

Cuprins

Prefață	ix
1 SPAȚIUL L^∞	1
1.1 Margini esențiale	1
1.2 Spațiul L^∞	7
2 TEOREME DE REPREZENTARE	17
2.1 Teorema lui Riesz de reprezentare a funcționalelor liniare și continue pe $C_{[a,b]}$	18
2.2 Teorema lui Riesz de reprezentare a funcționalelor liniare și pozitive pe $C_c(X)$	24
3 MĂSURI PE SPAȚII PRODUS	35
3.1 Clase monotone de mulțimi	37
3.2 p -sisteme și q -sisteme	40
3.3 Măsuri pe un spațiu produs finit	43
3.4 Măsuri pe un spațiu produs infinit	68
4 MĂSURI REALE	79
4.1 Proprietăți generale	80
4.2 Teoreme de descompunere	91
4.3 Teorema lui Radon-Nikodym	108
ANEXE	133
A.1 Mulțimi. Relații. Funcții	133
A.2 Topologie	146
A.3 Teoria măsurii	166

viii

Bibliografie	195
Index de termeni	197
Index de simboluri	201

Prefață

Acest volum prezintă patru capitole speciale din teoria măsurii: *Spațiul L^∞* , *Teoreme de reprezentare*, *Măsuri pe spații produs* și *Măsuri reale*, având la bază cursurile de Analiză reală II predate studenților din anul III de la Facultatea de Matematică din Universitatea "A.I. Cuza" Iași.

În primul capitol prezentăm spațiul $L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ și proprietăți ale acestuia, făcând analogie cu spațiile $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ pentru $p \in [1, +\infty)$, studiate la cursul de Analiză reală I din anul II.

Capitolul al doilea cuprinde două teoreme de reprezentare și anume: teorema lui Riesz de reprezentare a funcționalelor liniare și continue pe $C_{[a,b]}$, spațiul funcțiilor reale și continue pe $[a, b]$ și teorema lui Riesz de reprezentare a funcționalelor liniare și pozitive pe $C_c(X)$, spațiul funcțiilor reale, continue și cu suport compact pe un spațiu metric local compact (X, d) .

Capitolul trei este dedicat măsurilor pe un spațiu produs. Astfel se definește în paragraful 3.3 măsura produs pe un spațiu produs finit de spații cu măsuri, apoi în paragraful 3.4 se introduce măsura produs pentru un spațiu produs infinit de spații cu măsuri de probabilitate, fiind analizate atât cazul numărabil, cât și cazul infinit nenumerabil. Primele două secțiuni prezintă câteva aspecte legate de trei familii importante de mulțimi: clase monotone, p -sisteme și q -sisteme, ale căror proprietăți vor fi utilizate în ultimele două secțiuni.

Ultimul capitol este consacrat studiului măsurilor reale și al proprietăților acestora. Sunt prezentate teoremele lui Hahn, Jordan și Lebesgue de descompunere (în paragraful 4.2), precum și celebra teoremă a lui Radon-Nikodym (în ultimul paragraf).

Cartea se încheie cu trei anexe ce conțin elemente de bază din teoria mulțimilor, topologie și teoria măsurii, elemente care sunt folosite în cele patru capitole și care se presupune a fi cunoscute. Pentru cititorii mai exigenți, care doresc informații suplimentare, demonstrații ori exemple, recomandăm consultarea titlurilor din bibliografie.

Acest volum se adresează în primul rând studenților de la Facultățile de Matematică, dar și celor interesați de subiectele propuse și care au cunoștințe generale de topologie și teorie a măsurii. Prin prezența celor trei anexe am dorit ca această carte să poată fi folosită în mod independent și de către studenții din primii ani ai Facultăților de Matematică, de Informatică sau Politehnice.

Prin temele abordate, cartea poate fi utilă și studenților din ultimii ani în vederea pregătirii lucrărilor de licență, studenților de la ciclurile de Master și Școală doctorală, precum și în activitatea de perfecționare a profesorilor din învățământul preuniversitar.

Sperăm ca elementele prezentate să clarifice și să completeze cunoștințele de bază din teoria măsurii însușite la cursul de Analiză reală I și, în egală măsură, să ofere o viziune mai amplă asupra teoriei măsurii, răspunzând poate unor întrebări sau probleme apărute în cadrul acestui curs; întrebări pe care mi le-am pus și eu în decursul anilor... la unele am găsit răspunsuri, alte probleme așteaptă încă să fie rezolvate. Într-un aforism celebru se spune: "cu cât citești mai mult, cu atât realizezi că știi prea puțin!"

În încheiere îmi exprim întreaga grațitudine și prețuire distinsei doamne profesor dr. Anca-Maria Precupanu pentru sprijinul și atenția oferite cu atâta generozitate, pentru fructuoasele discuții purtate și ideile prețioase primite. Cursurile, seminariile și cărțile domniei sale mi-au fost ajutor de bază în realizarea acestei cărți.

Mulțumesc în mod deosebit domnului profesor dr. Ion Chițescu pentru amabilitatea și disponibilitatea remarcabile cu care s-a aplecat asupra acestei cărți, pentru ideile valoroase împărtășite și observațiile pertinente făcute.

Menționez ajutorul constant și prețios primit în realizarea acestui volum de la doamna dr. Elena Resmeriță, căreia îi mulțumesc în mod special.

Mulțumesc domnului asistent dr. Sorin Botezat pentru sugestiile valoroase privind anumite subiecte cuprinse în capitolul trei.

În realizarea acestui volum mi-au fost de un real folos cărțile domnilor profesori dr. Olga Costinescu, Teodor Precupanu, Liviu Florescu, Elena Nenciu și Ștefan Frunză, dar și discuțiile interesante purtate pe marginea unor subiecte, pentru care le mulțumesc.

În sfârșit, mulțumesc doamnei Luminița Teodorescu prin grija căreia cartea are forma de față, familiei și prietenilor pentru încurajări și sprijin moral.