Analele Ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi
Tomul XXXI, s. I a, 1985 (supliment)

DAS OBJEKT „GANZE ZAHLEN" IN EINEM ELEMENTAREN TOPOS

VON

CAROL SZASZ

Es sei $\mathcal{E}$ ein elementarer Topos. Man weiss, ([1], [2]) dass, wenn $\mathcal{E}$ ein Peano'scher Topos ist, dann kann man in $\mathcal{E}$ das Objekt „ganze Zahlen" definieren. Im folgenden wird eine andere Definition dieses Objekts gegeben, wobei nicht angenommen wird dass $\mathcal{E}$ ein Peano'scher Topos ist. Die Idei für diese Definition, stammt von der axiomatischen Konstruktion der Menge Z die in [3] gegeben wird. Es werden die Bezeichunngen aus [4], Kap. I benützt.

Definition 1. *Man nennt Objekt „ganze Zahlen" das Tripel* $(Z, 0, s)$, *das aus einem Objekt* Z, *einem Element* $1 \xrightarrow{0} Z$ *und einem Automorphismus* $Z \xrightarrow{s} Z$ *gebildet ist, so dass für jedes Objekt* A, *jedes Element* $1 \xrightarrow{a} A$ *und jeden Automorphismus* $A \xrightarrow{f} A$ *es ein und nur ein* $Z \xrightarrow{u} A$ *gibt, so dass das Diagramm* (1) *kommutativ sei :*

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[r, "s"] \arrow[d] & Z \arrow[d] \\ 1 \arrow[ur, "0"] \arrow[r, "a"'] & A \arrow[r, "f"] & A \end{tikzcd}$$

Anmerkung 1. Man kann beweisen]5], dass Z das Axiom der doppelten Induktion erfüllt.

Anmerkung 2. Wenn man in (1) $A=Z$, $a=0$, $t=s^{-1}$ annimnt, dann heisst der entsprechende Morphismus u die Oppossition in Z und wird mit $\overline{op}$ bezeichnet. Mann zeigt leicht, dass $\overline{op}^2=Z$.

Satz 1. *Für jedes Diagramm* $A \xrightarrow{x_0} B \xrightarrow{t} B$ *wobei* t *ein Automorphismus ist, gibt es einen eindeutig bestimmten Morphismus* $Z \times A \xrightarrow{x} B$, *so dass das Diagramm* (2) *kommutativ sei :*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\langle 0_A, A\rangle"] \arrow[dr, "x_0"'] & Z \times A \arrow[r, "S \times A"] \arrow[d, "x"] & Z \times A \arrow[d, "x"] \\ & B \arrow[r, "t"] & B \end{tikzcd}$$

Beweis. Es sei $\hat{x}_0$ der Morphismus x_0, der als Element von B^A angesehen wird. Weil t^A ein Automorphismus ist, gibt es $Z \xrightarrow{\hat{x}} B^A$ eindeutig bestimmt, so dass $\hat{x} \cdot 0 = x_0$ und $\hat{x} \cdot s = t^A \cdot \hat{x} \cdot v$ ist der Morphismus, der $\hat{x}$ durch die cartesische Adjunktion entspricht.

Anmerkung 3. Wenn man in Satz 1 $A=Z$, $B=Z$, $t=s$, $x_0=Z$ annimnt, dann heisst der entsprechende Morphismus x die Addition der ganzen Zahlen und wird mit a bezeichnet. Wie in [4] kann man beweisen, dass die Addition assoziativ und kommutativ ist.

Anmerkung 4. Wenn man in Satz 1 $A=Z$, $B=Z$, $t=s^{-1}$, $x_0=Z$ annimnt, dann heisst der entsprechende Morphismus x die Subtraktion der ganzen Zahlen und wird mit d bezeichnet. Man kann folgende Berichungen beweisen (5]) :

1)	$d(Z \times d) = d(a \times Z)$	5)	$d \langle p_1, a \rangle = p_2$
2)	$a(d \times Z) = d(Z \times a)$	6)	$a \langle p_1, d \rangle = p_2$
3)	$d(d \times Z) = a(Z \times d)$	7)	$d \langle p_2, a \rangle = p_1$
4)	$d \langle Z, O_Z \rangle = \overline{o}$	8)	$a(\overline{op} \times Z) = d$

so wie auch die Beziehungen
wobei p_i, $i=1, 2$ die i-te Projektion des Produktes $Z \times Z$ ist.

Die Beziehung 4) wird folgendermassen bewiesen : $s^{-1} d \langle Z, O_Z \rangle = d(s \times Z) \langle Z, O_Z \rangle = d \langle s, O_Z \rangle = d \langle Z, O_Z \rangle s$. Die Beziehungen 5), 6) werden wie der Satz 2.06 aus [4] bewiesen und 7) folgt ähnlich, wenn man bemerkt, dass $d(Z \times s) = sd$. Die Beziehung 8) wird wie folgt bewiesen : $a(\overline{op} \times Z) = a(d \langle Z, O_Z \rangle Z) = a(d \times Z)(\langle Z, O_Z \rangle \times Z) = d(Z \times a)(\langle Z, O_Z \rangle \times Z) = d(Z \times a \langle \langle O_Z, Z \rangle) = d$.

Satz 2. $(Z, a, o, \overline{op})$ *ist eine Abel'sche Gruppe deren Substraktion* d *ist.*

Beweis. Der Beweis wird mit Hilfe der Beziehungen 4), 6), 8) aus Anmerkung 4 geführt.

Satz 3. *Es gibt einen und nur einen Morphismus* $Z \times Z \xrightarrow{m} Z$, *so dass* $m \langle O_Z, Z \rangle = O_Z$ *und* $m(s \times Z) = a \langle m, p_2 \rangle$.

Beweis. Es sei Π_i die i-te Projektion des Produktes $Z \times Z \times Z$. Dann ist der Morphismus $g = \langle a \langle \Pi_1, \Pi_3 \rangle, s\Pi_2, \Pi_3 \rangle$ ein Automorphismus dessen symmetrischer Morphismus $h = \langle d \langle \Pi_3, \Pi_1 \rangle, s^{-1}\Pi_2, \Pi_3 \rangle$ ist. Man nimmt in Satz 1 $A=Z$, $B=Z \times Z \times Z$, $x_0 = \langle O_Z, O_Z, Z \rangle$, $t=g$ an. Weiter wird demselben Gedankengang wie in dem Beweis des Satzes 2.04 aus [4] gefolgt.

Der Morphismus m heisst die Multiplikation der ganzen Zahlen.

LITERATUR

1. Johnstone, P. T.—*Topos theory*, Acad. Press 1977.
2. Ştefănescu A. C.—*Structura obiectului numere întregi...*, Stud. Cerc. Mat. 6(34) 1982, 568—580.
3. Gautier C.—..., Alef$_0$ (Algebra) *Numere întregi*, Buc. 1977.
4. Radu, Alex. Gh. — *Teoria toposurilor*, Ed. Acad., vol. II, Buc., 1982.
5. Szasz C.—*Das Objekts „ganze Zahlen"...*, Bul., Univ. Braşov (Wird erscheinen).

Universitatea Braşov