b \in B$ *tel que* $d(a, b) \leqslant H(A, B)$.

Soit (X, d) un espace métrique et $T_1, T_2 : X \to \mathrm{Cpt}(X)$ deux opérateurs qui satisfont à l'inégalité :

(9) $H(T_1x, T_2y) \leqslant \varphi(D(x, T_1x), D(y, T_2y), D(x, T_2y), D(y, T_1x), d(x, y))$,

pour tous $x, y \in X$, où $\varphi : R_+^5 \to R_+$ et la suite (x_n) construite de la manière suivante : soit $\xi \in X$ arbitraire et $x_1 \in T_1\xi$, $x_2 \in T_2x_1, \ldots, x_{2n-1} \in T_1x_{2n-2}$, $x_{2n} \in T_2x_{2n-1}, \ldots$ On note $d_n = d(x_n, x_{n+1})$ pour tous $n \in N$.

Proposition 2.3. *Si* $T_1, T_2 : X \to \mathrm{Cpt}(X)$ *satisfont à l'inégalité* (9), *où* φ *est une fonction nondé croissante en chaque variable, alors on a les inégalités:*

(10) $$d_{2n} \leqslant \varphi(d_{2n}, d_{2n-1}, 0, d_{2n-1} + d_{2n}, d_{2n-1}),$$

(11) $$d_{2n+1} \leqslant \varphi(d_{2n}, d_{2n+1}, d_{2n} + d_{2n+1}, 0, d_{2n}).$$

Démonstration. Pour tout point $x_1 \in T_1\xi$ il existe un point $x_2 \in T_2x_1$, de la proposition 2.2, tel que $d(x_1, x_2) \leqslant H(T_1\xi, T_2x_1)$. Cela assure le choix d'une suite (x_n) telle que $x_{2n-1} \in T_1x_{2n-2}$, $x_{2n} \in T_2x_{2n-1}$, $n \in N$ et $d(x_{2n-1}, x_{2n}) \leqslant H(T_1x_{2n-2}, T_2x_{2n-1})$, $d(x_{2n}, x_{2n+1}) \leqslant H(T_2x_{2n-1}, T_1x_{2n})$. Alors de (9) il suit :

$$d_{2n} \leqslant H(T_1x_{2n}, T_2x_{2n-1}) \leqslant \varphi(D(x_{2n}, T_1x_{2n}), D(x_{2n-1}, T_2x_{2n-1}), D(x_{2n}, T_2x_{2n-1}),$$
$$D(x_{2n-1}, T_1x_{2n}), d(x_{2n-1}, x_{2n})) \leqslant \varphi(d_{2n}, d_{2n-1}, 0, d_{2n-1} + d_{2n}, d_{2n-1})$$

et donc il suit (10).

De la même manière on démontre l'inégalité (11).

On note $\varphi_1(t) = \varphi(t, t, 2t, 0, t)$ et $\varphi_2(t) = \varphi(t, t, 0, 2t, t)$.

Proposition 2.4. *Si les opérateurs* $T_1, T_2 : X \to \mathrm{Cpt}(X)$ *satisfont à: l'inégalité* (9) *où* φ *est une fonction non-décroissante en chaque variable et si* $\varphi_1(t) < t$; $\varphi_2(t) < t$ *pour tous* $t > 0$, *alors la suite* (d_n) *est décroissante.*

Démonstration. Si on suppose qu'il existerait $n \in N$ tel que $d_{2n-1} < d_{2n}$, alors, des hypothèses sur φ, il suit : $d_{2n} \leqslant \varphi(d_{2n}, d_{2n}, 0, 2d_{2n}, d_{2n}) < d_{2n}$, ce qui est une contradiction. Donc $d_{2n} \leqslant d_{2n-1}$. De la même manière on obtient $d_{2n+1} \leqslant d_{2n}$. Il suit que (d_n) est une suite décroissante.

Proposition 2.5. *Si dans les conditions de la proposition* 2.4 *une des fonctions* φ_1 *et* φ_2 *est continue à droite pour tous* $t > 0$, *alors* (d_n) *est convergente à zéro.*

Démonstration. La suite (d_n) étant décroissante et minorée par 0, car d_n sont des distances, alors elle est convergente. Soit $d = \lim_{n \to \infty} d_n$ et alors $d \geqslant 0$. En supposant $d > 0$, en faisant $n \to \infty$ dans (10) et en employant la continuité à droite de la fonction φ_2 pour tous $t > 0$, il suit que :

$d \leqslant \lim_{n \to \infty} \varphi_2(d_n) = \varphi_2(d) = \varphi(d, d, 0, 2d, d) < d$, une contradiction. Donc $d = 0$.

On peut obtenir le même résultat en faisant $n \to \infty$ dans (11) et en employant la continuité à droite de φ_1.

Théorème 2.1. *Soit* (X, d) *un espace métrique et* $T_1, T_2 : X \leftarrow \mathrm{Cpt}(X)$ *deux opérateurs. Si :*

(i) T_1, T_2 *satisfont à l'inégalité* (9) *pour tous* $x, y \in X$, *où* $\varphi : R_+^5 \to R_+$ *est une fonction nondécroissante en chaque variable avec le propriétés :* $\varphi_1(t) =$

$=\varphi(t, t, 2t, 0, t)<t$, $\varphi_2(t)=\varphi(t, t, 0, 2t, t)<t$, $\varphi_3(t)=\varphi(0, t, t, 0, 0)<t$, φ_2 *continue à droite pour tous* $t>0$,

(*ii*) T_1 *est un opérateur continu en un point* $x_0 \in X$,

(*iii*) *il existe un point* $\xi \in X$ *tel que la suite* (x_n) *a une suite partielle* (x_{2m_i}) *convergente à* x_0, *alors* x_0 *est un point fixe commun pour les opérateurs* T_1 *et* T_2.

Démonstration. Soit la suite partielle (x_{2m_i}) convergente à x_0. Supposons que x_0 n'est pas un point fixe de l'opérateur T_1. Alors $D(x_0, T_1x_0)>0$. Donc il existe un $\varepsilon>0$ qui peut être fixé tel que :

$$0<\varepsilon<\frac{1}{3}D(x_0, T_1x_0). \tag{12}$$

Pour cet $\varepsilon>0$ il existe un nombre entier k_0 tel que :

(13) $d(x_{2m_k}, x_0)<\varepsilon$, $H(T_1x_{2m_k}, T_1x_0)<\varepsilon$ pour tous $k\geqslant k_0$, de (*ii*) et (*iii*). Pour $k>k_0$, en employant la définition de $D(x, A)$ et les propositions 2.1, 2.2, on a :

$$D(x_0, T_1x_0)\leqslant d(x_0, x_{2m_k})+d(x_{2m_k}, x_{2m_k+1})+H(T_1x_{2m_k}, T_1x_0).$$

Alors de (12) et (13) il suit :

$$d(x_{2m_k}, x_{2m_k+1})\geqslant D(x_0, T_1x_0)-d(x_0, x_{2m_k})-H(T_1x_{2m_k}, T_1x_0)>3\varepsilon-$$

$-\varepsilon-\varepsilon=\varepsilon$ et donc pour tous $k>k_0$ on trouve :

$$d(x_{2m_k}, x_{2m_k+1})>\varepsilon. \tag{14}$$

Mais $d_{2m_k}\to 0$ (v. proposition 2.5), c'est à dire $d_{2m_k}<\varepsilon$ pour $k\geqslant k_1$. Alors pour $k\geqslant \max(k_0, k_1)$ nous avons $\varepsilon<d_{2m_k}<\varepsilon$ ce qui est une contradiction. Donc $D(x_0, T_1x_0)=0$ et $x_0\in T_1x_0$, c'est à dire x_0 est un point fixe de l'opérateur T_1.

De la même manière, en supposant que $D(x_0, T_2x_0)>0$ et en employant la proposition 2.1, l'inégalité (9) et les propriétés des fonctions φ et φ_3, on démontre que x_0 est aussi un point fixe de l'opérateur T_2.

Du théorème 2.1 on obtient les résultats suivants :

Théorème 2.2. *Soit* (X, d) *un espace métrique et* $T_1, T_2: X\to \mathrm{Cpt}(X)$ *deux opérateurs,* T_1 *continu en* $x_0\in X$, *qui satisfont à l'inégalité :*

$$H(T_1x, T_2y)\leqslant q \max D(x, T_1x),\ D(y, T_2y),\ D(x, T_2y),\ D(y, T_1x),$$
$$d(x, y)),\ 0<q<1, \text{ pour tout } x, y\in X.$$

S'il existe $\xi\in X$ *tel que la suite* (x_n) *a une suite partielle* (x_{2m_k}) *convergente à* x_0, *alors* x_0 *est un point fixe commun pour les opérateurs* T_1, T_2.

Le théorème suivant, qui suit aussi du théorème 2.1, est une généralisation du théorème de Hardy et Rogers [2] pour des fonctions multivoques et une généralisation du théorème de K. Iséki [3] pour les fonctions (v. 1.4.).

Théorème 2.3. *Soit* (X, d) *un espace métrique et* $T_1, T_2: X\to \mathrm{Cpt}(X)$ *deux opérateurs. Si :*

(*i*) $H(T_1x, T_2y)\leqslant \alpha D(x, T_1x)+\beta D(y, T_2y)+\gamma[D(x, T_2y)+$
$+D(y, T_1x)]+\delta d(x, y)$ *pour tous* $x, y\in X$, *où* $\alpha, \beta, \gamma, \delta\geqslant 0$, $\alpha+\beta+2\gamma+\delta<1$,

(*ii*) T_1 *est continu dans un point* $x_0\in X$,

(*iii*) *il existe un point* $\xi\in X$ *tel que la suite* (x_n) *a une suite partielle* (x_{2m_k}) *convergente à* x_0, *alors* x_0 *est un point fixe commun pour les opérateurs* T_1, T_2.

Remarque 2.1. Nous pouvons obtenir des théorèmes analogues aux théorèmes 2.1, 2.2, 2.3 en considérant que la suite (x_n) a une suite partielle (x_{2m_k+1}) convergente à x_0 et l'opérateur T_2 est continu dans le point x_0.

Une autre conséquence du théorème 2.1 est le résultat suivant :

Théorème 2.4. *Soit* (X, d) *un espace métrique et* $T: X\to \mathrm{Cpt}(X)$ *un opérateur. Si :*

(*i*) *l'inégalité* (9) *est satisfaite pour* $T_1=T_2=T$,

(*ii*) T *est continu dans un point* $x_0\in X$,

(*iii*) *il existe un point* $\xi\in X$ *tel que la suite* (x_n) *a une suite partielle* (x_{m_k}) *convergente à* x_0, *alors* x_0 *est un point fixe pour l'opérateur* T.

BIBLIOGRAPHIE

1. Hussain, S. A., Sehgal, V. M. — *On common fixed points of family of mappings*, Bull. Austral Math. Soc., 13 (1975), 261–267
2. Hardy, G. E., Rogers, T. D. — *A generalization of a fixed point theorem of Reich*, Canad. Math. Bull. 16 (2) 1973, 201–206
3. Iséki, K. — *On a common fixed point theorem P*, Math. Sem. Notes, Vol. 3 (1975) 55–58
4. Istrăţescu, V. — *Introducere în teoria punctului fix*, Ed. Academiei, Bucureşti, 1973 p. 112
5. Nadler Jr., S. B. — *Multivalued contraction mappings*, Pacific. J. of Math., 30 (1969), 475–488
6. Rus, I. A — *Fixed point theorem for multivalued mappings in complete metric spaces*, Math. Japon. Vol. 20 (1975), 21–24
7. Rus, I. A. — *Principii şi aplicaţii ale teoriei punctului fix*. Ed. Dacia 1979, p. 79.1.3
8. Rus, I. A. — *An iterative method for the solution of the equation* $x=f(x, x, \ldots, x)$. *L'analyse numérique et la théorie de l'approximation*, 1980
9. Sharma, A. K. — *Common fixed points of set-valued maps*, Bull. de L'Acad. Polon de Sciences, Vol XXVII 5 (1979), 407–412
10. Boyd, D. W., Wong, J. S. W. — *On nonlinear contractions*. Proceed. A. M. S. 20 (1969), 458–464

Reçue le 5. VIII. 1981

Institut Politechnique,
Chaire de Mathématiques
6600 Jassy — Roumanie