Tant ε, que ρ permettent le transfert de la structure de K-algèbre des co-domaines sur le domaine K^n. Ainsi, la multiplication en K^n, $*: K^n \times K^n \to K^n$, peut être définie par n'importe laquelle des égalités suivantes valables pour a, $b \in K^n$ arbitraires :

$$a * b = \varepsilon^{-1}(\varepsilon(a)\varepsilon(b)), \quad a * b = \varphi^{-1}(\varphi(a) \circ \varphi(b)).$$

Nous rappelons que la première acception pour $*$ illustre la technique usuelle de calcul, alors que la deuxième description, c'est-à-dire

$$(\forall a)\underset{a,b \in K^n}{(\forall b)}((a*b)[T] = a[T](b)[T] = a[T] \circ b[T]).$$

„internalise" l'opération $*$. De cette manière, K-espace vectoriel K^n doté de $*$ devient une K-algèbre comutative et, en plus, nous avons $(\forall a)\underset{a,b \in K^n}{(\forall b)}$ $(a[T](b) = b[T](a))$.

Ensuite, cette deuxième acception de l'opération $*$ facilite la mise en évidence de la structure booléene de l'ensemble des codes cycliques. Dans ce but, il est utile de considérer l'application

$$\delta : (K^n)^* \to \{0, 1, \ldots, n-1\}, a = (\alpha_i)_{i=\overline{0,n-1}} \to \max\{e \in \mathbf{N} \mid (0 \leqslant e \leqslant n-1) \wedge (\alpha_e \neq 0)\}.$$

Définition 2. i) *L'application δ s'appelle degré sur $(K^n)^*$,*

ii) *Si $a = (\alpha_i)_{i=\overline{0,n-1}} \in (K^n)^*$, $\delta(a) = m$ et $\alpha_m = 1$, alors a s'appelle unitaire.*

La famille des éléments unitaires de la $(K^n)^*$ étant notée par $\mathcal{U}$, soit

$$\mathcal{C}(K^n) = \{a \in \mathcal{U} \mid (\exists a^c)(a^c \in \mathcal{U})[(a * a^c = 0) \wedge (\delta(a) + \delta(a^c) = n)]\}$$

Remarque. Avec les notations de (4), évidemment l'application $a \to a^c$ est une bijection involutive.

En vue d'atteindre l'un des buts fondamentaux que nous nous proposons dans cet ouvrage, nous notons le résultat intermédiaire suivant.

Proposition 4. *Si I est un idéal de la K-algèbre K^n et $a \in I$ est un élément unitaire de degré minime, alors :* (i) *a est uniquement déterminé ;* ii) *$a \in \mathcal{C}(K^n)$;* iii) *$I = a * K^n = (a)$.*

Remarque. I est un idéal en K^n si et seulement si I est un sous-espace T-invariant.

Enfin, en illustrant dans K^n la structure de divisibilité de $X^n - 1 \in K[X]$ par l'intermédiaire de la famille $\mathcal{C}(K^n)$, nous démontrons la proposition suivante, qui met en évidence la structure d'algèbre Boole de la famille Id (K^n) des idéaux de K^n.

Proposition 5. (i) $(\forall b)(\exists! a)$ $b \in K^n$, $a \in \mathcal{C}(K^n)$ $(b * K^n = a * K^n)$; (ii) *L'application $u : \mathcal{C}(K^n) \to \mathrm{Id}(K^n)$, $a \to a * K^n$ est une bijection* ; (iii) *Si* char $(K) \nmid n$, *alors* $(\forall a) a \in \mathcal{C}(K^n)$, $a * K^n = \mathrm{Im}\, a[T] = \mathrm{Ker}\, a^c[T]$, *et nous avons la décomposition directe* $(\forall a) a \in \mathcal{C}(K^n)[K^n = (a * K^n) \oplus (a^c * K^n)]$.

BIBLIOGRAPHIE

1. van Lint, J. H.—*Introduction to Coding Theory*, Springer Verlag, New York Inc., 1982.
2. Wedderburn J. H. M.—*Lectures on Matrices*, Amer. Math. Soc. Colloquim Publ., New York, 1934.
3. Creangă, I., Simovici, D.—*Teoria codurilor*, E.D.P., București, 1975.

Université de Brașov

Analele științifice ale Universității „Al. I. Cuza" din Iași
Tomul XXXI, s. I a, 1985 (supliment)

UNE GÉNÉRALISATION DES GROUPES RÉSOLUBLES

PAR

GH. IVAN

Dans cette Note on définit les notions de groupe quasi-résoluble et de suite quasi-résoluble en généralisant d'une manière naturelle les notions bien connues de groupe résoluble et de suite résoluble.

Soient G un groupe et $D^*(G) = (D^n(G))_{n \in \mathbf{N}}$ la suite dérivée de G.

Définition 1. *On dit qu'un groupe G est quasi-résoluble s'il existe un entier $s \geqslant 0$ tel que $D^s(G)$ soit un groupe simple. Un groupe G s'appelle quasi-résoluble de classe s si s est le plus petit entier tel que $D^s(G)$ soit un groupe simple.*

Exemples 1. a) Tout groupe simple non commutatif est quasi-résoluble de classe 0 car $D^k(G) = G$ pour tout $k \geqslant 0$.

b) Tout groupe résoluble de classe s est un groupe quasi-résoluble de classe $s-1$ ou s selon le cas où $D^{s-1}(G)$ est un groupe simple ou non simple.

c) Pour tout $n \geqslant 5$, le groupe symétrique S_n est un groupe quasi résoluble de classe 1 puisque le groupe dérivé de S_n est le groupe alterné A_n qui est simple pour tout $n \geqslant 5$.

Remarque 1. Il y a des groupes non quasi-résolubles. Tout groupe G non commutatif et non simple qui a la propriété que $D(G) = G$ est un groupe qui n'est pas quasi-résoluble (par exemple, le groupe $A_n \times A_n$ pour tout $n \geqslant 5$ est non commutatif, non simple et $D(A_n \times A_n) = D(A_n) \times D(A_n) = A_n \times A_n$).

Une *suite normale* de G, $G = H_0 \trianglerighteq H_1 \trianglerighteq H_2 \trianglerighteq \ldots \trianglerighteq H_i \trianglerighteq \ldots$ telle que H_i soit distingué dans G pour tout i s'appellera *suite invariante* de G.

La suite dérivée de G, $D^*(G)$ este une suite invariante qui a la propriété que les quotients $D^i(G)/D^{i+1}(G)$ sont des groupes commutatifs.

Définition 2. *Une suite normale de G de la forme : $\mathfrak{N}_q = (G = H_0 \trianglerighteq H_1 \trianglerighteq H_2 \trianglerighteq \ldots \trianglerighteq H_{q-1} \trianglerighteq H_q = \{e\})$ s'appelle quasi-résoluble à longueur q si les quotients H_i/H_{i+1} sont commutatifs pour tout $0 \leqslant n \leqslant q-2$.*

Remarque 2. Si un groupe G satisfait à la condition que toutes ses suites normales décroissantes de sous-groupes sont finies, alors la suite dérivée $D^*(G)$ est finie, c'est-à-dire il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $D^{n+k}(G) = D^n(G)$ pour tout $k \geqslant 1$. Dans ce cas, la suite dérivée $D^*(G)$ est une suite quasi-résoluble à longueur $n+1$, à savoir : $D^*(G) = (G = D^0(G) \trianglerighteq D^1(G) \trianglerighteq D^2(G) \trianglerighteq \ldots \trianglerighteq D^n(G) \trianglerighteq \{e\})$

Théorème 1. a) *Tout sous-groupe distingué d'un groupe quasi-résoluble est aussi un groupe quasi-résoluble.*

b) b) *Si $f : G \to G'$ est un homomorphisme du groupe quasi-résoluble G dans le groupe G' alors $f(G)$ est quasi-résoluble.*

c) *Si H est un sous-groupe distingué de G et G est un groupe quasi-résoluble alors G/H est un groupe quasi-résoluble.*

Démonstration. a) Soit H un sous-groupe distingué d'un groupe quasi-résoluble G. Alors il existe $s \in \mathbf{N}$ tel que $D^s(G)$ soit un groupe simple et la relation $H \subset G$ entraîne $D^s(H) \subseteq D^s(G)$. Comme $D^s(H) \leq H \leq G$ il résulte que $D^s(H) \leq G$ car $D^s(H)$ est un sous-groupe caractéristique dans H. Par suite $D^s(H) \leq D^s(G)$ et $D^s(G)$ étant un groupe simple, cela implique que $D^s(H) = \{e\}$ ou $D^s(H) = D^s(G)$ donc $D^s(H)$ est un groupe simple et H est quasi-résoluble.

b) Soit $f: G \to G'$ un homomorphisme ; on désigne par $H' = f(G) \subseteq G'$ et par $g: G \to H'$ l'application définie par $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in G$ (g est un homomorphisme surjectif). G étant quasi-résoluble, il existe $s \in \mathbf{N}$ tel que $D^s(G) = H$ soit simple. Puisque $D^k(f(G)) = f(D^k(G))$ on obtient que $D^k(H') = g(D^k(G))$ pour tout k et par conséquent $D^s(H') = g(H)$. On suppose qu'il existe un sous-groupe distingué K' tel que $\{e'\} \trianglelefteq K' \trianglelefteq g(H)$. Alors $K = g^{-1}(K')$ est un sous-groupe distingué dans H ; il en résulte que $K = \{e\}$ ou $K = H$, donc $K' = \{e'\}$ ou $K' = g(H)$ et par suite $D^s(H')$ est un groupe simple, d'où $f(G)$ est bien quasi-résoluble.

c) En considérant l'homomorphisme canonique $p: G \to G/H$ et en appliquant b), on a que G/H est quasi-résoluble car $p(G) = G/H$ et G est quasi-résoluble.

En raisonnant par recurence par rapport à k, on obtient ;

Proposition 1. *Si la suite invariante $G = H_0 \rhd H_1 \rhd \ldots \rhd H_{k-1} \rhd H_k$ a la propriété que les H_i/H_{i+1}, $0 \leq i \leq k-1$ sont commutatifs, alors G/H_k est un groupe résoluble de classe $\leq k$.*

Proposition 2. *Toute extension E d'un groupe G résoluble de classe $\leq q$ par un groupe F quasi-résoluble de classe $\leq s$ est un groupe qassi-résoluble de classe $\leq q+s$.*

Démonstration. Soit $0 \to F \xrightarrow{j} E \xrightarrow{p} G \to 0$ une extension E de G par F. Par hypothèse, G étant résoluble de classe $\leq q$ et F étant quasi-résoluble de classe $\leq s$, il s'ensuit $D^q(G) = \{e\}$ et $D^s(F)$ est un groupe simple. L'homomorphisme p étant surjectif, on a : $p(D^q(E)) = D^q(p(E)) = D^q(G) = \{e\}$ d'où $D^q(E) \subseteq \operatorname{Ker} p = \operatorname{Im} j$ et $D^q(E) \subseteq F$. Cela implique que : $D^{s+q}(E) = D^s(D^q(E)) \subseteq D^s(F) \subseteq D^s(E)$. La relation $D^{s+q}((E) \leq D^s(E)$ entraîne $D^{s+q}(E) \trianglelefteq D^s(F)$ et on en déduit que $D^{s+q}(E) = \{e\}$ ou $D^{s+q}(E) = D^s(F)$ car $D^s(F)$ est simple. Par conséquent, $D^{s+q}(E)$ est simple et E est bien quasi-résoluble de classe $\leq s+q$.

Corollaire 1. *Le produit direct ou semi-direct d'un groupe résoluble de classe $\leq q$ par un groupe quasi-résoluble de classe $\leq s$ est un groupe quasi-résoluble de classe $\leq s+q$.*

Remarque 3. Le produit direct de deux groupes quasi-résolubles n'est pas un groupe quasi-résoluble car si $D^q(G)$ et $D^s(G')$ sont simples, le groupe $D^{q+s}(G \times G') = D^{q+s}(G) \times D^{q+s}(G') = D^q(G) \times D^s(G')$ n'est pas un groupe simple et $D^{q+s+t}(G \times G') = G^{q+s}(G \times G')$ pour tout $t \geq 1$.

Théorème 2. *Soit G un groupe et q un entier. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *G est quasi-résoluble de classe $\leq q$.*

b) *Il existe une suite invariante, quasi-résoluble à longueur $q+1$. $G = H_0 \trianglerighteq H_1 \trianglerighteq H_2 \trianglerighteq \ldots \trianglerighteq H_{q-1} \trianglerighteq H_q \trianglerighteq H_{q+1} = \{e\}$, telle que H_q soit un groupe simple.*

c) *Il existe une suite quasi-résoluble à longeur $q+1$: $G = G_0 \trianglerighteq G_1 \trianglerighteq G_2 \trianglerighteq \ldots \trianglerighteq G_{q-1} \trianglerighteq G_q \trianglerighteq G_{q+1} = \{e\}$ telle que G_q soit un groupe simple.*

d) *Il existe un sous-groupe distingué simple H de G tel que G/H soit résoluble de classe $\leq q$.*

Nous allons montrer seulement l'équivalence de a) et d).

a) entraîne d). Par l'hypothèse on a la suite $D^*(G)$ à longueur $q+1$ et $D^q(G)$ est un sous-groupe distingué. simple de G. On pose $H = D^q(G)$. En appliquant la prop. 1. pour la suite $D^*(G)$, il résulte que $G/H = G/D^q(G)$ est un groupe résoluble de classe $\leq q$ et on a d).

d) entraîne a). Supposons qu'il existe un sous-groupe distingué, simple H de G tel que G/H soit résoluble de classe $\leq q$. H étant un groupe quasi-résoluble de classe 0, on considère l'extension G de G/H par H, à savoir la suite exacte $0 \to H \xrightarrow{j} G \xrightarrow{p} G/H \to 0$ et en appliquant la prop. 2, il résulte que G est un groupe quasi-résoluble de classe $\leq q$.

BIBLIOGRAPHIE

1. Bourbaki N. — *Algèbre*. Ch. I–III. Hermann, Paris, 1970.

Universitatea Timişoara
B-dul Pârvan Nr. 4
1900 — Timişoara