Anca CROITORU

INTEGRALE ÎN RAPORT CU MULTIMĂSURI

Referenţi ştiinţifici:

Prof.dr. **Anca Maria Precupanu**,
Universitatea "Al.I. Cuza" Iaşi

Prof.dr. **Mihai Turinici**,
Universitatea "Al.I. Cuza" Iaşi

"To Sir Professor Ignatie Henny, with Love"

Cuprins

PREFAŢĂ

Analiza multivocă a cunoscut un progres remarcabil în ultimii cincizeci de ani, îmbogăţindu-se mereu prin noi concepte, rezultate importante şi aplicaţii deosebite. O serie de probleme apărute în teoria controlului, matematica economică şi management, teoria jocurilor, programare neliniară, biomatematică sau statistică a consolidat baza teoretică şi tehnicile specifice analizei multivoce. Cercetările efectuate de-a lungul anilor au pus în evidenţă anumite neajunsuri în lucrul cu probleme "bine puse" sau liniare, în care apar doar funcţii cu valori punctuale. În multe aplicaţii, astfel de ipoteze fie exclud aspecte importante ale problemei fie, mai grav, nu duc la obţinerea unui model acceptabil al fenomenului cercetat. Astfel de consideraţii au condus la o matură dezvoltare a analizei multivoce, la apariţia unor valoroase lucrări dintre care amintim monografiile realizate de Klein şi Thompson [89], Aubin şi Frankowska [6], Hu şi Papageorgiou [81,82].

Multifuncţiile au fost studiate, de exemplu, în legătură cu probleme de punct fix (Kakutani [86], Eilenberg şi Montgomery [61]), statistică (Kudo [90], Rickart [116]), economie (Arrow şi Debreu [2], Aumann [8], Aumann şi Perles [9], McKenzie [97]), optimizare şi control optimal (Hildenbrand [80], Rockafellar [117], Strassen [122]).

Ideea introducerii noţiunii de multifuncţie măsurabilă îi aparţine probabil lui Kudo [90]. Studiul sistematic al diferitelor concepte de măsurabilitate pentru multifuncţii a început la mijlocul anilor şaizeci când a devenit clară implicarea multifuncţiilor şi a proprietăţilor acestora în multe domenii ca matematica economică, optimizare şi control optimal. Multifuncţiile măsurabile apar în sisteme cu date măsurabile, în liniarizarea unui sistem de control (sau a unei incluziuni diferenţiale) de-a lungul unei soluţii ori în modelarea proceselor de naştere şi creştere (Aletti, Bongiorno şi Capasso [1]).

Există diverse moduri de a introduce o multifuncţie măsurabilă, plecând de la diferite definiţii echivalente ale unei funcţii măsurabile din teoria clasică (dintre care amintim măsurabilitatea contraimaginilor de mulţimi deschise sau existenţa unui şir de funcţii etajate convergent punctual la funcţia respectivă) şi ţinând cont de contextul problemei sau al aplicaţiei urmărite (a se vedea, de exemplu, Datko [47,48], De Blasi şi Lasota [49,50], Wagner [129]).

Dacă $(S, \mathcal{A})$ este un spaţiu măsurabil, (X, τ) un spaţiu topologic şi $\mathcal{P}_0(X)$ familia submulţimilor nevide ale lui X, atunci s-a considerat următorul concept:

(1) o multifuncţie $F : S \to \mathcal{P}_0(X)$ se numeşte $\mathcal{A}$-măsurabilă dacă pentru orice mulţime $D \in \tau$ are loc

$$F^{-1}(D) = \{s \in S | F(s) \cap D \neq \emptyset\} \in \mathcal{A}.$$

Aumann [7], folosind noţiunea de mulţime analitică sau Suslin a introdus următoarea definiţie:

(2) o multifuncţie se numeşte măsurabilă dacă graficul său este mulţime măsurabilă.

Prin generalizare, Debreu [51] a înlocuit mulţimile analitice cu spaţii măsurabile pentru a defini măsurabilitatea multifuncţiilor cu valori compacte. Astfel, Debreu a considerat următoarea definiţie:

(3) o multifuncţie $F : S \to \mathcal{P}_0(X)$, cu valori compacte, se numeşte $\mathcal{A}$-măsurabilă dacă funcţia $F : S \to \mathcal{P}_k(X)$ este $\mathcal{A}$-măsurabilă, unde $\mathcal{P}_k(X)$ este familia submulţimilor nevide şi compacte ale lui X.

În anumite condiţii însă aceste definiţii coincid. Astfel, dacă $(S, \mathcal{A}, \mu)$ este spaţiu cu măsură σ-finită completă, X este spaţiu metric complet separabil şi F este cu valori nevide închise, atunci (1)$\Longleftrightarrow$ (2), iar dacă X este spaţiu metric şi F este cu valori nevide compacte, atunci (1)$\Longleftrightarrow$(3).

În legătură cu multifuncţiile măsurabile, merită să amintim teoria martingalelor cu valori mulţimi, teorie cu numeroase aplicaţii în domeniul sistemelor informaţionale (De Korvin şi Kleyle [53]) şi în matematica economică (Papageorgiou [100]).

Un alt domeniu important în cadrul analizei multivoce este cel al integralelor multivoce. Acest domeniu a cunoscut o amplă dezvoltare după ce Aumann [7] a definit în 1965 o astfel de integrală, cu numeroase aplicaţii în matematica economică şi teoria controlului.

Există mai multe abordări în definirea unei integrale multivoce.

I. Integrala unei multifuncţii în raport cu o măsură (MF-M).

Probleme din economia matematică, cum ar fi cele din teoria echilibrului economic sau teoria economiei competitive, au condus la necesitatea definirii unei integrale pentru multifuncţii. Un asemenea concept a fost introdus de Aumann [7] care, motivat de astfel de probleme, a înlocuit mulţimile finite de agenţi s dintr-o mulţime S cu mulţimi arbitrare dintr-o σ-algebră de părţi ale lui S şi suma cu integrala. Astfel, dacă F este o multifuncţie de la spaţiul cu măsură $(S, \mathcal{A}, \mu)$ la spaţiul Banach X, $L^1(\mu)$ este spaţiul funcţiilor μ-integrabile Dunford [60], definite pe S cu valori în X şi $\mathcal{S}(F) = \{f \in L^1(\mu) | f(s) \in F(s)\ \mu\text{-a.p.t. în } S\}$ atunci mulţimea

$$(A) \int_S F d\mu = \left\{ \int_S f d\mu | f \in \mathcal{S}(F) \right\}$$

se numeşte *integrala Aumann a multifuncţiei F în raport cu μ.* Un asemenea tip de integrală se foloseşte în multe probleme de convexificare (aşa numitele relaxări) pentru că integrala unei multifuncţii măsurabile este convexă, chiar dacă valorile multifuncţiei nu sunt convexe (a se vedea Teorema 1.5.6). Această proprietate a fost, de fapt, motivaţia originală pentru a introduce integrala unei multifuncţii în matematica economică şi teoria jocurilor.

Integrala definită de către Debreu [51], în acelaşi context în care funcţia de integrat este cu valori mulţimi şi măsura scalară, diferă de integrala Aumann. Astfel, fie F o multifuncţie de la spaţiul cu măsură finită completă $(S, \mathcal{A}, \mu)$ la spaţiul Banach real $(X, \|\cdot\|)$ cu originea 0 şi $\mathcal{P}_{kc}(X) = \mathcal{P}_{kc}$ spaţiul submulţimilor nevide compacte convexe ale lui X. Conform unui rezultat de scufundare al lui Radström [114], spaţiul $\mathcal{P}_{kc}$ poate fi scufundat ca un con convex de vârf $\{0\}$ într-un spaţiu Banach real $\widetilde{\mathcal{P}}_{kc}$. Dacă $E \in \mathcal{P}_{kc}$, atunci se notează cu $\widetilde{E}$ imaginea lui E în $\widetilde{\mathcal{P}}_{kc}$. În particular, pentru multifuncţia F de la S la $\mathcal{P}_{kc}$, $\widetilde{F}$ este funcţia $s \mapsto \widetilde{F}(s)$. O multifuncţie F de la S la $\mathcal{P}_{kc}$ se numeşte *Debreu integrabilă* dacă funcţia $\widetilde{F} : S \to \widetilde{\mathcal{P}}_{kc}$ este integrabilă (în sensul că există un şir de funcţii simple $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la S la $\widetilde{\mathcal{P}}_{kc}$ care converge în μ-măsură la f şi $\lim\limits_{n,m \to \infty} \int_S \|f_n - f_m\| d\mu = 0$). În acest caz, se defineşte integrala Debreu a lui F prin

$$(D)\int_S f d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_S f_n d\mu.$$

Această definiţie reduce teoria integrării multifuncţiilor cu valori nevide compacte convexe la teoria obişnuită a integrării funcţiilor vectoriale măsurabile.

Definiţia lui Aumann are avantajul de a fi directă şi uşor de manipulat în practică. Pe de altă parte, integrala Debreu extinde într-un mod natural rezultatele bine-cunoscute ale teoriei integrării standard la cazul multifuncţiilor. Totuşi s-a arătat (Byrne [19]) că, în anumite condiţii (când multifuncţia F are ca valori mulţimi nevide convexe compacte dintr-un spaţiu Banach), integrala Debreu a lui F, dacă aceasta există, coincide cu integrala Aumann a lui F.

Pentru aceeaşi situaţie MF-M, urmând modelul integralei Dunford [60], Martellotti şi Sambucini [92] au dat o altă definiţie a integralei pentru multifuncţii în raport cu o măsură, utilizând şiruri aproximante de multifuncţii simple. În teoria lor, multifuncţia F este definită pe un spaţiu măsurabil $(S, \mathcal{A})$ cu valori într-un subspaţiu complet al spaţiului $\mathcal{P}_{icm}(X) = \{A \subseteq X | A$ nevidă închisă convexă mărginită$\}$, unde X este un spaţiu vectorial real local convex Hausdorff.

În sfârşit, în acelaşi cadru prezentat mai sus, amintim integrala introdusă de Hukuhara [83], care utilizează idei din teoria integralelor Riemann şi Daniell.

II. Integrala unei funcţii în raport cu o multimăsură (F-MM).

Necesitatea introducerii conceptului de multimăsură a apărut în economia matematică, când Vind [124] a studiat teoria echilibrului pentru economii în care unităţile economice de bază sunt mulţimi de agenţi economici, şi nu agenţi individuali.

Există diferite moduri de a defini o multimăsură. Vom aminti, pe scurt, câteva dintre acestea.

Fie $(S, \mathcal{A})$ un spaţiu măsurabil, X un spaţiu vectorial topologic şi multifuncţia de mulţime $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{P}_0(X)$.

(a) φ se numeşte *multimăsură finit aditivă* dacă: $\varphi(\emptyset) = \{0\}$ şi $\varphi(A \cup B) = \varphi(A) + \varphi(B)$ pentru orice $A, B \in \mathcal{A}, A \cap B = \emptyset$.

(b) φ se numeşte *multimăsură tare aditivă* dacă $\varphi(A \cup B) = \overline{\varphi(A) + \varphi(B)}$, pentru orice $A, B \in \mathcal{A}$, $A \cap B = \emptyset$, unde $\overline{E}$ este aderenţa lui E în topologia lui X, oricare ar fi $E \subseteq X$.

(c) φ se numeşte *multimăsură tare* dacă:

1. φ este multimăsură finit aditivă,
2. $\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset \mathcal{A}$, $A_n \cap A_m = \emptyset$ $(n \neq m)$, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = A$, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n)$ este punctual comutativ convergentă cu suma $\varphi(A)$, ceea ce înseamnă: oricare ar fi un şir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ cu $x_n \in \varphi(A_n)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ este comutativ convergentă şi

$$\varphi(A) = \left\{ x | \forall n \in \mathbb{N}^*, \exists x_n \in \varphi(A_n) \text{ astfel încât } x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \right\}.$$

(d) φ se numeşte *multimăsură normală* dacă:

1. φ este multimăsură tare aditivă,
2. $\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset \mathcal{A}$, $A_n \cap A_m = \emptyset$ $(n \neq m)$, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = A$, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n)$ este comutativ convergentă cu suma $\varphi(A)$ în spaţiul uniform $\mathcal{P}_i(X) = \{A \in \mathcal{P}_0(X) | A \text{ este închisă}\}$.

(e) Dacă X este un spaţiu vectorial topologic local convex, X^* dualul său şi $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{P}_{ic}(X) = \{A \in \mathcal{P}_0(X) | A$ este închisă şi convexă$\}$, atunci φ se numeşte *multimăsură slabă* dacă:

1. φ este multimăsură tare aditivă,
2. $\sigma(x^*, \varphi(\cdot))$ este măsură pentru orice $x^* \in X^*$ (unde σ este funcţia suport).

(f) Dacă X este un spaţiu Banach real cu originea 0, $\mathcal{P}_i(X) = \{A \subseteq X | A$ este nevidă şi închisă$\}$, h este pseudo-metrica Pompeiu-Hausdorff pe spaţiul $\mathcal{P}_i(X)$ şi $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{P}_i(X)$ este o multifuncţie de mulţime, atunci φ se numeşte *multimăsură σ-aditivă* (sau *multimăsură numărabil aditivă*) dacă:

1. $\varphi(\emptyset) = \{0\}$,
2. $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathcal{A}$, $A_n \cap A_m = \emptyset$ $(n \neq m)$ şi $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = A$, are loc relaţia $\lim\limits_{n\to\infty} h(\varphi(A), \overset{\bullet}{\sum\limits_{k=1}^{n}} \varphi(A_k)) = 0$.

Multimăsurile au fost cercetate datorită numeroaselor aplicaţii în economia matematică (Hildenbrand [80]), optimizare şi control optimal (Rockafellar [117], Strassen [122]), modelare statistică pentru mecanica cuantică (Grudder [73]). Contribuţii semnificative la studiul multimăsurilor au fost aduse de către Aletti, Bongiorno şi Capasso [1], Artstein [3], Brooks [17,18], Castaing [23], Castaing şi Valadier [26], Costé [32,33], Drewnowski [59], Godet-Thobie [70,71], Hiai [78], Hiai şi Umegaki [79], Papageorgiou [98,99], Precupanu [105,106], Schmeidler [120], Vind [124].

Una din problemele studiate în legătură cu multimăsurile a fost modalitatea de definire a integralei unei funcţii în raport cu o multimăsură, astfel încât integrala să păstreze proprietăţile esenţiale ale integralei Lebesgue obişnuite, să răspundă necesităţii rezolvării unor probleme practice şi să ofere posibile aplicaţii concrete. La această chestiune s-a răspuns în mai multe moduri.

Astfel, Brooks [17,18] a definit integrala folosind şiruri aproximante de funcţii simple. În teoria lui, $\mathcal{A}$ este o algebră de părţi ale unei mulţimi nevide S, X este un spaţiu Banach real, $\mathcal{P}_m(X) = \{A \in \mathcal{P}_0(X) | A$ este mărginită$\}$ şi $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{P}_m(X)$ este o multimăsură finit aditivă (conform (a)). O funcţie $f : S \to \mathbb{R}$ se numeşte φ-*integrabilă* dacă există un şir de funcţii simple $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definite pe S cu valori reale, care este φ-convergent la f şi verifică relaţia $\lim\limits_{n,m\to\infty} \int_S |f_n - f_m| dv = 0$ (unde v este variaţia totală a lui φ). Integrala lui f se defineşte prin:

$$(B) \int_E f d\varphi = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\varphi, \ \ \forall E \in \mathcal{A}. \tag{4}$$

O altă integrală (de tip Brooks) a fost obţinută de Precupanu [106] utilizând teorema lui Weber de existenţă a unei familii π de pseudo-metrici semi-invariante pe semigrupul uniform $\mathcal{P}_{kcm}(X)$ al submulţimilor nevide, compacte, convexe şi mărginite ale unui spaţiu local convex Hausdorff X. Fie $\mathcal{A}$ un inel de părţi ale unei mulţimi nevide S, $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{P}_{kcm}(X)$ o multimăsură tare aditivă (conform (b)). Pentru orice $p \in \pi$ şi orice $A \in \mathcal{A}$, fie aplicaţia:

$$\widetilde{\varphi}_p(A) = \sup\{\sum_{i=1}^{n} p(\varphi(A_i), \{0\}) | (A_i)_{i=1}^n \text{ este partiţie din } \mathcal{A} \text{ a mulţimii } A\}.$$

Pentru orice $p \in \pi$ şi orice $E \in \mathcal{P}(S)$ se consideră funcţia:

$$\widetilde{\varphi}_p^*(E) = \inf\{\widetilde{\varphi}_p(A) | E \subseteq A, A \in \mathcal{A}\}.$$

O funcţie $f : S \to \mathbb{R}$ se numeşe φ-*integrabilă* dacă există un şir generalizat de funcţii simple $(f_i)_{i\in I}$ care converge la f în spaţiul uniform $(\mathbb{R}^S, \mathcal{U}_{\Gamma_\varphi})$

şi astfel încât şirul generalizat $\{\int_E f_i d\varphi\}_{i\in I}$ este şir Cauchy în $\mathcal{P}_{kcm}(X)$, uniform în raport cu $E \in \mathcal{A}$ (unde $\mathcal{U}_{\Gamma_\varphi}$ este uniformitatea generată de familia $\Gamma_\varphi = \{\widetilde{\varphi}^*_p | p \in \pi\}$ de submăsuri pe $\mathcal{P}(S)$). În acest caz, integrala lui f este elementul din completarea $\widetilde{\mathcal{P}}_{kcm}(X)$ a lui $\mathcal{P}_{kcm}(X)$ definit prin

$$\int_E f d\varphi = \lim_i \int_E f_i d\varphi, \quad \forall E \in \mathcal{A}. \tag{5}$$

Un alt tip de integrală este cel introdus de Godet-Thobie [71]. Astfel, $(S, \mathcal{A}, \mu)$ este un spaţiu compact cu măsură Radon, Q o submulţime convexă, slab-compactă şi echilibrată a unui spaţiu Banach X, $\mathcal{P}_{k_\sigma c}(X) = \{A \in \mathcal{P}_0(X) | A$ slab-compactă, convexă$\}$ şi $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{P}_{k_\sigma c}(X)$ este multimăsură slabă (conform (e)) astfel încât $\varphi(A) \subseteq \mu(A)Q, \forall A \in \mathcal{A}$. Se notează măsura reală $\sigma(x^*, \varphi(\cdot))$ prin μ_{x^*}, $\forall x^* \in X^*$. Dacă f este o funcţie pozitivă, $f : S \to [0, +\infty)$, astfel încât $f \in L^1(S, \mathcal{A}, \mu)$, atunci integrala lui f pe $E \in \mathcal{A}$ în raport cu φ, notată $\int_E f d\varphi$, este mulţimea convexă şi slab-compactă definită prin

$$\sigma(x^*, \int_E f d\varphi) = \int_E f d\mu_{x^*}, \quad \forall x^* \in X^*. \tag{6}$$

În acest caz, $\int_E f d\varphi = \{\int_E f dm | m \in \mathcal{S}(\varphi)\}$, unde $\mathcal{S}(\varphi)$ este mulţimea măsurilor vectoriale care sunt selecţii ale lui φ, iar $\int_E f dm$ este integrala de tip Dunford a lui f în raport cu m. O măsură vectorială $m : \mathcal{A} \to X$ se numeşte selecţie a lui φ dacă $m(E) \in \varphi(E)$, pentru orice $E \in \mathcal{A}$.

Pentru aceeaşi abordare F-MM, să mai amintim integralele introduse de către Helsel şi Pu [77] (prin intermediul unor sume integrale de tip Riemann), Kandilakis [87] (prin metoda Aumann cu selecţii - funcţii integrabile Dunford), Precupanu şi Satco [109] (prin metoda Aumann cu selecţii - funcţii integrabile Gould).

Un rezultat fundamental în analiza matematică, având numeroase aplicaţii în reprezentarea operatorilor, geometria spaţiilor Banach sau teoria punctelor de extrem, este teorema lui Radon-Nikodym. Teoremele de reprezentare de tip Radon-Nikodym au fost intens studiate (a se vedea, de exemplu, Candeloro şi Martellotti [20-22], Martellotti şi Sambucini [91], Martellotti, Musial şi Sambucini [93]). Menţionăm, în cadrul atât de generos al multimăsurilor, rezultatele obţinute de câţiva autori care au abordat diferit acest subiect în funcţie de valorile multimăsurilor, care sunt submulţimi fie ale lui $\mathbb{R}^n$ (Artstein [3], Debreu şi Schmeidler [52]), fie ale unui spaţiu Banach (Costé [34]), fie ale unui spaţiu topologic local convex (Castaing [24,25], Costé [32-34], Costé şi De La Barrière [35], Godet-Thobie [70], Martellotti-Sambucini [92]).

III. Integrala unei multifuncţii în raport cu o multimăsură (MF-MM).

Utilizând metoda Aumann cu selecţii, Brink şi Maritz [16] au definit o integrală pentru multifuncţii în raport cu o multimăsură în modul următor: fie X, Y, Z spaţii Banach, $(x, y) \mapsto xy$ o aplicaţie biliniară de la $X \times Y$ la Z care îndeplineşte condiţia $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$ pentru orice $(x, y) \in X \times Y$, $(T, \mathcal{A})$ un spaţiu măsurabil şi $m : T \to Y$ o măsură vectorială cu variaţia finită $\overline{m}$. Se notează cu $\mathcal{M}(\overline{m})$ σ-inelul submulţimilor $\overline{m}$-măsurabile ale lui T şi cu $\Sigma(\overline{m})$ δ-inelul submulţimilor $\overline{m}$-integrabile ale lui T (conform Dinculeanu [56, 57]). Se notează

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_X(\overline{m}) = \Big\{ & f | f : T \to X, f = \sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{A_i}, x_i \in X, A_i \in \Sigma(\overline{m}), i \in \{1, \ldots, n\}, \\ & A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j, \bigcup_{i=1}^{n} A_i = T \Big\}.\end{aligned}$$

Dacă $f = \sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{A_i} \in \mathcal{E}_X(\overline{m})$ este o funcţie definită pe T cu valori în X, atunci integrala lui f în raport cu m este, prin definiţie, elementul din Z, notat $\int_T fdm$ şi definit prin:

$$\int_T fdm = \sum_{i=1}^{n} x_i m(A) \in Z.$$

O funcţie $f : T \to X$ se numeşte m-integrabilă dacă există un şir Cauchy $(f_n) \subset \mathcal{E}_X(\overline{m})$ care converge la f $\overline{m}$-apt pe T. Integrala lui f în raport cu m este elementul din Z, notat $\int_T fdm$ şi definit prin:

$$\int_T fdm = \lim_{n\to\infty} \int_T f_n dm.$$

Pentru $A \in \mathcal{M}(\overline{m})$, se defineşte $\int_A fdm = \int_T f\chi_A dm$.
Acum, dacă $F : T \to \mathcal{P}_0(X)$ este o multifuncţie, iar $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{P}_i(Y)$ este o multimăsură tare, atunci integrala lui F în raport cu φ se defineşte prin:

$$\begin{aligned}\textstyle\int_A Fd\varphi \ = \Bigg\{ \int_A fdm|m \text{ este măsură selecţie a lui } \varphi, \\ f \text{ este selecţie } m\text{-integrabilă a lui } F \Bigg\},\end{aligned}$$

pentru orice mulţime $A \in \mathcal{M}(\overline{m})$.

În Croitoru [39] am introdus şi studiat o integrală pentru multifuncţii în raport cu o multimăsură, utilizând metoda lui Dunford [60] a şirurilor aproximante. Acest tip de integrală multivocă va fi prezentat în capitolul 2 al volumului de faţă, într-un cadru extins şi diferit faţă de cel din [39].

În toate cele trei abordări trecute în revistă mai înainte, măsurile (sau multimăsurile) sunt finit (sau numărabil) aditive. După cum bine se ştie, aditivitatea este unul din atuurile cele mai puternice pe care le are măsura în construcţia integralei Lebesgue, spre exemplu.

Şi totuşi, într-o serie de modelări ale unor situaţii reale, cum ar fi probleme de criterii multiple în teoria deciziilor, aditivitatea unei măsuri este nepotrivită, prea tare şi mai degrabă restrictivă.

Măsurile non-aditive au fost introduse în diferite accepţii:

- capacităţi în teoria potenţialului de către Choquet [31];
- măsuri de încredere şi măsuri plauzibile de către Dempster [54] şi Shafer [121] în teoria evidenţei;
- măsuri fuzzy de către Sugeno [123];
- submăsuri de către Drewnowski [59] şi Dobrakov [58].

În ultimul timp, studiul măsurilor non-aditive s-a intensificat datorită numeroaselor aplicaţii în statistică, matematica economică, teoria jocurilor, matematica financiară, medicină, teoria deciziilor, inteligenţă artificială sau teoria controlului.

În teoria non-aditivităţii, diverse tipuri de integrale au fost definite şi studiate de mulţi autori: Sugeno [123], Guo şi Zhang [74,75], Jang, Kim şi Park [84], Jang şi Kwon [85], Zhang, Guo şi Liu [128], Zhang şi Guo [127], Zhang şi Wang [125,126], Z. Wang, Klir şi W. Wang [130], Gavriluţ [65-68], Croitoru şi Gavriluţ [46], Gavriluţ şi Petcu [69], Petcu [101], Precupanu, Gavriluţ şi Croitoru [110], Satco [119].

În acest volum am abordat următoarele probleme:

- definirea şi studiul unei integrale de tip Dunford pentru multifuncţii în raport cu o multimăsură (în capitolul 2);

- definirea şi studiul unei integrale de tip Gould pentru funcţii în raport cu o multimăsură (în capitolul 3), multimăsura utilizată aici fiind în sensul definiţiei (a).

Întrucât integrala descrisă în capitolul 2 conţine drept cazuri particulare integralele Brooks [17,18] şi Martellotti-Sambucini [92], în secţiunile 1.3 şi respectiv 1.4 din capitolul 1 am prezentat definiţiile şi unele proprietăţi ale acestora. În secţiunile 1.1 şi 1.2 am trecut în revistă câteva proprietăţi ale pseudo-distanţei Pompeiu-Hausdorff şi respectiv ale funcţiilor măsurabile. Ultimul paragraf, 1.5, descrie pe scurt integrala Aumann şi unele proprietăţi ale acesteia.

În capitolul 2 am definit şi studiat o integrală multivocă pentru multifuncţii în raport cu o multimăsură, atât multifuncţiile, cât şi multimăsura, având ca valori submulţimi nevide şi compacte ale unei algebre comutative local convexe separate Hausdorff. În construcţia acestei integrale am utilizat unele idei din Bochner [12], Blondia [11], Dunford [60], Brooks [17,18], Martellotti şi Sambucini [92]. Am prezentat apoi unele proprietăţi generale ale integralei, ale multifuncţiilor integrabile precum şi teoreme de trecere la limită pentru şiruri de multifuncţii integrabile (teoreme de tip Vitali şi de tip Lebesgue). După cum se va observa în definiţia acestei integrale, dacă multifuncţia este punctuală, atunci se obţine o integrală de tip Brooks [17,18], iar dacă multimăsura este cu valori punctuale, atunci se obţine o integrală de tip Martellotti-Sambucini [92]. În sfârşit, dacă multifuncţia şi multimăsura sunt ambele cu valori punctuale, atunci integrala introdusă aici devine integrală de tip Dunford [60].

Plecând de la rezultatul obţinut de Martellotti şi Sambucini [92], în paragraful 2.6 am stabilit o teoremă de tip Radon-Nikodym pentru multimăsuri cu valori submulţimi nevide şi compacte ale unei algebre comutative local convexe separate Hausdorff. În demonstraţia teoremei ne-am sprijinit pe noţiunea de exhaustiune introdusă de Maynard [94-96] şi pe teorema de tip Radon-Nikodym obţinută de Hagood [76] pentru măsuri finit aditive cu valori într-un spaţiu Banach.

În capitolul 3 am definit şi studiat o integrală multivocă pentru funcţii reale în raport cu o multimăsură φ cu valori submulţimi nevide, închise şi mărginite ale unui spaţiu Banach real. Modul de definire este diferit de procedeele de obţinere a integralelor (4), (5) şi (6) descrise mai înainte, bazându-se de data aceasta pe metoda lui Gould [72]. Aceste rezultate au fost obţinute împreună cu doamna profesor dr. Anca Maria Precupanu. În esenţă, se vor distinge două cazuri. În primul, când funcţia $f : S \to \mathbb{R}$ este mărginită şi variaţia multimăsurii pe S este finită, definiţia se face direct, cu ajutorul unor sume integrale. Acest caz va constitui subiectul primului paragraf. Tot aici vom prezenta o serie de proprietăţi generale ale integralei şi ale funcţiilor integrabile considerate. Secţiunea 3.1 se încheie cu un rezultat de tip Radon-Nikodym, în care se foloseşte din nou noţiunea de exhaustiune a lui Maynard [94-96]. Al doilea paragraf 3.2 tratează cazul general când vom renunţa la ipotezele de mărginire a funcţiei şi de finitudine a variaţiei multimăsurii domeniului său de definiţie şi vom defini integrala pentru funcţii nemărginite definite pe mulţimi pe care variaţia multimăsurii poate fi şi infinită. În continuare prezentăm câteva proprietăţi ale integralei, precum şi unele rezultate privind şiruri de funcţii integrabile. Să mai adăugăm că dacă multimăsura φ este cu valori punctuale, $\varphi = \{\mu\}$, atunci integrala introdusă în acest capitol pentru funcţia f în raport cu φ se reduce la o integrală de tip Gould [72] pentru f în raport cu măsura vectorială finit aditivă μ şi deci la integrala Dunford [60] dacă, în plus, μ este numărabil aditivă (conform §8 din Gould [72]).

Sperăm ca, prin tematica abordată, cartea să fie utilă nu doar cercetătorilor în domeniul analizei multivoce, dar şi studenţilor de la Facultăţile de Matematică, Master şi Şcoală Doctorală sau profesorilor din învăţământul preuniversitar, în activitatea de perfecţionare.

Subiectele tratate în această carte au constituit tema tezei de doctorat

susţinute în anul 2000 sub îndrumarea doamnei profesor dr. Anca Maria Precupanu, căreia îi sunt profund recunoscătoare atât pentru sprijinul constant oferit pe parcursul drumului anevoios, dar plin de magie şi încântare, al cercetării ştiinţifice, cât şi pentru sugestiile valoroase şi pertinente făcute pe marginea acestui volum.

Mulţumesc în mod special domnului profesor dr. Mihai Turinici pentru ajutorul preţios şi interesul manifestat pentru această carte.

Mulţumesc în mod deosebit doamnei lector dr. Alina Gavriluţ pentru observaţiile critice semnalate, care au condus la îmbunătăţirea unor rezultate din capitolul 3.

Mulţumesc doamnei Luminiţa Teodorescu pentru munca inspirată depusă în realizarea acestui volum.

Se cuvine de asemenea a mulţumi familiei pentru întregul sprijin, dar şi pentru gândurile de susţinere ale prietenilor ştiuţi şi neştiuţi, văzuţi şi nevăzuţi, de aici şi din alte lumi.

Anca Croitoru