ANALELE ŞTIINŢIFICE ALE UNIVERSITĂŢII "AL. I. CUZA" IAŞI
Tomul XLII, Supliment, s.I.a. Matematică, 1996

QUELQUES RESULTATS EN K-THEORIE RÉELLE

PAR

CRISTIAN-NICOLAE COSTINESCU

Introduction. L'object de ce travail est la variété quaternionique de Stiefel $\boldsymbol{HS}(n,k)$, où $0 \leq k \leq n$, constituée des applications linéaires isométriques de l'espaces $\boldsymbol{H}^k$ dans $\boldsymbol{H}^n$ ou, ce qui revient au même, des k repères orthonormés de $\boldsymbol{H}^n$; c'est-à-dire il s'agit de l'ensamble de $(n \times k)$-matrices (v_{ij}) telles que:

$$\sum_{s=1}^{n} v_{si} v_{sj} = \delta_{ij} \qquad (1 \leq i \leq j \leq k).$$

Ces equations déterminent $\boldsymbol{HS}(n,k)$ comme un sous-espace de $\boldsymbol{H}^{nk} = \boldsymbol{R}^{4nk}$ et on obtient une variété sans bord de dimension $4nk - (2k^2 - k)$.

En 1771, A.Roux a déterminé dans [11] les groupes de K-theorie complexe des variétés quaternioniques de Stiefel en termes de représentations des groupes symplectiques; l'outil principal utilisé a été une suite spectrale de L.Hodgkin.

Dans sa thèse [5], Raphael Freitas s'intéresse à la K-théorie réelle des groupes symplectiques $Sp(n)$ et des variétés quaternioniques de Stiefel en utilisant notamment un travail de R.M.Seymour [12] sur les groupes de Lie et leurs espaces homogènes dans le cadre plus général de la KR-théorie introduite par M.Atiyah dans [1]. Nous avons déterminé de plus la structure $\boldsymbol{Z}_8$-graduée de $KO^*(Sp(N))$ dans [4]; le but de ce travail est de prouver que les résultats obtenus pour $Sp(n)$ valent encore pour les variétés quaternioniques de Stiefel.

Le plan est le suivant: une première partie contient les accessories de K-théorie topologique, dans la deuxième on étudie la K-théorie complexe

---

Conférence présentée au 25-ème Conférence Nationale de Géométrie Différentelle et Topologie, 18-23 Septembre, 1995, Jassy, Roumanie.

et ensuite la KO-théorie des variétés quaternioniques de Stiefel, la troisième partie établit les isomorphismes qui déterminent la structure Z_8-graduée de $KO^*(HS(n,k))$.

Partie 1

1. Dans toute la suite, le K-foncteur est définit sur la catégorie des CW-complexes finis à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens; on rappelle que la K-théorie réelle est notée par KO, la K-théorie complexe par KU (en notation abrégée K) et par KH on désigne la K-théorie quaternionique.

Soit X un CW-complexe fini et pointé dont le point base est x_0; la notation $\tilde{K}(X)$ désigne le noyau de l'homomorphisme:

$$K(X) \longrightarrow K(\{x_0\})$$

induit par l'inclusion $\{x_0\} \subset X$. On dit que $\tilde{K}$ est la K-théorie complexe réduite (respectivement $\tilde{KO}$ la K-théorie réelle réduite) et on a la décompositon:

$$K(X) = \tilde{K}(X) \oplus K(\{x_0\})$$

Les théories KO et KH sont jointes de la K-théorie complexe par les morphismes de Bott (voir [3] et [10]):

$$K(X) \xrightarrow{r} KO(X) \xrightarrow{c} K(X)$$

$$K(X) \xrightarrow{q} KH(X) \xrightarrow{h} K(X)$$

qui vérifient les relations:

$$\begin{array}{ll} (r \circ c)(\alpha) = 2\alpha & \text{pour tout } \alpha \in KO(X) \\ (q \circ h)(\beta) + 2\beta & \text{si } \beta \in KH(X) \\ (c \circ r)(y) = (h \circ q)(y) = y + y^* & \text{pour } y \in K(X) \end{array}$$

où $* : K(X) \longrightarrow K(X)$ désigne le morphisme induit par la conjugaison: à tout fibré vectoriel E sur X correspond le fibré conjugué $\overline{E}$.

Rappelons que si $X = S^{4n}$, le morphisme de complexification c (respectivement le morphisme de réelification r) est un automorphisme de Z pour n nombre pair (respectivement n impair) et la multiplication par 2 pour n nombre impair (respectivement pair).

La structure aditive de la K-théorie réduite de S^0 est décrite dans le tableau suivant:

i	0	1	2	3	4	5	6	7
KU^{-i}	Z	0	Z	0	Z	0	Z	0
KO^{-i}	Z	Z_2	Z_2	0	Z	0	0	0
KH^{-i}	Z	0	0	0	Z	Z_2	Z_2	0

puisqu'on a l'isomorphisme: $KO^i(X) = KH^{i+4}$ et tenant compte du théorème de périodicité de Bott (voir [3]).

En ce qui concerne la K-théorie complexe on a: $\tilde{K}^{-2}(S^0) = K(S^2) \cong Z$ et le générateur est la classe stable du fibré en droites de Hopf sur S^2, $[\eta]-1$ qui vérifie la relation $([\eta]-1)^2 = 0$; l'isomorphisme de périodicité:

$$\beta : \tilde{K}^n(X) \to \tilde{K}^{n+2}(X)$$

est défini par la multiplication par $[\eta]-1$ (voie [2]).

L'anneau $\tilde{KO}^*(S^0)$ est une algèbre Z_8-graduée sur $\tilde{KO}^0(S^0) = KO^0(+) \cong Z$ et il est engendré par 4 éléments: 1, e_1, e_4 et e_8 – avec $e_i \in KO^{-i}(S^0)$ – qui vérifient les relations:

$$2e_1 = e_1{}^3 = e_1 e_4 = 0 \ , \quad e_1{}^2 = 4e_8$$

La notation $+$ désigne un espace réduit à un point.

La multiplication par e_8 induit l'isomorphisme de périodicité $\tilde{KO}^{-i}(X) \longrightarrow \tilde{KO}^{+8}(X)$ (voir [10]).

Pour tout CW-complexe fini X, il existe une suite exacte longue due à Bott:

$$\ldots \longrightarrow KO^n(X) \xrightarrow{c} K^n(X) \xrightarrow{\rho \circ \beta^{-1}} KO^{n+2}(X) \xrightarrow{d} KO^{n+1} \longrightarrow \ldots$$

où c est le morphisme de complexification, r celui de réelification, β est l'isomorphisme de périodicité complexe et d une certaine opération de cohomologie (voir [3]).

En utilisant la relation $r \circ c = 2$ on démontre dans [4]:

Proposition 1.1.1. *Soit X un CW-complexe fini pour lequel $\tilde{K}(X)$ est sans torsion; alors le sous-groupe de torsion de $\tilde{KO}^*(X)$ noté $Tors(\tilde{KO}^*(X))$ est isomorphe à $(Z_2)^k$ avec $k \geq 0$.*

2. Soit X un CW-complexe fini; on munit l'anneau $\tilde{KF}(X)$ (où $F = \{1, e_1, e_4, e_8\}$) de la filtration naturelle:

$$\mathcal{F}_p(\tilde{K}F^n(X)) = \mathrm{Ker}(\tilde{K}F^n(X) \xrightarrow{i'_{p-1}} \tilde{K}F^n(X_{p-1}))$$

ou i'_{p-1} désigne l'homomorphisme induit par l'inclusion de $(p-1)$ ième squelette X_{p-1} dans X. En utilisant cette filtration, à $\tilde{F}^*(X)$ est associée une suite spectrale - dite d'Atiyah-Hirzebruch - dont le terme E_2 est de la forme:

$$E_2^{p,q}(X) = H^p(X; \tilde{K}F^q(S^0)) \Rightarrow \tilde{K}F^{p+q}(X)$$

et le terme E_∞ est défini par:

$$E_\infty^{p,q}(X) = \frac{\mathcal{F}_p(\tilde{K}F^{p+q}(X))}{\mathcal{F}_{p+1}(\tilde{K}F^{p+q}(X))}$$

Dans le cas de la K-théorie complexe, la différentielle d_3 de la suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch est donnée par le carée de Steenrod Sq^3; en KO-théorie, la différentielle d_2 est donnée par les formules suivantes:

$$d_2^{p,8k-1} = Sq^2 : E_2^{p,8k-1}(X) = H^p(X; \mathbf{Z}_2) \to E_2^{p+2,8k-2}(X) = H^{p+2}(X; \mathbf{Z}_2)$$

$$d_2^{p,8k} = Sq^2 \circ \rho : E_2^{p,8k}(X) = H^p(X; \mathbf{Z}) \to E_2^{p+2,8k-1}(X) = H^{p+2}(X; \mathbf{Z}_2)$$

où Sq^2 désigne le carré de Steenrod et $\rho : H^*(X; \mathbf{Z}) \to H^*(X; \mathbf{Z}_2)$ est l'homomorphisme de restriction induit par la projection canonique $\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}_2$.

Si le CW-complexe fini X est sans torsion (c'est-à-dire $H^*(X; \mathbf{Z})$ est sans torsion) alors la suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch en K-théorie complexe est dégénérée - c.a.d. les différentielles d_s sont nulles pour tout $s \geq 2$ (voir [2]). Dans le cas de la KO-théorie, l'auteur a prouvé dans [4] le résultat suivant:

Proposition 1.2.1. *Soit X un CW-complexe fini sans torsion; alors dans la suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch associée à $KO^*(X)$ on a:*

a) $d_s^{p,q} = 0$ *pour tout p et tout $s \geq 2$ dès que $q \equiv -2, -1$ (modulo 8)*

b) $d_s^{p-q,q+s-1} = 0$ *pour tout p et tout $s \geq 2$ dès que $q \equiv 0, 4$ (modulo 8)*

3. P.Hilton donne dans [6] le résultas général suivant:

Théorème 1.3.1. *Soient X un CW-complexe fini et h une théorie arbitraire de cohomologie; alors $h \otimes \mathbf{Q}$ est aussi une théorie de cohomologie et pour tout q on a les isomorphismes:*

$$h^q(X) \otimes \mathbf{Q} \cong \bigoplus_{n+r=q} [H^r(X; \mathbf{Q}) \otimes h^n]$$

où la notation h^n désigne $h^n(S^0)$ - c'est à dire le n-ième groupe de coefficients de la théorie de cohomologie h (mentionnons que toutes les tensorisations sont sur $\mathbf{Z}$).

En utilisant le théorème de Hilton 1.3.1. on obtient pour la K-théorie réelle (c.a.d. pour $h = KO$):

Proposition 1.3.2. *Si X est un CW-complexe fini, alors on a pour tout n:*

$$\tilde{KO}^{-n}(X) \otimes \mathbf{Q} \cong \bigoplus_p [H^p(X; \mathbf{Z}) \otimes \mathbf{Q}]$$

avec $p + n \equiv 0, 4$ (modulo 8).

Demonstration voir aussi [4]). Vu la proposition 1.2.1., l'homomorphisme de complexification $c : \tilde{KO}^n(S^0) \longrightarrow \tilde{K}^n(S^0)$ est un isomorphisme pour $n \equiv 0$ (modulo 8) et il est un monomorphisme pour $n \equiv 4$ (modulo 8).

Rappelons aussi que l'on a l'isomorphisme:

$$ch : K^*(X) \otimes \mathbf{Q} \longrightarrow H^*(X; \mathbf{Q})$$

où ch désigne le caractère de Chern (voir [2]). Tenant compte du fait que:

$$\mathrm{rang}_{\mathbf{Z}} \tilde{KO}^{-n}(X) = \mathrm{rang}_{\mathbf{Z}} \mathrm{Gr}(\tilde{KO}^{-n}(X))$$

le résultat cherché en résulte: la notation $\mathrm{Gr}(\tilde{KO}^{-n}(X))$ désigne le group gradué associé:

$$\mathrm{Gr}(\tilde{KO}^{-n}(X)) = \bigoplus_p E_\infty^{p,-n-p}(X)$$

Remarque 1.3.3. On peut énoncer le théorème 1.3.1. sous la forme suivante:

$$E_\infty(X) \otimes \mathbf{Q} \cong E_2(X) \otimes \mathbf{Q}$$

où E_2 et E_∞ désignent les termes de la suite spectrale généralisée, associée à $h(X)$. Il en résulte que pour tout $s \geq 2$ les différentielles d_s prennent

leurs valeurs dans le sous-groupe de torsion du terme E_s; on obtient pour tout $s \geq 2$ les epimorphismes canoniques:

$$H^*(\mathrm{Tors}E_s) \longrightarrow \mathrm{Tors}(H^*E_s \cong E_{s+1})$$

Partie 2

Le but est la démonstration d'un résultat connu de Lazarov (voir [9]): la Z-algèbre Z_8-graduée $KO^*(\boldsymbol{H}S(n,k)))$ est aditivement isomorphe à une $KO^*(+)$-algèbre extérieure sur k générateurs.

4. Nous allons utiliser un travail de R.M.Seymour sur la KR-théorie des groupes de Lie: cette théorie a été introduite par Atiyah dans [1] et elle considère les fibrés complexes á l'involutions. Un tel fibré est un fibré vectoriel complexe (E, π, X) muni des involutions J_E et J_X sur E et respectivement sur X, telles que:

a) $\pi \circ J_E = J_X \circ \pi$

b) la restriction $(J_E)_X : E_x \longrightarrow E_{J_X(x)}$ à la fibre E_x, au dessus du point $x \in X$, est semi-linéaire.

Proposition 2.4.1. *Si l'involution de la base X est l'identité alors on a l'isomorphisme $KR^*(X) \cong KO^*(X)$.*

Preuve. Vu l'hypothèse J_E est une involution semi-linéaire sur chaque fibre E_x: on en déduit que J_E est une involution de l'espace vectoriel réel E_x^R obtenu par restriction de scalaires de $\boldsymbol{C}$ à $\boldsymbol{R}$. Considérons: $F_x = \{u \in E_x^R | J_E(u) = u\}$ (c.a.d.: F_x est le sous-espace propre correspondant à la valeur propre $+1$ de J_E) et soit $F \xrightarrow{\pi} X$ le fibré vectoriel réel ainsi défini. Puisque (E, π, X) est le complexifié de (F, π, X) il résulte que cette association définit l'isomorphisme en question. La proposition 2.4.1. est démontrée.

Dans ce qui suit nous nous placerons sous l'hipothèse de la dernière proposition: rappelons maintenant un théorème de structure (voir [12]) bien adapté à la K-théorie réelle.

Théorème 2.4.2. *Supposons que $\mathrm{Tors}(K^*(X)) = 0$ et que la conjugation $*$ décompose le groupe abélien $K^*(X)$ sous la forme:*

$$K^*(X) = M_+ \oplus M_- \oplus T \oplus T^*$$

de sorte que $*$ soit la multiplication par $+1$ (respectivement -1) sur M_+ (respectivement sur M_-) et d'autre part $*$ échange T et T^*; en outre soient

$h_1, \ldots, h_n \in KO^*(X)$ tels que les $c(h_i)$ forment une base pour $K^*(+) \otimes (M_+ \oplus M_-)$ en tant que $K^*(+)$-module. Alors on a:

$$KO^*(X) = E \oplus r(K^*(+) \otimes T$$

où E désigne le $KO^*(+)$-module engendré par les éléments $h_1, \ldots, h_n$.

Corollaire 2.4.3. *Sous les hypothèse du théorème 2.4.2., si $c(h_1), \ldots, c(h_n)$ forment une base pour $K^*(+) \otimes K^*(X)$, alors en tant que $KO^*(+)$-module $KO^*(X)$ est engendré par $h_1, \ldots, h_n$.*

Définition 2.4.4. *Une représentation linéaire complexe d'un groupe de Lie G est dite de type quaternionique si elle est obtenue par restriction de scalaires (de $\boldsymbol{H}$ à $\boldsymbol{C}$) dans une représentation quaternionique de G.*

Une représentation complexe de G este dite de type réel si elle este la complexifiée d'une représentation réelle de G.

Lemme 2.4.5. *Toute représentation de type quaternionique et de dimension finie d'un groupe de Lie compact G, est auto-conjuguée.*

Une démonstration du lemme 4.5. est donnée dans [5].

Considérons à présent l'anneau des représentations du groupe symplectique $Sp(n)$ et soit ρ_n la classe de la représentation où toute matrice $M \in Sp(n)$ opère dans $\boldsymbol{C}^{2n}$ comme la multiplication à gauche par M; désignons par $\alpha_j = \lambda^j \rho_n$ la j-ième puissance extérieure, avec $j = 1, \ldots, n$.

Proposition 2.4.6. *La conjugaison sur $RSp(n)$ est l'identité.*

Démonstration. Vu le lemme 2.4.5. il suffit de montrer que ρ_n est une représentation complexe de type quaternionique; le résultat s'ensuit immédiatement du fait que les α_i avec $i = 1, \ldots, n$, engendrent l'anneau $RSp(n)$ (voir [8], page 193) et de plus la conjugaison est un homomorphisme d'anneaux.

Soient E un espace vectoriel de dimension complexe paire et $\rho_n : Sp(n) \longrightarrow \mathrm{Aut}_c(E)$; posons $\dim_c E = 2n$ et on considère $J : E \to E$ une anti-involution semi-linéaire définie par: $J(e_i) = e_{n+i}$ pour $1 \leq i \leq n$ et $J(e_i) = -e_{i-n}$ si $n \leq i \leq 2n$, où les e_i (avec $i = 1, \ldots, 2n$) forment la base de E.

En utilisant J on défini sur E une structure d'espace vectoriel quaternionique à gauche:

$$(\lambda + \mu j)z = \lambda z + \mu J(z) \qquad \text{avec } \lambda + \mu j \in \boldsymbol{H} \text{ et } z \in E$$

Ensuite soit $H' : E \times E \longrightarrow \boldsymbol{C}$ la forme antihermitienne définie par:

$$H'(x, y) = H(J(x), y) \qquad x, y \in E$$

où H désigne la forme hermitienne usuelle sur l'espace de la représentation $E \cong \boldsymbol{C}^{2n}$ de ρ_n. Tenant compte de la définition de ρ_n il résulte que toute $M \in Sp(n) \subset U(2n)$ est une isométrie de H', c'est-à-dire: $MJ = JM$; on en déduit que la multiplication par M définit un $\boldsymbol{H}$-automorphisme de E (muni de sa structure quaternionique). La démonstration de la proposition 2.4.6. est ainsi achevée.

5. Afin que rappeler le résultat de Roux sur la K-théorie complexe des variétés quaternioniques de Stiefel, notons par $As_{p(n)}$ l'idéal d'augmentation de l'application:

$$RSp(n) \longrightarrow R\{1\} \cong \boldsymbol{Z}$$

induit par l'inclusion, de sorte que: $RSp(n) = As_{p(n)} \oplus \boldsymbol{Z}$ et P va designer le noyau de l'homomorphisme:

$$RSp(n) \longrightarrow RSp(n-k)$$

induit par l'inclusion de $Sp(n-k)$ dans $Sp(n)$; alors les représentationa virtuelles $\pi_i = \pi_i(\rho_n)$ de $As_{p(n)}$ avec $0 \leq i \leq n$ sont définies telles que $RSp(n) = \boldsymbol{Z}[\lambda^1(\rho_n), \ldots, \lambda^n(\rho_n)[$ s'identifie comme $\boldsymbol{Z}$ algèbre suplimentée à la $\boldsymbol{Z}$ algèbre $\boldsymbol{Z}[\pi_1, \ldots, \pi_n]$ et de plus les éléments $\pi_i(\rho_n)$ avec $n-k+1 \leq i \leq n$ appartiennent à P (voir [11]).

Nous pouvons énoncer le :

Théorème 2.5.1. *(Roux) En tant qu'algèbre $\boldsymbol{Z}_2$-graduée, $K^*(\boldsymbol{HS}(n,k))$ est isomorphe à l'algèbre extérieure $\Lambda_{\boldsymbol{Z}}[\pi_{n-k+1}, \ldots, \pi_n]$, où chaque π_i est de degré -1.*

Roux a également montré que les classes de K-théorie respectivement associées aux π_i par l'isomorphisme de ci-dessus provient de l'image de β (voir 1.1). De plus chaque π_i est de la forme $\tilde{\pi}_i - \deg \tilde{\pi}_i$, où $\tilde{\pi}_i$ est une représentation irréductible et $\deg \tilde{\pi}_i$ son degré: comme l'isomorphisme de périodicité complexe β est additive et $\beta(n) = 0$ pour tout $n \in \boldsymbol{Z}$ (voir [7], page 8) il s'ensuite que:

$$K^*(\boldsymbol{HS}(n,k) \cong \Lambda_{\boldsymbol{Z}}[\beta(\tilde{\pi}_{n-k+1}), \ldots, \beta(\tilde{\pi}_n)]$$

en tant que groupes abéliens.

En utilisant maintenant la proposition 2.4.6. il résulte que les $\tilde{\pi}_i$ (avec $i = n-k+1, \ldots, n$) et par site les $\beta(\tilde{\pi}_i)$ sont auto-conjuguées. On en déduit que la conjugaison sur $K^*(\boldsymbol{HS}(n,k))$ est aussi l'identité.

Remarquons à cette fin que les représentation irréductibles $\tilde{\pi})i$ sont ou bien de type réel ou bien de type quaternionique: la preuve sè repose sur le fait qu'ils sont auto-conjuguées (voir [12], proposition 5.1.).

6. Désignons par t l'isomorphisme $KH^{i+4}(X) \cong KO^i(X)$ et par $h : KH(X) \to K(X)$ la complexification naturelle ; nous avons la relation:

$$\mu_2{}^2 h(y) = (c \circ t)(y) \qquad \text{pour tout } y \in KH(X)$$

(voir [12] lemme 5.2.), où μ_2 est un élément inversibil de la $\boldsymbol{Z}$-algèbre $K^*(+)$, plus précisément μ_2 remplit la condition $\mu_2{}^4 = 1$.

On identifie tout $x \in K^*(X)$ à l'élément $1 \otimes x$ de $K^*(+) \otimes K^*(X)$ et alors la relation de ci-dessus devient:

$$1 \otimes h(y) = \mu_2{}^2(1 \otimes (c \circ t)(y)) \qquad \text{pour tout } y \in KH^{-1}(X) \tag{6.1}$$

en utilisan que $\mu_2{}^2 = 1$.

Pour détermine la structure additive du groupe $KO^*(\boldsymbol{HS}(n,k))$ nous allons montrer que les éléments $\beta(\tilde{\pi}_i)$, avec $n-k+1 \leq i \leq n$, sont des complexifications de classes réelles.

Vu la remarque faite du paragraphe précèdent, soit $\tilde{\pi}_i$ est la complexification d'une représentation réelle de $Sp(n)$ et on a $\beta(\tilde{\pi}_i) = c(x_i)$ avec $x_i \in KO^{-1}(\boldsymbol{HS}(n,k))$, soit $\tilde{\pi}_i$ est de type quaternoinique et on peut écrire: $\beta(\tilde{\pi}_i) = h(y_i)$ avec $y_i \in KH_{-1}(\boldsymbol{HS}(n,k))$ pour un certain $i = n-k+1, \ldots, n$.

Alors la formule (6.1.) prend la forme:

$$1 \otimes \beta(\tilde{\pi}_i) = \mu_2{}^2(1 \otimes (c \circ t)(y_i))$$

En notant par π_i^r les $\tilde{\pi}_i$ qui sont de type réel et par π_i^h les $\tilde{\pi}_i$ qui sont de type quaternionique: nous obteron:

$$1 \otimes \beta(\pi^r_{i_1}) \cdots \beta(\pi^r_{i_p}) \beta(\pi^h_{i_{p+1}}) \cdots \beta(\pi^h_{i_q}) =$$

$$= (\mu_2{}^2)^{q-p}(1 \otimes c(x_{i_1}) \cdots c(x_{i_p})(c \circ t)(y_{i_{p+1}}) \cdots (c \circ t)(y_{i_q})) = \tag{6.2}$$

$$= (\mu_2{}^2)^{q-p}(1 \otimes c(x_{i_1} \cdots x_{i_p}\, t(y_{i_{p+1}}) \cdots t(y_{i_q})))$$

avec $n-k+1 \leq i_1 < \cdots < i_p < \cdots < i_q \leq n$, $p < q$ et $1 \leq p \leq < q \leq n$.

Vu le théorème 2.5.1. les monômes du membre gauche de la formule (6.2) forment une base du $K^*(+)$-module $K^*(+) \otimes K^*(\boldsymbol{HS}(n,k))$, base qui est constituée par des complexifiées de la classes réelles. En conséquence on peut appliquer le corollaire 2.4.3. et nous avons donc démontré le:

Théorème 2.6.2. *Le Z algèbre Z_8 graduée $KO^*(HS(n,k))$ est isomorphe, en tant que groupe abélien, à l'algèbre extérieure sur k générateurs $\Lambda_{KO^*(+)}(x_i, t(y_j))$.*

Partie 3

7. En nous appuyant sur la structure Z_8-graduée de $KO^*(HS(n,k))$, nous sommes maintenant en mesure d'établir le résultat principal de ce travail:

Théorème 3.7.1. *La suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch associée à $KO^*(HS(n,k))$ est dégénérée et on a les isomorphismes de groupes abéliens:*

$$KO^q(HS(n,k)) \cong E_2^q(HS(n,k)) \cong E_\infty^q(HS(n,k))$$

pour tout $q = 0, 1, \ldots, 7$.

Démonstration. *Puisque $HS(n,k)$ est un CW complexe fini sans torsion (sa cohomologie entière étant une algèbre extérieure engendrée par k éléments) nous pouvons appliquer les résultats énoncés dans 1.2. et 1.3. On obtient:*

$$\text{Tors } E_2(HS(n,k)) \cong [\text{Tors } KO^*(S^0)]^{2^k} = (Z_2)^{2^{k+1}}$$

parce que Tors $KO^*(S^0) \cong (Z_2)^2$ voir le tableau de 1.1.

D'autre part, la remarque 1.3.3. nous donne:

$$\text{Tors } E_\infty(HS(n,k)) \cong (Z_2)^r \text{ avec } r \leq 2^{k+1}$$

Vu le théorème de Roux 2.5.1. et la proposition 1.2.1., la torsion de la K théorie réelle de $HS(n,k)$ est 2 torsion; enfin le théorème 2.6.2. nous permet d'écrire:

$$\text{Tors } KO^*(HS(n,k)) \cong (Z_2)^{2^{k+1}}$$

En utilisant maintenant le monomorphisme canonique:

$$\text{Gr}(\text{Tors } KO^*(HS(n,k))) \longrightarrow \text{Tors } \text{Gr}(KO^*(HS(n,k)))$$

nous en obtenons les inégalités:

$$2^{k+1} \leq r \leq 2^{k+1} \tag{7.1}$$

d'où il vient que Tors $E_2(HS(n,k)) =$ Tors $E_\infty(HS(n,k))$; tenant compte de la torsion de $KO^*(S^0)$, la dernière égalité signifie que les différentielles $d_s^{p-s,q+s-1}$ et $d_s^{p,q}$ sont nulles pour tout p et tout $s \geq 2$ dès que $q \equiv -1, -2$ (modulo 8). En combinant ce résultat avec la proposition 1.2.2. on obtient l'isomorphisme:

$$E_2(HS(n,k)) \cong E_\infty(HS(n,k))$$

c'est-à-dire la première partie du théorème a été prouvée.

Les inégalités (7.1) nous donnent aussi que Tors $E_\infty(HS(n,k)) =$ $=$ Tors $KO^*(HS(n,k))$ et en utilisant de nouveau les monomorphismes canoniques:

$$\text{Gr}(\text{Tors } KO^q(HS(n,k))) \longrightarrow \text{Tors } E_\infty^q(HS(n,k))$$

pour $q = 0, 1, \ldots, 7$, on en déduit que $E_2^q(HS(n,k))$, $E_\infty^q(HS(n,k))$ et $KO^q(HS(n,k))$ ont la même torsion pour tout q. Or d'après la proposition 1.3.2. $KO^q(HS(n,k))$ et $E_2^q(HS(n,k))$ ont aussi les parties libres isomorphes pour $q = 0, 1, \ldots, 7$; enfin vu un problème d'extension de groupes on a:

$$\text{rang}_Z E_\infty^q(HS(n,k)) = \text{rang}_Z KO^q(HS(n,k)) \text{ pour tout } q.$$

Ainsi le théorème 3.7.1. a été démontré.

BIBLIOGRAPHIE

1. A t i y a h, M.F. *K theory and Reality*: Quart. J.Math.Oxford(2), 17(1966), p.367–386.
2. A t i y a h, M.F. and H i r z e b r u c h, F. *Vector bundles and homogeneous spaces*: Proc. Symp. Pure Math. 3, AMS Proc.(1961, p.197–221.
3. B o t t, R. *Lectures on $K(X)$*; Benjamin, New York, 1969.
4. C o s t i n e s c u, C.N. *Aplicații în KO teorie*: St.Cerc.Mat., tom 39,3 (1987) p.231–239.
5. F r a i t a s, R. *K théorie réelle des variétés de Stiefel sans torsion*: Thèse, U.S.T. de Lille 1, 1985.
6. H u t o n, P. *General cohomology theory and K theory*: London Math.Soc. Lecture Notes 1, Cambridge (1971).
7. H o d g k i n, L. *K theory of Lie groups*: Topology 6(1967), p.1–36.
8. H u s m o l l e r, L. *Fibre bundles*: McGraw-Hill, New York, 1966.
9. L a z a r o v, C. *Secondary characteristic in K theory*: Trans. Amer. Math. Soc. 136(1968) p.36–59.

10. M a h a m m e d, N., P i c c i n i n i, R. and S u t e r, U. – *Some applications of topological K theory*; North Holland Math.Studies 45, 1980.
11. R o u x, A. – *Application de la suite spectrale de Hodgkin au calcul de la K-théorie des variétés de Stiefel*; Bull.Soc.Math.France 99(1971), p.345-368.
12. S e y m o u r, R.M. – *Real K-theory of Lie groups and homogeneous spaces* Quart.J.Math.Oxford (2), 24(1973).

Reçu : 10.XI.1995

Département de Mathématiques,
Université Technique de Constructions,
Bucarest, ROUMANIE

ANALELE ŞTIINŢIFICE ALE UNIVERSITĂŢII "AL. I. CUZA" IAŞI
Tomul XLII, Supliment, s.I.a, Matematică, 1996

ON FUZZY CONTINUITY

BY

A.A.ALLAM

1. Introduction. The concepts of fuzzy almost continuity and fuzzy weakly continuity defined by Azad [3] were introduced by Yalvac [8] by using the concept of quasi-coincidence. Also Allam and Zahran [1] introduced and studied the concept of fuzzy δ continuity by using the concept of quasi-coincidence.

The purpose of this paper is to investigate the interrelation among these concepts. In Section 3 we show that both fuzzy continuity and fuzzy δ-continuity (resp. fuzzy weakly continuity and fuzzy almost continuity Type II) are independent. Also we prove that fuzzy almost continuity implies fuzzy θ-continuity. In Section 4 we investigate some properties of δ-closure and θ closure.

2. Preliminaries. Throughout this paper X and Y mean fuzzy topological spaces (fts, s, for short). The value of a fuzzy set A at the element x of X will be denoted by $A(x)$, $P \in A$ means that a fuzzy point P takes its non zero value in (0,1] at the support x_p and $p(x_p) \leq A(x_p)$ [5]. The definitions of fuzzy sets, fts, s and other concepts can be found in [1,9]. The words "fuzzy", "quasi", "neighborhood" will be abbreviated as "f", "q" and "nbd" respectively.

Definition 2.1. *Let A be a fuzzy set of a fts X, then*
(i) A is called f. regular open [3] if $A = (\overline{A})^{\circ}$.
(ii) A is called f. semiopen [3] if there exists a f. open set V such that $V \leq A \leq \overline{V}$. The family of all f. regular open sets will be denoted by $RO(X)$.

Communicated at the 25-th National Conference on Geometry and Topology, September 18-23, 1995, Iaşi, România