Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi
Tomul XXXI, s. I a, 1985 (supliment)

ÜBER DIE I-KATEGORIE DER PARTIELLEN BIJEKTIONEN

VON

EMIL SCHWAB

M. Grandis gibt im letzten Abschnitt der letzten Arbeit (siehe [3]) aus einer mit „Orthodox Categories" betitelten Artikel-reihe, die Charakterisierung der inversen Kategorien mit Faktorisierung. In [4] zeigt J. Kastl dass die inversen Kategorien von den Kategorien der partiellen Morphismen Beschrieben sind. In dieser Darlegung werden Eigenschaften der inversen Kategorien der partiellen Bijektionen zwischen den Mengen (hier mit Bij notiert) gezeigt, in engem Zusammenhang mit den von M. Grandis in den oben angeführten Artikeln erzielten Ergebnissen.

1. In einer Baer*-Kategorie (für die Definition der Baer*-Kategorie siehe [7] Seite 248) für jedes Objekt A in der Menge der abgeschlossenen Projektionen $\overline{P(A)}$ ist die binäre Relation $\leqslant$, welche durch

$$i, j \in \overline{P(A)},\ i \leqslant j \Leftrightarrow ij = i \tag{1.1}$$

definiert erscheint, eine Ordnungsrelation.

Die Kategorie Rel der binären Relationen zwischen Mengen mit der Involution $*$ als Inverses der Relation definiert, ist eine Baer*-Kategorie in welcher nicht eine jede Projektion eine abgeschlossene Projektion ist. Wenn $\mathcal{R} \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Rel}}(A, B)$, dann bezeichnen wir $\mathrm{Def}\ \mathcal{R} = \{a \in A \mid \exists b \in B$, so dass $a\mathcal{R}b\}$ und $\mathrm{Im}\ \mathcal{R} = \{b \in B \mid \exists a \in A$, so dass $a\mathcal{R}b\}$. Die Kategorie Bij der partiellen Bijektionen (Ob Bij = Ob Rel, wogegen die Morphismen von Bij sind jene Relationen $\mathcal{R}$ welche eine Bijektion zwischen $\mathrm{Def}\ \mathcal{R}$ und $\mathrm{Im}\ \mathcal{R}$ realisiert), ist eine Baer* Unterkategorie[1] von Rel in welcher jede Projektion eine algeschlossene Projektion ist. Sie ist eine inverse Kategorie, ist $*$-regulär und auch eine exakte Kategorie (siehe [9]).

Für jedes Objekt A der Kategorie Bij in der Kommutativen Halbgruppe $P(A)$ (der Projektionen die $[A, A]_{\mathrm{Bij}}$ angehören) fallen die Relationen $\leqslant$ und die Dominanzrelation $\complement$ (siehe 1.7. aus [1]) zusammen. Aber $\leqslant$ ist eine Ordnungsrelation auf $P(A)$ und somit ist die in 1.8. aus [1] definierte Relation Φ die Identitätsrelation auf $P(A)$.

Die Definition der Dominanzrelation $\complement$ wird sich in $[A, B]_{\mathrm{Bij}}$ kanonisch erweitert, wo A und B zwei beliebige Objekte der Kategorie Bij sind

[1] Die Kategorie $\mathcal{D}$ nennen wir Baer* Unterkategorie der Baer*-Kategorie $\mathcal{C}$, wenn $\mathcal{D}$ eine Unterkategorie von $\mathcal{C}$ ist in welcher die Restriktion von * auf $\mathcal{D}$ Sinn hat und mit dieser Restriktion „*" stellt $\mathcal{D}$ eine Baer „*"-Kategorie dar.

(siehe 1.26. aus [1]). Somit wenn $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 \in [A, B]_{\mathrm{Bij}}$, dann $\mathcal{R}_1 \complement \mathcal{R}_2$, dann und nur dann wenn $\mathrm{Def}\ \mathcal{R}_1 \subseteq \mathrm{Def}\ \mathcal{R}_2$, $\mathrm{Im}\ \mathcal{R}_1 \subseteq \mathrm{Im}\ \mathcal{R}_2$ und die Restriktion von $\mathcal{R}_2$ auf $\mathrm{Def}\ \mathcal{R}_1$ stimmt mit $\mathcal{R}_1$ überein. Offenbar ist die erweiterte Dominanztrelation $\complement$ eine Ordnungsrelation auf $[A, B]_{\mathrm{Bij}}$ (siehe auch 2.14. aus [2]), während die erweiterte Relation Φ (siehe 1.26. (2) aus [1]) die Identitäsrelation auf $[A, B]_{\mathrm{Bij}}$ ist. In der Voraussetzung, dass der Morphismus $\mathcal{R} \in [A, B]_{\mathrm{Bij}}$ „strikt maximal" ist, in bezug auf die Dominanzrelation $\complement$ (also $R \complement R_1$ impliziert $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1$) folgt dass mindestens eine der Gleichungen $\mathrm{Def}\ \mathcal{R} = A$, $\mathrm{Im}\ \mathcal{R} = B$ stattfindet, also $\mathcal{R}$ ist ein Monomorphismus oder ein Epimorphismus. Umgekehrt, wenn $\mathcal{R} \in [A, B]_{\mathrm{Bij}}$ ein Monomorphismus oder ein Epimorphismus ist, dann ist $\mathcal{R}$ „strikt maximal" in bezug auf die Dominanzrelation $\complement$. (Diese Bemerkung ist in Übereinstimmung mit 1.27. (g) aus [1]).

2. Die Kategorie Bij ist keine Kategorie mit Faserprodukten (eine $*$-reguläre Kategorie mit Faserprodukten ist eine abelsche Kategorie — siehe [7]). Da sie aber eine exakte Kategorie ist, folgt dass in Bij jeder Winkel:

$$\begin{tikzcd} & A_1 \arrow[d, "\mathcal{R}_1"] \\ A_2 \arrow[r, "\mathcal{R}_2"] & \cdot \end{tikzcd} \tag{2.1}$$

mit $\mathcal{R}_1$ Monomorphismus, zu einem Faserprodukt-Diagramm verlängert werden kann.

Es sei $X = \{x \in \mathrm{Def}\ \mathcal{R}_2 \mid \mathcal{R}_2(x) \in \mathrm{Im}\ \mathcal{R}_1\}$, und $\mathcal{G}_2 \in [A_2 \setminus X, A_2]_{\mathrm{Bij}}$ die kanonische Inklusion. Für $\xi \in (A_2 \setminus X) \cap \mathrm{Def}\ \mathcal{R}_2$ haben wir $\mathcal{R}_2(\xi) \in \mathrm{Im}\ \mathcal{R}_1$ und somit existiert $\eta \in A_1$, so dass $\mathcal{R}_1(\eta) = R_2(\xi)$. Berücksichtigen wir dann $\mathcal{G}_1 \in [A_2 \setminus X, A_1]_{\mathrm{Bij}}$ definiert durch $\mathrm{Def}\ \mathcal{G}_1 = (A_2 \setminus X) \cap \mathrm{Def}\ \mathcal{R}_2$ und $\mathcal{G}_1(\xi) = \eta$. Das Quadrat

$$\begin{tikzcd} A_2 \setminus X \arrow[r, "\mathcal{G}_1"] \arrow[d, "\mathcal{G}_2"'] & A_1 \arrow[d, "\mathcal{R}_1"] \\ A_2 \arrow[r, "\mathcal{R}_2"'] & \cdot \end{tikzcd} \tag{2.2}$$

(mit $\mathcal{R}_1$ Monomorphismus) ist ein Faserprodukt-Diagramm.

Wenn in (2.1) sowohl $\mathcal{R}_1$ als auch $\mathcal{R}_2$ Monomorphismen sind, dann kann (2.1) zu einem Faserprodukt-Diagramm verlängert werden:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Im}\mathcal{R}_1 \cap \mathrm{Im}\mathcal{R}_2 \arrow[r, "\mathcal{T}_1"] \arrow[d, "\mathcal{T}_2"'] & A_1 \arrow[d, "\mathcal{R}_1"] \\ A_2 \arrow[r, "\mathcal{R}_2"'] & \cdot \end{tikzcd} \tag{2.3}$$

wo $\mathcal{T}_i$ $(i = 1, 2)$ wie folgt definiert sind. Sei $a \in \mathrm{Im}\mathcal{R}_1 \cap \mathrm{Im}\ \mathcal{R}_2$, so folgt dass $a_i \in A_i$ existiert mit der Eigenschaft $\mathcal{R}_i(a_i) = a$ $(i = 1, 2)$. Dann ist laut Definition $\mathcal{T}_i(a) = a_i$ $(i = 1, 2)$.

3. Y. Kawahara gibt in [5] die Konstruktion der I-Kategorie der Relationen Rel ($\mathcal{C}$; $\mathcal{E}$) einer Kategorie $\mathcal{C}$ mit Faserprodukten, in bezug auf eine retraktive Unterkategorie $\mathcal{E}$ aus $\mathcal{C}$. Bij ist keine Kategorie mit Faserprodukten, aber wenn wir 2. in Betracht ziehen, so ist die Unterkategorie der Monomorphismen aus Bij (wir bezeichnen diese Kategorie mit Mon (Bij) eine Kategorie mit Faserprodukten. Die Unterkategorie der Isomorphismen aus Bij (wir bezeichnen sie mit Iso (Bij)) ist eine retraktive Unterkategorie von Mon (Bij) im Sinne der gegebenen Definition im §1 aus [5] und somit könen wir die Kategorie Rel (Mon (Bij) ; Iso(Bij)) in Rücksicht nehmen.

Wir bemerken dass, wenn $\mathcal{M}$ die Kategorie der Monomorphismen einer Kategorie $\mathcal{C}$ ist, wo $\mathcal{C}$ eine inverse Kategorie mit mono-epi Faktorisierung darstellt, dann leitet uns die Symmetrisation $s: \mathcal{M} \to G(\mathcal{M})$ berücksichtigt in 4.33. aus [3] (welche eben als Gundlage die durch 4.32.(4)—(5) aus [3] definierte Komposition hat) zu der Kategorie der Relationen Rel($\mathcal{M}$: Iso ($\mathcal{C}$)) bestimmt von Y. Kawahara in [5]. Laut dieser Bemerkung, aus [3] 4.30. (1) folgt unmittelbar dass

$$\text{Bij} \cong \text{Rel (Mon (Bij) ; Iso (Bij))}. \tag{3.1}$$

Wir bemerken dass, (3.1.) kann auch auf einem Weg Gefunden werden, welcher durch die Tatsache angeregt ist, dass jeder nichtzero Morphismus $[\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2] \in$ Rel (Mon (Bij) ; Iso (Bij)) von A zu B (siehe die Bezeichnungen aus [5]), der in Wirklichkeit eine Äquivalenzklasse [2] darstellt, bestimmt von dem Morphismenpaar (span) aus dem folgenden Diagramm

(3.2)

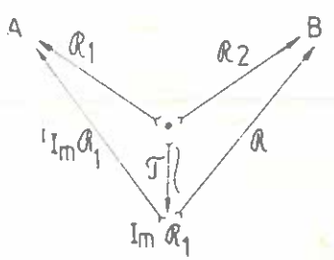
einen eindeutigen Repräsentanten der Form

$$(i_X, \mathcal{R}) \tag{3.3}$$

enthält, wo i_X die Identitätsrelation auf $X \subseteq A$ ist.

Tatsächlich, aus der Kommutativität des Diagramms

(3.4)



[2] Die Äquivalenzklasse ist bestimmt durch : $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2) \sim (\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2)$ dann und nur dann wenn $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2) \prec (\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2)$ und $(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2) \prec (\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$, wo $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2) \prec (\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2)$ dann und nur dann wenn $\mathcal{T} \in$ $\in$ Mon(Bij) existiert so dass $\mathcal{R}_1 = \mathcal{G}_1\mathcal{T}$ und $\mathcal{R}_2 = \mathcal{G}_2\mathcal{T}$.

wo $\mathcal{T}(x) \overset{\text{Def}}{=} \mathcal{R}_1(x)$, $i_{\mathrm{Im}\mathcal{R}_1}$ die Identitätsrelation auf Im R_1 ist, $\mathcal{R}(x) \overset{\text{Def}}{=} \mathcal{R}_2\mathcal{T}^*(x)$, und da $\mathcal{T} \in$ Iso (Bij) folgt :

$$(i_{\mathrm{Im}\mathcal{R}_1}, \mathcal{R}) \in [\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2]. \tag{3.5}$$

Die Eindeutigkeit des Repräsentanten von der Form (3.3) ergibt sich aus der Tatsache, dass wenn $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2) \sim (\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2)$ dann Im $\mathcal{R}_1 =$ Im $\mathcal{G}_1$.

Definieren wir nun zwei Functoren [3] F : Bij$\to$Rel (Mon (Bij) : Iso(Bij)) und G : Rel (Mon (Bij) ; Iso (Bij))$\to$Bij durch :

— $F(A) = A$ und $G(A) = A$, für jedes Objekt A.

— $F(\mathcal{R}) = [i_{\mathrm{Def}\mathcal{R}}, \mathcal{G}]$ wo $i_{\mathrm{Def}\mathcal{R}}$ die Identitätsrelation auf Def $\mathcal{R}$ ist und $\mathcal{G}(x) = \mathcal{R}(x)$.

— $G[i_X, \mathcal{R}])$ ist definiert durch Def $G([i_X, \mathcal{R}]) = X$ und $G([i_X, \mathcal{R}])(x) = \mathcal{R}(x)$.

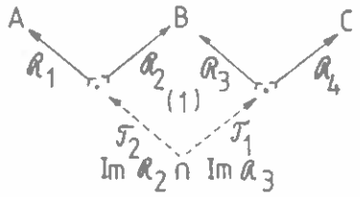
In Anbetracht dessen dass $G \circ F = 1$ und $F \circ G = 1$ folgt (3.1). Mithin ist Bij zusammen mit der Involution $*$ und der Dominanzrelation C eine I-Kategorie im Sinne von D. Puppe (siehe [3], Seite 338).

LITERATUR

1. Grandis M. — *Canonical preorder and congruence in orthodox semigroups and categories (Orthodox categories, 1)*, Boll. U.M.I., 13-B (1976), 634—650.
2. Grandis M. — *Regular and orthodox involution categories (Orthodox categories, 2)*, Boll. U.M.I., 14-A (1977), 38—48.
3. Grandis M. — *Quasi-inverse involution semigroups and categories (Orthodox categories, 4)* Boll. U.M.I., 14-B (1977), 320—339.
4. Kastl J. — *Inverse categories*, Studien zur Alg. und ihre Anw., Band 7, Akademie-Verlag, Berlin (1979), 51—60.
5. Kawahara Y. — *Relations in categories with pullbacks*, Memoirs of the Fac. of Sci. Kyushu University Ser. A, Vol. 27, Nr. 1 (1973), 149—173.
6. Puppe D. — *Korrespondenzen in abelschen Kategorien*, Math. Ann., 148 (1962), 1—30.
7. Schwab E. — *Über das verallgemeinerte Inverse eines Morphismus*, Math. Nachr. 81 (1978) 243—257.
8. Schwab E. — *Beispiele von regulären Kategorien* (2), S.T.S. 18, Univ. din Timişoara (1978).
9. Schwab E. — *Image and Inverse Mappings in Exact Inverse Categories*, Boll. U.M.I., 18-B (1981), 831—845.

Universitatea Timişoara
B-dul Pârvan Nr. 4
1900 — Timişoara

[3] Die Komposition der Morphismen (der Äquivalenzklassen) aus Rel (Mon (Bij) ; Iso (Bij)) definiert man mit Hilfe der Komposition der Repräzentanten. Man berücksichtigt das Diagramm :



wo das Quadrat (1) ein Faserdrodukt-Diagramm ist (siehe (2.3) und laut Definition.

$$(\mathcal{R}_3, \mathcal{R}_4) \cdot (\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2) = (\mathcal{R}_1\mathcal{T}_2, \mathcal{R}_4\mathcal{T}_3).$$