Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi
Supliment la tomul XXVIII, s. I a, 1982

SUITES ET SERIES DE MULTI-APPLICATIONS ANALYTIQUEMENT CONVERGENTES

PAR

ALEXANDRU SABADÎŞ

§1. **Introduction.** Soit Y un ensemble quelconque et $P(Y)$ la famille de ses parties. On sait que $(P(Y), \subseteq)$ est un treillis complet.

Dans [1], on a défini quelques notions que nous allons utiliser pour introduire la notion de convergence analytique des suites et des séries de multi-applications.

§2. **Suites de multi-applications analytiquement convergentes.** Soient X et Y deux ensembles quelconques et (X, Y, F_n), $n \in N$, une suite de multi-applications définies sur X à valeurs dans Y; dans ce qui suit nous allons indiquer cette suite par, (F_n).

Les images des multi-applications de cette suite forment une famille de suites d'ensembles $\{F_n(x) : x \in X\}$.

Définition 1. (a) *Un point $x \in X$ s'appelle point de convergence analytique de la suite (F_n), si $(F_n(x))$ est analytiquement convergente en $P(Y)$.*

b) *L'ensemble C, des points de convergence analytique de la suite de multi-applications, (F_n), s'appelle ensemble de convergence.*

Donc, à chaque point $x \in C$, il correspond un ensemble de Y, la limite analytique de la suite de multi-applications, dans x, $x \to (a)\text{-}\lim_n F_n(x)$. On va noter par F la multi-application $(C, Y, (a)\text{-}\lim_n F_n)$. On dit que F est la limite analytique sur C de la suite (F_n), et nous allons noter ce fait par, $F_n \xrightarrow[C]{(a)} F$, ou $(a)\text{-}\lim_n F_n = F$ sur C.

Définition 2. *La suite, (F_n), qui est analytiquement convergente à $\emptyset$, pour tout $x \in X$, s'appelle „$\emptyset$ — suite"; dans ce cas son (a)-limite est, par définition, la multi-application identiquement vide.*

Exemple. Soit la suite de multi-applications (R^k, R^k, F_n) définies par $F_n(x) = \left\{y \in R^k : \|y - x\| < \frac{1}{n}\right\} - \{x\}$. On voit bien qu'on a la relation, $(a)\text{-}\lim_n F_n(x) = \emptyset$, pour tout $x \in R^k$. Donc, son (a)-limite sur R^k est la multi-application identiquement vide.

Définition 3. *On dit que la suite (F_n) est analytiquement Cauchy sur X si pour tout $x \in X$, il existe une suite d'ensembles $(D_n^x) \subset P(Y)$, $D_n^x \downarrow \emptyset$, et $n_0 \in N$ tels que $F_{n+p}(x) \Delta F_n(x) \subseteq D_x^n$, $\geqslant$ pour tout $n \geqslant n_0$ et $p \geqslant 1$.*

Vu que chaque suite d'ensembles analytiquement Cauchy, est analytiquement convergente en $P(Y)$ et réciproquement, on peut formuler la proposition suivante dont la démonstration est immédiate (Voir [2]).

Proposition 1. *La suite (F_n) est analytiquement convergente sur X si et seulement si la suite d'ensembles $(F_n(x))$ est analytiquement Cauchy, pour tout $x \in X$.*

Définition 4. *On dit que la suite (F_n), est (a)-uniformément convergente vers F, sur X, s'il existe une suite d'ensembles $(D_n) \subset P(Y)$, $D_n \downarrow \emptyset$, et $n_0 \in N$ tels que $F_n(x) \Delta F(x) \subseteq D_n$, $\forall x \in X$ et $n \geqslant n_0$.*

La proposition suivante donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite (F_n) soit (a)-uniformément convergente sur X.

Proposition 2. *Soit la suite de multi-applications, (F_n). S'il existe une suite $(D_n) \subset P(Y)$, $D_n \downarrow \emptyset$, et $n_0 \in N$, tels que $F_{n+p}(x) \Delta F_n(x) \subseteq D_n$, $\forall n \geqslant n_0$, $p \geqslant 1$ et $x \in X$, alors la suite (F_n) est (a)-uniformément convergente sur X, et réciproquement.*

Démonstration. Par hypothèse, $F_n(x)$ est une suite analytiquement Cauchy pour tout $x \in X$, donc il existe une multi-application, (X, Y, F) telle que $(a)\text{-}\lim\limits_n F_n = F$. Pour montrer la (a)-convergence de type uniforme, on suppose dans la relation de l'hypothèse, $n \geqslant n_0$, fixé. Alors, on a $F_{n+p}(x) \Delta F_n(x) \leq D_n$, $\forall (x, p) \in X \times N$. On a aussi :

$$(a)\text{-}\lim_p [F_{n+p}(x) \Delta F_n(x)] = F_n(x) \Delta [(a)\text{-}\lim_p F_{n+p}(x)] = F_n(x) \Delta F(x) \subseteq D_n, \ \forall x \in X,$$

d'où il résulte que la suite (F_n) est (a)-uniformément convergente vers F.

La réciproque est immédiate, compte tenu de la relation

$$F_{n+p}(x) \Delta F_n(x) \subseteq [F_{n+p}(x) \Delta F(x)] \cup [F(x) \Delta F_n(x)], \ \forall (n, p) \in N^2.$$

(Il faut remarquer la relation entre les propositions 1 et 2).

Proposition 3. *Soit la suite de multi-applications (X, Y, F_n). Si l'ensemble X est fini, alors la convergence analytique simple est équivalente à la convergence (a)-uniforme.*

Démonstration. Soit $X = x_i \{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$. Pour x_i, $i = \overline{1, p}$, il existe $(D_n^{x_i}) \subset P(Y)$, $D_n^{x_i} \downarrow \emptyset$, $n \to \infty$, et $n_0^i \in N$ tels que $F_n(x_i) \ \Delta F(x_i) \subseteq D_n^{x_i}$, $\forall n \geqslant n_0^i$. On note $D_n = \bigcup\limits_{i=1}^{p} D_n^{x_i}$, $n_0 = \max\limits_i \{n_0^i\}$ et on a $F_n(x) \Delta F(x) \subseteq D_n$, $\forall n \geqslant n_0$, $D_n \downarrow \emptyset$. Donc, la convergence analytique simple implique la convergence (a)-uniforme. La réciproque étant toujours vraie, le théorème est démontré.

Proposition 4. *Soient les suites de multi-applications (X, Y, F_n), (X, Y, G_n) et la multi-application (X, Y, F). S'il existe un indice $n_0 \in N$ tel que $F_n(x) \Delta F(x) \subseteq G_n(x)$, $\forall n \geqslant n_0$ et $x \in X$, alors la (a)-convergence uniforme à $\emptyset$, de la suite (G_n), implique la (a)-convergence uniforme à F, de la suite (F_n).*

Démonstration. On a : $\left[G_n \xrightarrow[X]{(a)\text{-unif.}} \emptyset\right] \Leftrightarrow [\exists (D_n) \subset P(Y)$, $D_n \downarrow \emptyset$, et $n_0 \in N$, tels que $G_n(x) \subseteq D_n$, $\forall n \geqslant n_0$ et $x \in X]$.

Vu l'hypothèse et la définition 4, on a $F_n \xrightarrow[X]{(a)\text{-unif.}} F$.

Proposition 5. *Soit $\mathcal{C} \subset P(Y)$ un clan Cauchy et $m : \mathcal{C} \to [0, +\infty)$ une mesure sur Y. Si (F_n), où $F_n(x) \in \mathcal{C}$, $\forall (n, x) \in N \times X$, est une suite de multi-applications, (a)-convergente sur X vers la multi-application F, où $F(x) \in \mathcal{C}$, $\forall x \in X$, alors la suite de fonctions, $(X, [0, +\infty), m \circ F_n)$, est simplement convergente sur X et on a $\lim\limits_n (m \circ F_n)(x) = m(F(x))$, pour tout $x \in X$.*

Démonstration. Par hypothèse on a, $(a)\text{-}\lim\limits_n F_n(x) = F(x)$, $\forall x \in X$. La suite numérique $(m(F_n(x)))$ est convergente quel que soit $x \in X$, et on a la relation $\lim\limits_n (m \circ F_n)(x) = m((a)\text{-}\lim\limits_n F_n(x)) = m(F(x))$, (voir [1], th. 5). La démonstration est achevée.

Corollaire. *Si la suite (F_n) est (a)-uniformément convergente à F, sur X, alors la suite de fonctions $(m \circ F_n)$ est uniformément convergente à $m \circ F$ sur X.*

Démonstration. Par hypothèse il existe une suite $(D_n) \subset \mathcal{C}$, $D_n \downarrow \emptyset$, et un indice, $n_0 \in N$, tels que $F_n(x) \Delta F(x) \subseteq D_n$, $\forall n \geqslant n_0$ et $x \in X$. Il résulte $F_n(x) \setminus F(x) \subseteq D_n$ et $F(x) \setminus F_n(x) \subseteq D_n$, d'où,

$$|(m \circ F_n)(x) - (m \circ F)(x)| = |m(F_n(x)) - m(F(x))| \leqslant m(D_n), \ \forall n \geqslant n_0 \text{ et } \forall x \in X.$$

Puisque la suite numérique $(m(D_n))$ converge vers zéro, la suite de fonctions $(m \circ F_n)$ est uniformément convergente à $m \circ F$ sur X.

Remarque. Evidemment, on arrive à la même conclusion que dans la proposition 5, si on suppose que la suite considérée est analytiquement Cauchy.

Proposition 5. *Soient $\mathcal{C} \subset P(Y)$ un clan et $m : \mathcal{C} \to [0, +\infty)$ une mesure sur Y. Une suite de multi-applications (X, Y, F_n), où $F_n(X) \in \mathcal{C}$, $\forall (n, x) \in N \times X$, s'appelle m-convergente sur X si la suite numérique $(m(F_n(x)))$ est convergente pour tout $x \in X$.*

Remarque. Vu les propositions précédentes, on a le schema :

[(a)-Uniforme convergence] $\Rightarrow$ [(a)-convergence] $\Rightarrow$ [m-convergence].

§3. Séries de multi-applications analytiquement convergentes. Nous allons concevoir des séries de multi-applications définies sur X à valeurs dans Y. À ce but, on va considérer une suite de multi-applications $(X, Y, F_n)_n$ et on va lui attacher une autre suite, (X, Y, S_n), définie par $S_n = \bigcup\limits_{k=1}^{n} F_k$, $\forall n \in N$.

Pour chaque $x \in X$, $(S_n(x))$ est une suite d'ensembles convergente dans le sens classique à un ensemble de $P(Y)$ parcequ'elle est ascendante. Par suite, on peut dire qu'on a défini une série de multi-applications convergente au sens classique sur X vers une multi-application (X, Y, S), où $S(x) = \lim\limits_n S_n(x)$, $\forall x \in X$. On va noter, $\bigcup\limits_1^{\infty} F_n \xrightarrow[X]{\text{classique}} S$.

Nous nous proposons d'étudier le cas lorsque la convergence classique n'implique pas, généralement, la convergence analytique. Ce fait a lieu dans un clan.

On va noter dorénavant par $\mathcal{C} \subset P(Y)$, un clan Cauchy, c'est-à-dire un clan qui a la propriété que chaque suite Cauchy de ses éléments a une limite analytique appartenante à $\mathcal{C}$. On rappelle que chaque tribe est un clan Cauchy, la réciproque n'étant pas vraie.

Définition 6. *Soit (X, Y, F_n) une suite de multi-applications, où $F_n(x) \in \mathcal{C}$ pour tout $(n, x) \in N \times X$.*

a) *Une série de multi-applications est analytiquement convergente au point $x \in X$, si la suite d'ensembles, $(S_n(x)) = (\bigcup_{k=1}^{n} F_k(x))$, est analytiquement convergente à un ensemble $S(x) \in \mathcal{C}$. On met, par définition, $\bigcup_1^\infty F_n(x) \overset{(a)}{=} S(x)$.*

b) *Une série de multi-applications est analytiquement convergente au l'ensemble $C \subseteq X$ si pour tout $x \in C$, il existe $(a)\text{-}\lim_n S_n(x) = S(x)$. La multi-application (C, Y, S) définie de cette manière s'appelle somme, dans le sens analytique, de la série, $\bigcup_1^\infty F_n$, sur C.* On indique cette situation par, $\bigcup_1^\infty F_n \overset{(a)}{\underset{C}{=}} S$.

Proposition 6. *Soit la suite de multi-applications (X, Y, F_n), où $F_n(x) \in \mathcal{C} \subset (PY)$, $\forall (n, x) \in N \times X$.*

La série, $\bigcup_1^\infty F_n$, est analytiquement convergente sur X vers une multi-application (X, Y, S) si et seulement si pour tout $x \in X$ il existe une suite d'ensembles $(R_n^x) \subset \mathcal{C}$, telle que :

a) $$R_n^x \downarrow \emptyset, \ n \to \infty.$$

b) $$R_n^x - R_{n+1}^x = F_{n+1}(x) - \bigcup_{k=1}^{n} F_k(x), \ \forall n \in N.$$

En appliquant le théorème 4 de [1], en chaque point de X, la démonstration est tout-à-fait immédiate. Nous allons mentionner certaines résultats concernant les séries de multi-applications. Les deux propositions suivantes sont des consequences de la proposition 6. (Voir [1], §3, les corollaires 2 et 3).

Proposition 7. *Soit la suite de multi-applications (X, Y, F_n), avec la propriété $F_n(x) \in \mathcal{C}$, $\forall (n, x) \in N \times X$. La série, $\bigcup_1^\infty F_n$, est analytiquement convergente sur X vers la multi-application S, où $S(x) \in \mathcal{C}$, pour tout $x \in X$, si et seulement s'il existe pour tout $x \in X$, une suite d'ensembles $(R_n^x) \subset \mathcal{C}$, qui vérifie les conditions (a) et (b) de la proposition 6.*

Proposition 8. *Soient l'espace métrique Y et (X, Y, F_n) une suite de multi-applications avec les propriétés, $F_n(x) \in \mathcal{C}$ et diam $(F_n(x)) < \infty$, $\forall (n, x) \in N \times X$. La série, $\bigcup_1^\infty F_n$, est analytiquement convergente sur X vers une multi-application S, où $S(x) \in \mathcal{C}$ et diam $(S(x)) < \infty$, $\forall x \in X$, si et seulement s'il existe, pour tout $x \in X$, une suite $(R_n^x) \subset \mathcal{C}$, avec diam $(R_n^x) < \infty$, $\forall n \in N$, telle que les conditions (a) et (b) de la proposition 6 soient vérifiées.*

Définition 7. *Une série, $\bigcup_1^\infty F_n$, de multi-applications définies sur X à valeurs dans Y, s'appelle (a)-uniformément convergente sur X vers la multi-application S, si la suite de ses sommes partielles, (S_n), est (a)-uniformément convergente sur X vers S.*

En utilisant les définitions de §2 on démontre aisément les deux propositions suivantes.

Proposition 9. *Soit $\bigcup_1^\infty F_n$ une série de multi-applications définies sur X à valeurs dans Y avec la propriété, $F_n(x) \in \mathcal{C}$, $\forall (n, x) \in N \times X$. Elle est (a)-uniformément convergente sur X vers la multi-application (X, Y, S) où $S(x) \in \mathcal{C}$, $\forall x \in X$, si et seulement s'il existe une suite d'ensembles $(D_n) \subset \mathcal{C}$, indépendente de x, descendante vers l'ensemble vide et un indice $n_0 \in N$, tels que $\bigcup_1^n F_k(x) \Delta S(x) \subseteq D_n$, pour tout $x \in X$ et $n \geqslant n_0$.*

Proposition 10. *Soit, $\bigcup_1^\infty F_n$, une série de multi-applications définies sur X à valeurs dans Y avec la propriété, $F_n(x) \in \mathcal{C}$, $\forall (n, x) \in N \times X$. Elle est (a)-uniformément convergente sur X si et seulement s'il existe une suite d'ensembles $(D_n) \subset \mathcal{C}$, indépendente de x, descendante à l'ensemble vide et un indice $n_0 \in N$, tels que pour tout $x \in X$ et $m \geqslant n \geqslant n_0$ on a la relation, $S_m(x) \Delta \Delta S_n(x) \subseteq D_n$. ($(S_n)$ indique la suite des sommes partielles de la série donnée).*

La démonstration est tout-à-fait immédiate, en appliquant la proposition 2 de §2, à la suite (S_n).

Proposition 11. *Soient les séries $\bigcup_1^\infty F_n$ et $\bigcup_1^\infty G_n$, de multi-applications définies sur X à valeurs dans Y, où $F_n(x) \in \mathcal{C}$ et $G_n(x) \in \mathcal{C}$, $\forall (n, x) \in N \times X$. Si on a :*

a) *$\bigcup_1^\infty G_n$ est (a)-uniformément convergente sur X,*

b) *$F_n(x) \subseteq G_n(x)$, pour tout $x \in X$ et $n \in N$.*

c) *$F_m(x) \cap F_n(x) = G_m(x) \cap G_n(x)$, pour tout $(m, n) \in N^2$ et $x \in X$, alors la série, $\bigcup_1^\infty F_n$, est (a)-uniformément convergente sur X.*

Démonstration. On note $S_n = \bigcup_{k=1}^{n} F_k$ et $S_n^1 = \bigcup_{i=1}^{n} G_i$. En vertu de (b), $S_n(x) \subseteq S_n^1(x)$ pour tout $x \in X$ et $n \in N$. De plus on a :

$$S_m(x) \cap S_n(x) = \left(\bigcup_{k=1}^{m} F_k(x)\right) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i(x)\right) = \bigcup_{k=1}^{m} \bigcup_{i=1}^{n} F_k(x) \cap F_i(x) = \bigcup_{k=1}^{m} \bigcup_{i=1}^{n} G_k(x) \cap$$

$\cap G_i(x) = S_m^1(x) \cap S_n^1(x)$, $\forall x \in X$ et $\forall (m, n) \in N^2$. Il résulte, maintenant, que $S_m(x) \Delta S_n(x) = S_m(x) \cup S_n(x) - S_m(x) \cap S_n(x) \subseteq S_m^1(x) \cup S_n^1(x) - S_m^1(x) \cap S_n^1(x) = S_n^1(x) \Delta S_m^1(x)$, $\forall x \in X$ et $\forall (m, n) \in N^2$. Vu l'hypotèse (a), il résulte la (a)-uniformément convergence de la série $\bigcup_1^\infty F_n$, sur X.

Proposition 12. *Soient $\bigcup_1^\infty F_n$, une séries de multi-applications définies sur X à valeurs dans Y, où $F_n(x) \in \mathcal{C}$, $\forall (n, x) \in N \times X$, et $\bigcup_1^\infty A_n$ une série d'ensembles appartenants à $\mathcal{C}$, analytiquement convergente. Si on a les conditions :*

a) *$F_n(x) \subseteq A_n$, $\forall (n, x) \in N \times X$.*

b) *$F_m(x) \cap F_n(x) = A_m \cap A_n$, pour tout $x \in X$ et $(m, n) \in N^2$, alors, la série, $\bigcup_1^\infty F_n$, est (a)-uniformément convergente sur X.*

La démonstration est la même que celle de la proposition 11.

Définition 8. *Une série,* $\bigcup_1^\infty F_n$, *qui satisfait aux propriétés* (*a*) *et* (*b*) *de la proposition* 12, *s'appelle* (*a*)-*normalement convergente sur* X.

Proposition 13. *Soient* $\mathcal{C} \subset P(Y)$ *un clan Cauchy, et* $m: \mathcal{C} \to [0, +\infty)$ *une mesure sur* Y. *On considère une série de multi-applications définies sur* X *à valeurs appartenant à* $\mathcal{C}$, $\bigcup_1^\infty F_n$. *Si elle est analytiquement convergente sur* X *vers la somme* (X, Y, S), *alors la série des fonctions* $\sum_1^\infty m \circ F_n$, *est simplement convergente sur* X *et on a,* $\sum_1^\infty (m \circ F_n)(x) = m\left(\bigcup_1^\infty F_n(x)\right) = m(S(x))$.

Démonstration. Par hypothèse, la suite, (S_n), des sommes partielles de la série, $\bigcup_1^\infty F_n$, est analytiquement convergente sur X. Selon la proposition 5 du §2, on peut écrire : $\lim_n (m \circ S_n)(x) = m((a) - \lim_n S_n(x)) = m(S(x))$, pour tout $x \in X$, ce qui achève la démonstration.

Corollaire, *Si, de plus, la série* $\bigcup_1^\infty F_n$ *est* (*a*)-*uniformément convergente sur* X, *alors la série,* $\sum_1^\infty m \circ F_n$, *est uniformément convergente sur* X.

Démonstration. Par hypothèse il existe une suite d'ensembles $(D_n) \subset \mathcal{C}$ $D_n \downarrow \emptyset$, et un indice $n_0 \in N$, tels que $S_n(x) \Delta S(x) \subseteq D_n$, $\forall n \geqslant n_0$ et $\forall x \in X$. Il résulte, $S_n(x) \setminus S(x) \subseteq D_n$ et $S(x) \setminus S_n(x) \subseteq D_n$, d'où $| m(S_n(x)) - m(S(x))] \leqslant m(D_n)$, $\forall x \in X$ et $n \geqslant n_0$. Donc, on a : $| (m \circ F_1)(x) + (m \circ F_2)(x) + \ldots + (m \circ F_n)(x) - m(S(x)) | = | m(F_1(x) \cup F_2(x) \cup \ldots \cup F_n(x)) - m(S(x)) | = |m(S_n(x)) - m(S(x)) \leqslant m(D_n)$, $\forall n \geqslant n_0$ et $\forall x \in X$. Puisque la suite numérique $(m(D_n))$ converge à zéro, la suite de fonctions $(m \circ S_n)$ est uniformément convergente à $m \circ S$ sur X.

Définition 9. *Soit* $\mathcal{C} \subset P(Y)$ *un clan Cauchy et* $m: \mathcal{C} \to [0, +\infty)$, *une mesure sur* Y. *Une série de multi-applications,* $\bigcup_1^\infty F_n$, *avec* $F_n(x) \in \mathcal{C}$, $\forall (n, x) \in N \times X$, *s'appelle* m-*convergente sur* X, *si la série numérique* $\sum_1^\infty (m \circ F_n)(x)$ *est convergente pour tout* $x \in X$.

BIBLIOGRAPHIE

1. Ney, A. — *Contributions à la théorie de la convergence des suites et des série d'ensembles dans* $P(E)$, I^e, Mathématica, 13, (36), 1, 127–139 (1971)
2. Ney, A. — *Contributions à la théorie de la convergence des suites et des série d'ensembles dans* $P(E)$, IIe, Mathématica, 14, (37), 2, 275–286 (1972)

Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi
Supliment la tomul XXVIII, s. I a, 1982

CONDITIONAL STABILITY OF ASYMPTOTICALLY SELF p-INVARIANT SETS

BY

OLUSOLA AKINYELE

1. Introduction. In [1], the concept of self-p-invariance of a set relative to a differential system was introduced, generalizing the notion of self-invariance and consequently, weaker notions of q-stability of the set arose naturally. However, in many concrete problems, the stability of sets that are not self-invariant are usually considered and the concept of asymptotically self invariant sets which form a special subclass of self invariant sets, has been used to describe such situations [3–6]. Naturally one may wish to consider stability of sets which are not self p-invariant as defined in [1]. The weaker concept of q-stability introduced in [1] assumes the existence of a self p-invariant set relative to the differential system and therefore results obtained become inadequate if we wish to consider stability properties of sets which are not self p-invariant.

In order to cope with the situations described above, we introduce in this paper, the new concept of asymptotically self p-invariance of a set. We then carry out investigations of q-conditional stability properties with respect to this kind of invariant sets, which are naturally weaker stability properties than one obtains in [1].

2. Basic definitions. Let R^n, R^m be the Euclidean n-space and m-space respectively and suppose $\Phi \in C(R^n, R^m)$ - the space of continuous functions from R^n into R^m. We define

$$\| \Phi(x) \| = \left[\sum_{i=1}^m \Phi_i^2(x) \right]^{1/2}.$$

Define $B = \{x \in R^n : \| \Phi(x) \| = 0\}$, $S(B, \varepsilon) = \{x \in R^n : \| \Phi(x) \| < \varepsilon\}$, and $\overline{S(B, \varepsilon)} = \{x \in R^n : \| \Phi(x) \| \leqslant \varepsilon\}$.

We shall consider the differential system

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad x(t_0) = x_0 \tag{1}$$

where $f \in C(R^+ \times S(B, \rho), R^n)$, $\rho > 0$. Here R^+ is the non-negative real line, B a subset of R^n and $C(R^+ \times S(B, \rho), R^n)$ is the class of continuous functions from $R^+ \times S(B, \rho)$ into R^n.