

## VARIATELE FORME ALE PROBLEMEI MATEMATICE. ORIGINEA, ELABORAREA ȘI PREZENTAREA EI

DE

A. MYLLER

*Omagiu acad. prof. O. Mayer cu ocazia împlinirii a 70 de ani*

Aș dori să vorbesc de aspectul exterior, neadâncit al problemelor matematice, adică de cum se prezintă ele la prima vedere, de circumstanțele în care ele apar, de metode și de istorie.

Problema în matematică este un adevăr, pe care-l bănuiești și ți-l propui să-l demonstrezi. Ea cuprinde deci două procese de gândire. Primul este dibuirea, din totalitatea lucrurilor matematice, a unei chestiuni noi, necunoscute, care ți se pară interesantă și utilă, demnă de a figura printre cele deja cunoscute. Al doilea proces constă din determinarea lanțului de deducții ce trebuie să faci, ca să ajungi la confirmarea bănuielii adică la demonstrație. Când demonstrația e făcută, adică e exactă și completă, atunci problema devine o teoremă.

Totalitatea teoremelor formează știința matematică însăși. Problemele alimentează matematica cu materialul nou, cu teoremele în care ele se transformă prin rezolvare.

Existența problemelor se confundă cu viața științei. O știință rămîne atîta timp vie cît are belșug de probleme, lipsa problemelor înseamnă moartea acelei științe. Problema este mecanismul care pune matematica în mișcare. Altfel, ea ar fi o știință statică, o dogmă, compusă dintr-un număr finit și neschimbat de teoreme, fără importanță pentru progres.

Așa stînd lucrurile, o primă întrebare ce apare este: de unde își extrage problema materialul de care are nevoie, adică adevărurile ce vrea să demonstreze. Desigur aceste adevăruri se găsesc în afară de noi și sînt independente de noi; nu sînt mentale, nu le construim noi, se află în natură. Teoremele ce demonstrăm, despre care obișnuim să spunem cu em-

fază, că sînt creația noastră personală, sînt de fapt cercetări, constatări asupra lucrurilor din natură, sînt observații. Hermite, renumitul matematician francez, a exprimat faptul acesta în felul următor: „Mă gîndesc că aceste lucruri matematice există în afară de noi cu același caracter de necesitate ca și lucrurile realității obiective și că noi le întîlnim, sau le descoperim, sau le studiem, ca și fizicienii, chimiștii sau zoologii“.

Ar fi greu să ne închipuim faptele altfel, să ne închipuim altfel universalitatea, valoarea absolută a teoremelor. Nu putem crede, că un rezultat matematic, construit independent de o minte omenească, poate să reapară de la sine și la fel în alte minți. Mai mult chiar, fără prezența lumii exterioare, nici o cunoștință matematică n-ar fi putut lua naștere. Nu ne putem închipui ca, într-o lume redusă la stare de numai „pură inteligență“, să se poată ajunge la noțiunea de figură sau de număr.

Descoperirea matematică, adică constatarea în sînul naturii a unui fapt matematic nou, pînă atunci necunoscut, acest pas înainte în cunoașterea realității, are în cercetarea matematică un caracter deosebit de acel din alte științe. A fost pus în evidență chiar în definițiile matematicii, fără să se fi reușit a-l fixa complet și definitiv. Domeniul de cercetare al matematicilor se extinde mereu și face astfel ca definițiile să varieze. Aproape fiecare țară are definiția ei uzitată, societăți savante o au pe a lor, ca și unii savanți în particular. Există o definiție a enciclopediei lui Diderot și d'Alembert, una a Oxfordului, una a lui Frederic Engels, care a fost adoptată de Uniunea Sovietică și acum și de noi. Aceasta din urmă se distinge prin forma ei clară și modul cum sînt accentuate frumos părțile ei esențiale. Pe mine m-a impresionat și comentariul ce l-au făcut doi eminente savanți sovietici, Vinogradov și Mushelișvili.

Matematica a fost definită de Engels ca „știința formelor spațiale și a raporturilor cantitative din lumea reală“. În felul acesta matematica face parte integrantă din știința mare a naturii, se impune peste tot, unde e spațiu și cantitate.

În cercetarea matematică se face abstracție de proprietățile particulare ale fiecăruia din obiectele materiale; se consideră obiectele mai simplificate, despuiate de tot ce este caracteristic fiecăruia în parte. Se atribuie lor numai cîteva proprietăți, care sînt esențiale, generale și comune la foarte multe și foarte variate obiecte din natură: sînt forma și cantitatea.

În felul acesta influența matematicilor e aproape universală, domeniul de cercetare și aplicare cuprinde cele mai variate științe. Apoi faptul că matematica cercetează proprietăți rafinate, debarasate de amănunte, o face simplă și prin aceasta trainică, ca toate lucrurile nu prea împodobite.

Teoriile științifice nu sînt eterne; istoria ne arată că fiecare epocă a avut teoriile ei, care în epoca următoare au căzut, au fost înlocuite prin altele noi. Cîte teorii în fizică, în chimie, în biologie s-au perindat, schimbîndu-se chiar la intervale scurte.

Numai în matematică teoriile sînt mai solide. Studiul spațiului datează din antichitate, grecii ni l-au transmis în forma perfectă a geometriei

lui Euclid. Rezultatele acestei opere au rămas, timp de peste două mii de ani, nezdruncinate și socotite nemodificabile și eterne, pînă la începutul secolului al 19-lea. Numai pînă acum cîteva decenii, în școlile din Anglia, se preda geometria după un text, foarte puțin modificat, al lui Euclid.

Să ne închipuim acum, că ideea ce ne-am făcut de spațiu s-ar schimba cu diferențe sensibile și la intervale nu prea lungi. Atunci, o dată cu ea, toate teoriile celorlalte științe dependente de matematică s-ar schimba și ele. Cercetările științelor nematematice, deja complicate pentru că privesc proprietăți mai multe, mai variate și mai particulare, s-ar complica și mai mult. E o fericire pentru celelalte științe, că matematica e cea mai stabilă dintre ele. Durabilitatea legilor matematice garantează progresul celorlalte științe.

Rezolvarea unei probleme reprezintă nu numai găsirea unui adevăr nou, dar și satisfacerea unei curiozități științifice, a unei dorințe de a prevedea viitorul. Care dintre noi, a spus marele matematician David Hilbert, n-ar ridica bucurios vâlul, îndărătul căruia stă ascuns adevărul, pentru ca să poată arunca o privire la progresele științei, să afle secretul dezvoltării ei, să vadă către ce țel se îndreaptă eforturile viitoarelor talente științifice, ce metode și fapte noi se descoperă pe cîmpul întins și bogat al gândirii științifice.

A cunoaște drumul pe care-l urmează gîndirea în timpul dîbuirii și rezolvării unei probleme, e o chestiune departe de a fi lămurită. Am auzit pe Felix Klein spunînd că drumul pentru un matematician talentat cît și pentru un altul mai puțin talentat este la fel, numai că pentru rezolvarea unei aceleiași probleme unul întrebuițează un timp mai scurt decît celălalt. Psihologul Souriau a afirmat în 1881, că, invențiile mari apar prin noroc. Gauss, referindu-se la o problemă aritmetică pe care încercase să o rezolve fără succes, cîțiva ani în urmă, scrie că, în sfîrșit, a reușit nu prin eforturile sale chinuitoare din trecut, dar deodată, probabil prin grația lui dumnezeu. Poincaré credea că inspirația apare instantaneu, dar după o perioadă de formare a ei în inconștientul gînditorului. Psihologii au numit aceste două faze ale gîndirii incubatie și iluminatie. Istoria marilor descoperiri și a legendelor despre învățați ne spune că iluminatia matematică poate veni, în baie la Siracuză, pe bancă sub un măr din o grădină în Anglia, la Paris pe treptele unui omnibus, sau în timpul unei ședințe furtunoase în parlamentul francez.

E foarte curios că, pe cînd lumea în general își închipuie că matematica e ușoară pentru cel ce are talent, matematicienii mari, dimpotrivă, declară fără jenă că problemele ei deseori îi obolesc, le încordează mintea din cale afară, îi chină fără îngăduință. Cei ce au primit din cer știința divină, spune Poincaré, n-au fost scutiți de muncă mai mult ca ceilalți; geniul lor n-a făcut decît să le impună probleme mai grele, sarcini mai multe. Marele Gauss, princeps mathematicorum, scrie în jurnalul lui intim, după ce nu-i reușise o problemă, „lieber sterben als ein solches Leben leben“, mai bine să mori decît să trăiești o astfel de viață. Numai Lagrange, mai sigur pe rezistența lui fizică, se ridică împotriva minții, cînd ea obosită ar dori odihna. „Mintea e leneșă, trebuie să-i previi moliciunea ei obișnuită, ca să o poți folosi, trebuie să o exersezi“.

Este, desigur, greu și adesea imposibil, să judeci valoarea unei probleme, atâta timp cât ea n-a fost rezolvată. Dar, cu toate acestea, sînt matematicienii mari, care au creat probleme importante prin consecințele lor, fără să le fi știut dinainte soluțiile. S-ar zice, că posedau semnele secrete, ce prevesteau succesul unei probleme bune.

De mult s-a spus, că nu putem privi o problemă, considerată izolat, ca perfect pusă, pînă nu reușim să o formulăm așa de limpede, ca să-i poată înțelege sensul primul om ce-l întâlnești pe stradă. Hilbert a exprimat mai precis aceste condiții :

1. Problema să fie enunțată clar și ușor de înțeles, căci claritatea și înțelesul ușor ne atrage, iar complicatul ne înspăimîntă.

2. Problema să fie grea, ca rezolvarea ei să ne întărească, dar totuși să nu fie prea greu accesibilă, ca să nu ne descurajeze.

După cum am văzut, o problemă are două părți esențiale : întrebarea și răspunsul, sau dibuirea și lămurirea sau încă bănuiala și confirmarea. De obicei aceste două părți au același autor. E mai cuminte și mai practic, cînd crezi în justetea celei dintîi, să încerci și pe a doua. Pe lîngă aceasta, mai ales partea a doua aduce gloria descoperirii.

Partea întîia, cînd e formulată singură, se prezintă mai mult ca o întrecere științifică propusă de unii savanți altora. Numai decorul acestor competiții a variat mult în decursul vremii. Matematicienii secolelor al XVI-lea și al XVII-lea au fost savanți răzleți, talente viguroase, care s-au manifestat fără îndrumarea vreunei școli, aproape izolați și insuficient informați. Au comunicat între ei mai mult prin scrisori, caracterizate prin un stil trufaș, de laudă personală și de sfidare, ce corespundea poate moravurilor vremii.

Cu timpul aspectul acesta s-a schimbat, a devenit mai politic, mai util, mai conform împrejurărilor științifice și nevoilor societății. Aș dori să ilustrez aceste aspecte prin cîteva exemple.

Iată rîndurile scrise în 1696 de către renumitul matematician elvețian Ioan Bernoulli, cînd a creat calculul variațiilor, una din ramurile matematice astăzi foarte mult prețuite : „Experiența arată că spiritele nobile nu pot fi mai bine îmboldite la munca științifică, decît propunîndu-le probleme grele și în același timp folositoare, prin rezolvarea cărora să obțină renume și slavă pentru totdeauna. Astfel sper să obțin recunoștința lumii matematice dacă, după exemplul oamenilor ca Mersenne, Pascal, Fermat, Viviani și alții, propun distinșilor analiști de acum o problemă cu care să-și încerce metodele și puterile“. Cu aceste cuvinte a anunțat Ioan Bernoulli : *Problema novum ad cuius solutionem mathematici invitantur*, problema celei mai rezezi căderi, pe care în același an a rezolvat-o fratele său Iacob Bernoulli.

Un alt exemplu, din anii ce au urmat, din 1805, este al marelui matematician Lagrange, căruia i-a plăcut și lui forma întrebătoare, voină a problemelor propuse. Le-a dat însă o nuanță nouă, mai mult profesională, pedagogică, care dăinuiește, progresează și astăzi, mai ales în matematicile elementare. El scrie revistei „Correspondență despre Școala politehnică“, că

i se pare propriu, ca revista să întrețină o emulație printre tineri, inserînd spre rezolvare chestiuni scurte, care să constituie un exercițiu pentru absolvenți cît și pentru elevii școlii politehnice. El însuși anexează o problemă interesantă, pe care apoi a rezolvat-o elevul Fresnel, viitor mare fizician.

Acum 64 de ani în urmă, la congresul internațional de matematici de la Paris, renumitul matematician David Hilbert a propus 23 de probleme spre rezolvare. Ele au avut mare răsunet și matematicieni talentați din toată lumea s-au grăbit să le încerce. După o jumătate de secol de admirabile străduințe, aproape toate au fost rezolvate. Problemele lui Hilbert au fost grele, importante, în mare parte din domeniile cele mai înalte ale matematicilor, fructul unei intuiții geniale, care în decursul strălucitei lui cariere profesionale, l-au adus la convingerea că vor putea fi rezolvate.

În secolul al XIX-lea, ca rezultat al schimbărilor politice și sociale, rolul savanților a devenit important în stat și s-a ajuns a se atribui universităților misiunea de a forma cercetători științifici.

Profesorul, acum ales dintre savanți, alege din capitalul de adevăruri matematice necunoscute, dar bănuite de el, pe unele ce le oferă elevilor, ca să le rezolve. Cînd ei găsesc soluțiile, cînd au o oarecare importanță și amploare sînt publicate și constituie tezele de doctorat, sau disertațiile inaugurale.

Problema, apărută la început ca o întrebare, adresată de savanți mari altora tot mari, a luat în secolul al XIX-lea și un sens de formare a tinerelor talente, de inițiere în arta subtilă și grea a creației originale.

Printre aceste probleme cu caracter bine pronunțat de întrebare sînt și unele ce ar putea fi grupate deosebit. E cazul cînd promotorul problemei, după muncă susținută, descurajat de nereușită, dar convins de importanța chestiunii, o dă în vileag, o propune celorlalți matematicieni să o rezolve. Dar se întîmplă că dificultățile persistă și după cîtva timp problema cade în uitare. Numai înprejurări noi în știință, rezultate neașteptate apărute în urmă, o scot din nou la iveală și așa ea, în noile condiții, își găsește rezolvitorul.

Vă rog să-mi dați voie să ilustrez acest caz printr-un exemplu ce ne stă aproape, ieșit din străduințele noastre din Iași. În 1900, matematicianul grec N. I. Hatzidakis propune, în revista „L'Intermédiaire des mathématiciens“, o problemă care reprezenta o extindere a unei chestiuni ce constituia una din cercetările importante ale tatălui propunătorului I. N. Hatzidakis, care ca și fiul era matematician de valoare. Această problemă a rămas 40 de ani fără răspuns, cînd în 1939, noi aci în Iași am ajuns la un rezultat ce constituia o indicație la întrebarea pusă odinioară. Chestiunea generală rămînea însă deschisă și atunci colegul nostru Gheorghe Gheorghiev a acceptat să se ocupe de dînsa și a rezolvat-o cu curaj și pricepere, în teza lui frumoasă de doctorat.

Sînt și probleme vechi, unele care datează din antichitate, cărora nu li s-a găsit rezolvarea decît tîrziu în urmă, sau de loc pînă acum. Lumea se obișnuise să nu se prea ocupe de ele. Dar din cînd în cînd apar unii

matematicieni, care le iau din nou în considerație. Unii rezolvă problema, alții nu și câteodată unii din ei profită de ocazie și descoperă, îmboldiți de aceasta, alte fapte noi, unele importante. Iată un exemplu:

Diophant, unul din marii matematicieni ai civilizației grecești, a pus în aritmetica lui problema următoare: să se desfacă un pătrat în două pătrate. Trebuie să spun că Diophant înțelegea prin pătrat, un pătrat al unui număr întreg. Se știa o soluție de la egipteni: pătratul lui 5 e tot așa de mare ca pătratele numerelor 3 și 4 împreună. Se mai știau și altele, dar lumea, nu putea desface un cub în două cuburi.

Fermat, în exemplarul lui al unei traduceri în latinește a lui Diophant, ce apăruse pe vremea aceea (1621), a notat următoarele pe marginea paginii unde vorbea tocmai de problemă: am găsit o demonstrație admirabil de sănătoasă a imposibilității soluționării problemei pentru orice exponent în afară de doi. Și apoi adăuga: spațiul e prea mic pentru a o dezvolta aci. Dar demonstrația n-a apărut și astfel s-a născut „teorema lui Fermat” pe care, de atunci, mulți matematicieni au încercat fără succes s-o confirme sau s-o infirme. Totuși în anul 1857, Kummer, mare matematician îmboldit de „teorema lui Fermat”, a creat în aritmetica superioară, teoria numerelor ideale, o mare descoperire.

Un german, pe nume Paul Wolfskehl, mort în 1927, a avut curioasa idee să ofere Academiei din Göttingen suma de 100 000 de mărci, ca să se acorde ca premiu celui ce va dezlega problema lui Fermat. Academia a primit donația cu condiția ca, pînă la dezlegarea problemei, să se acorde din veniturile donației, premii mai mici celor ce vor descoperi lucruri mai mult sau mai puțin asemănătoare celor cerute de problema lui Fermat. Și astfel această interpretare dată premiului Wolfskehl a prilejuit demonstrația, dacă nu a teoremei lui Fermat, a altor adevăruri matematice.

Dacă ne întrebăm de rolul problemelor în matematică, ar fi greu ca problemele formulate ca o simplă întrebare și un răspuns precis cerut altora, să cuprindă idei generale, fundamentale pentru întreaga știință; acestea n-ar încăpea în cadrul îngust al problemelor așa formulate. Dar pornind de la una din ele, se poate naște o alta sau mai multe probleme noi, care grupate adecvat, să formeze o teorie. Așa este problema curbelor de cea mai repede cădere, propusă de Ioan Bernoulli, rezolvată de Iacob Bernoulli, generalizată de Euler, reluată cu metode analitice mai perfecționate de Lagrange, Legendre și Jacobi. Rezultatele au constituit, reunite și perfecționate, o splendidă ramură a matematicilor moderne: calculul variațiilor.

Tot așa e cazul teoriei relativității, despre care Mendel Haimovici a făcut o comunicare. Două idei cu enunțuri simple, obișnuite, despre suprafață și despre lumină, au scos la iveală o idee mare, extraordinară, profundă, care a dat alt aspect felului de a înțelege lumea.

După cum vedeți, matematica nu progresează în mod continuu și uniform, ci treptat, prin sărituri, prin probleme de sine stătătoare, unele înrudite, altele cu totul deosebite. Se întâmplă câteodată ca vreuna din

ele, prin vreo idee neașteptată, ingenioasă care apare în timpul elaborării, să capete importanță deosebită, să dea speranțe pentru viitor. I se zice problemă cu perspectivă.

Dacă am scris scurt și fugitiv de această lume abstractă a matematicilor, care cuprinde laolaltă prezentul și viitorul, separată doar prin vălul seducător ce desparte cunoscutul de necunoscut, trebuie să spun aceuia ce vrea să privească spre necunoscut că vălul e greu de străbătut și că nu poți zări ceva decât în imediata apropiere a lui.

Totuși, faptul nu e descurajător; gestul ridicării vălului ce ascunde adevărul nu este indiscret ci nobil, e pornit cu sentimentul frumosului matematic, al eleganței geometrice și al armoniei numerelor. Merită să ne trudim cu el.