Curs de analiză complexă

Gabriela Apreutesei

Iaşi, 2010

Capitolul I
Structura algebrică şi topologică a mulţimii numerelor complexe

I.1. Mulţimea numerelor reale

Pe tot parcursul acestui curs vom considera binecunoscute informaţiile esenţiale referitoare la mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$, la structura sa algebrică şi cea topologică:

Reamintim că mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$, împreună cu adunarea şi înmulţirea uzuale, formează un *corp comutativ.*

Pe acest corp se consideră *relaţia de ordine* uzuală " $\leq$ ", deci o relaţie care este:

i) *reflexivă*: $x \leq x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$;
ii) *antisimetrică*: dacă $x \leq y$ şi $y \leq x$ atunci $x = y$;
iii) *tranzitivă*: dacă $x \leq y$ şi $y \leq x$ atunci $x \leq z$.

Această relaţie este compatibilă cu operaţiile algebrice de pe $\mathbb{R}$: dacă a, $b \in \mathbb{R}$ astfe încât $a \leq b$, atunci $a + c \leq b + c$ şi $a \cdot d \leq b \cdot d$, pentru orice $c, d \in \mathbb{R}$, $d \geq 0$.

Relaţia este de *totală ordine*, adică oricare ar fi două numere reale a şi b avem fie $a \leq b$, fie $b \leq a$.

S-a obţinut astfel un corp comutativ total ordonat. În plus, $\mathbb{R}$ verifică *axioma completitudinii* (sau *axioma Cantor-Dedekind*): orice mulţime nevidă a lui $\mathbb{R}$ care este majorată admite cel puţin o margine superioară.

Pentru fiecare element $a \in \mathbb{R}$ *sistemul vecinătăţilor* $\mathcal{V}(a)$ este format din toate mulţimile $V \subset \mathbb{R}$ care conţin intervale deschise centrate în a, adică mulţimile V pentru care există $\varepsilon > 0$ cu $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset V$.

Definirea sitemului vecinătăţilor pentru fiecare punct a permis introducerea următoarelor noţiuni: *şir convergent* de numere reale, *limită* şi *continuitate* a unei funcţii reale într-un punct, *funcţii reale derivabile* şi *integrabile Riemann.* Toate aceste definiţii vor fi utilizate în continuare şi le vom considera cunoscute.

I.2. Forma algebrică a numerelor complexe

Definiţia I.1:Prin *mulţimea numerelor complexe* vom înţelege mulţimea $\mathbb{C} = \{(a, b)\,; a, b \in \mathbb{R}\}$, dotată cu două operaţii:
adunarea : " $+$ " $: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$;
înmulţirea : " $\cdot$ " $: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.

Teorema I.1: *Tripletul* $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *formează un corp comutativ.*

Observaţia I.1: Remarcăm că $\mathbb{R}$ poate fi identificat cu un subcorp al lui $\mathbb{C}$ prin aplicaţia $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$,

$$\phi(x) = (x, 0).$$

Astfel se poate considera $x = (x, 0)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Deci $0_{\mathbb{C}} = 0_{\mathbb{R}}$.
Vom nota în continuare $(0, 1) = i$; are loc relaţia $i^2 = (-1, 0)$, adică $i^2 = -1$.
Astfel putem ajunge la următoarea scriere a numerelor complexe:

$$\text{oricare ar fi } (a, b) \in \mathbb{C} \text{ avem } (a, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1) = a + bi.$$

Definiţia I.2: Această scriere ($(a, b) = a + ib$) se numeşte *scrierea algebrică* uzuală a numerelor complexe.

Atunci când am fixat un sistem de coordonate ortogonal în plan , orice număr complex $z = a + ib$ se poate reprezenta în mod unic ca un punct având abscisa a şi ordonata

b; numerele reale a şi b sunt *partea reală* ($\operatorname{Re} z$), respectiv *partea imaginară* ($\operatorname{Im} z$) a lui z. Reciproc, oricărui punct din plan îi corespunde un număr complex, numit *afixul* punctului respectiv (figura I.1).

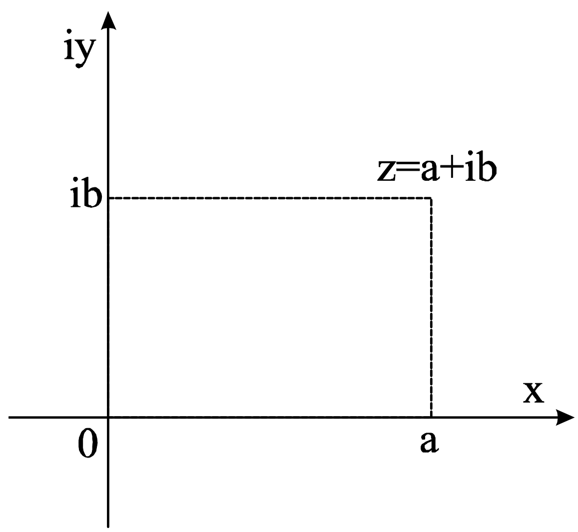

Figura I.1

Acest plan, în care reprezentăm numerele comlpexe z, îl vom numi *plan complex*, iar axele orizontală şi verticală vor fi denumite *axa reală*, respectiv *axa imaginară* a planului complex şi le vom nota cu Ox, respectiv Oiy.

Definiţia I.3: Prin *funcţia modul* se înţelege aplicaţia $|\cdot| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$,

$|z| = |a + ib| \overset{def}{=} \sqrt{a^2 + b^2}$.

Pentru un element dat z, numărul $|z|$ are semnificaţie geometrică şi anume el reprezintă lungimea segmentului determinat de origine şi punctul din plan de afix $z = a + ib$.

Din definiţia de mai sus rezultă imediat următoarele trei proprietăţi:

Proprietăţi:
1) $|z| = 0_{\mathbb{R}} \Leftrightarrow z = 0_{\mathbb{C}}$;
2) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$;
3) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

Definiţia I.4: Prin *operaţia de conjugare* se înţelege funcţia $\overline{\cdot} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\bar{z} = \overline{a+ib} \overset{def}{=} a - ib$.

În reprezentarea din plan a unui număr complex z, conjugatul său $\overline{z}$ este simetricul lui z faţă de axa reală.

Se arată uşor că au loc egalităţile:
1) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;
2) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;
3) $\overline{\overline{z}} = z, \forall z \in \mathbb{C}$;
4) $|z|^2 = z \cdot \bar{z}, \forall z \in \mathbb{C}$;
5) $\overline{z^{-1}} = (\overline{z})^{-1}, \forall z \neq 0$;
6) $\overline{z} = z \Leftrightarrow \operatorname{Im} z = 0$.

I.3. Scrierea trigonometrică a numerelor complexe

Dacă $z = a+ib$ este un număr complex nenul, atunci este bine definit unghiul $\theta \in (-\pi, \pi]$ format de direcţia pozitivă a axei Ox cu raza vectoare a punctului din plan asociat lui z.

Legătura dintre θ şi z este dată de relaţiile trigonometrice în triunghiul bine determinat de punctele O, z, a:

$$\cos\theta = \frac{a}{|z|}\ , \ \ \sin\theta = \frac{b}{|z|}. \tag{1}$$

Observaţia I.2: Unghiul θ care verifică relaţiile (1) există şi este unic.

Orice număr complex $z \neq 0$ se poate scrie sub forma $z = |z| \left(\frac{a}{|z|} + i \frac{b}{|z|} \right)$ sau $z = |z| (\cos\theta + i \sin\theta)$. Din cele de mai sus se vede că există o corespondenţă bijectivă între numerele complexe nenule z şi soluţiile θ ale de sistemului (1).

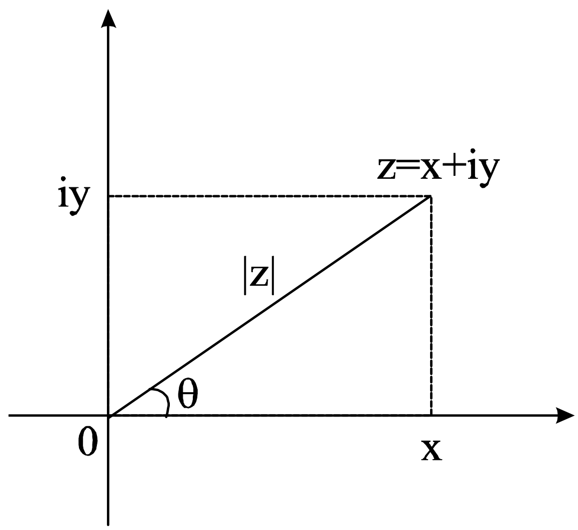

Figura I.2

Definiţia I.4: 1. Scrierea $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ a unui număr complex $z \neq 0$ este numită *forma trigonometrică* a numărului z (figura I.2).

2. Se poate defini funcţia bijectivă

$$\arg : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to (-\pi, \pi] \ , \arg\, z = \theta,$$

numită *argumentul redus al lui* z.

3. Dacă pentru sistemul (1) nu cerem ca soluţiile să se găsească în intervalul $(-\pi, \pi]$, atunci mulţimea soluţiilor o vom nota cu $Arg\, z$ şi este numită *argumentul neredus* al lui z.

Deci $Arg\, z = \{\arg\, z + 2k\pi; k \in Z\}$, iar dacă $\theta \in Arg\, z$, atunci
$\arg z = \theta(\text{mod } 2\pi) \in (-\pi, \pi]$.
În plus, dacă $z = a + ib$ şi $a \neq 0$, atunci $arctg\frac{b}{a} \in Arg\, z$.
Scrierea trigonometrică a numărului complex $z \neq 0$ devine:

$$z = |z|(\cos\, \arg\, z + i\, \sin\, \arg\, z).$$

Exemplul I.1: Să se calculeze modulul, conjugatul şi argumentul numărului complex $z = 1 + i$.

Evident $|z| = \sqrt{2}$, $\overline{z} = 1 - i$; cum $z = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, elementul $\theta \in (-\pi, \pi]$ pentru care $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ şi $\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ este $\theta = \frac{\pi}{4}$, deci $\arg z = \frac{\pi}{4}$.

Observaţi I.3: Cercetând scrierea numerelor complexe atât în forma lor algebrică, cât şi cea geometrică, nu se observă pe mulţimea $\mathbb{C}$ nici o relaţie de totală ordine adecvată (compatibilă cu operaţiile de pe $\mathbb{C}$). Aceasta face să nu putem vorbi pe $\mathbb{C}$ de numere pozitive sau negative deoarece aceste noţiuni presupun compararea cu 0. Vom considera ca singura relaţie de ordine pe $\mathbb{C}$, ordinea uzuală între numerele reale.

I.4. Interpretarea geometrică a operaţiilor uzuale pe $\mathbb{C}$

Utilizând scrierea algebrică a numerelor complexe remarcăm că orice număr complex $z = a + ib$ poate fi identificat cu un vector din plan având originea în O şi vârful în punctul M din plan de afix z. Dacă vom nota versorii de pe axele reală şi imaginară cu $\widehat{x}$, respectiv $\widehat{y}$, putem scrie că $z \equiv \overrightarrow{OM} = a\widehat{x} + b\widehat{y}$.

Fie acum punctele M_1 şi M_2 de afixe respectiv $z_1 = a_1 + ib_1$ şi $z_2 = a_2 + ib_2$. Atunci $\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} = (a_1\widehat{x} + b_1\widehat{y}) + (a_2\widehat{x} + b_2\widehat{y}) = (a_1 + a_2)\,\widehat{x} + (b_1 + b_2)\,\widehat{y} = z_1 + z_2$, deci adunarea numerelor complexe poate fi privită ca adunarea vectorilor corespondenţi din plan după regula binecunoscută a paralelogramului (figura I.3).

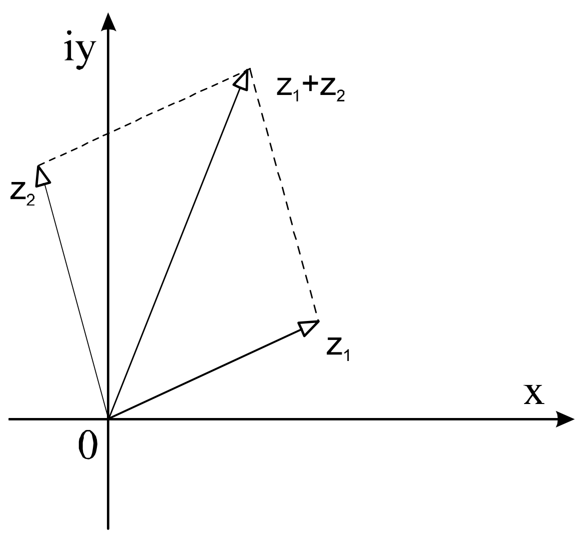

Figura I.3

Dacă acum vom utiliza scrierea trigonometrică a două numere complexe $z_1 = r_1\,(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ şi $z_2 = r_2\,(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$, atunci, conform definiţiei înmulţirii numerelor complexe, avem $z_1z_2 = r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i\,(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)]$, adică $z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + \sin(\theta_1 + \theta_2)]$.

Această formulă ne indică semnificaţia vectorială a produsului a două numere complexe: z_1z_2 este un vector cu vârful în origine, de lungime egală cu produsul lungimilor vectorilor z_1 şi z_2, iar direcţia este dată de semidreapta care face axa Ox unghiul sumă orientat $\theta_1 + \theta_2$ (figura I.4). Reamintim în final *formula lui Moivre*: dacă $z = r\,(\cos\theta + i\sin\theta)$ şi $n \in \mathbb{N}\diagdown\{0\}$ atunci $z^n = r^n\,(\cos n\theta + i\sin n\theta)$, care poate fi dedusă din formula de înmulţire a două numere complexe puse sub formă trigonometrică.

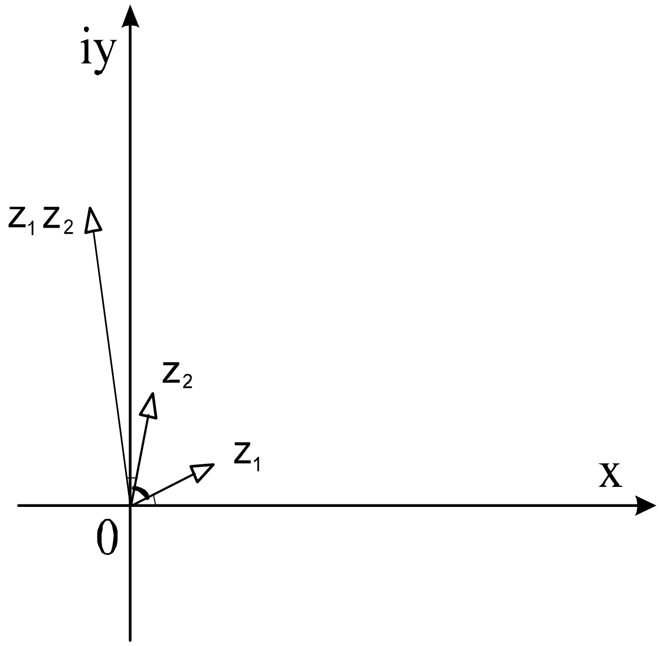

Figura I.4

I.5. Ecuaţii uzuale în planul complex

Vom rescrie în continuare în limbaj complex binecunoscutele ecuaţii ele dreptei şi ale cercului.

Ecuaţia dreptei prin două puncte date:

Considerăm M_1 şi M_2 două puncte distincte din plan, de afixe z_1 şi z_2. Să exprimăm în funcţie de z_1 şi z_2 afixul z al unui punct M de pe dreapta M_1M_2.

Deci dacă $M \in M_1M_2$ atunci $\frac{z-z_1}{z_2-z_1} = t \in \mathbb{R}$ şi reciproc.

Deci *ecuaţia canonică* a dreptei M_1M_2 exprimată în temeni de numere complexe este

$$\frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = t \in \mathbb{R}.$$

De aici se găseşte uşor şi *ecuaţia parametrică* a dreptei M_1M_2 :

$$z = (1-t)z_1 + tz_2,\ t \in \mathbb{R}.$$

Se obţin de asemenea ecuaţiile canonice şi parametrice ale semidreptei $|M_1M_2$:

$$M \in |M_1M_2 \Leftrightarrow \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = t \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow z = (1-t)z_1 + tz_2,\ t \in \mathbb{R}_+^*,$$

respectiv ale segmentului $|M_1M_2|$:

$$M \in |M_1M_2| \Leftrightarrow \frac{z-z_1}{z_2-z_1} = t \in [0,1] \Leftrightarrow z = (1-t)z_1 + tz_2,\ t \in [0,1].$$

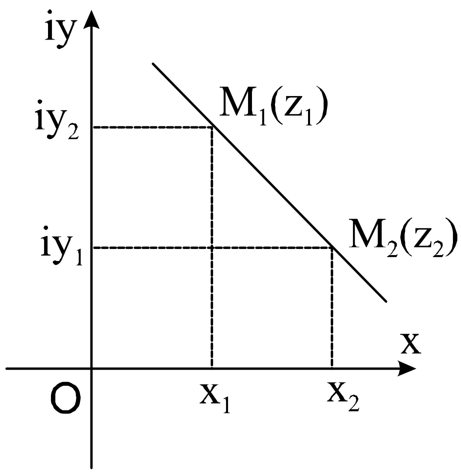

Figura I.5

Distanţa dintre două puncte date:

Dacă M_1 şi M_2 sunt două puncte distincte din plan, de afixe z_1 şi z_2, să exprimăm distanţa d dintre ele. Pentru aceasta fie $z_1 = x_1 + iy_1$ şi $z_2 = x_2 + iy_2$ scrierea lor algebrică. Atunci

$$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2} = |z_2 - z_1|\,.$$

Ecuaţia cercului de centru şi rază date:

Să presupunem că avem un punct M_0 de afix z_0 în planul complex şi vrem să exprimăm ecuaţia cercului de centru M_1 şi rază dată $r > 0$: dacă z este afixul punctului M şi $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$, atunci M descrie cercul dacă şi numai dacă distanţa de la M şi M_0 este r (figura I.6), adică

$$|z - z_0| = r.$$

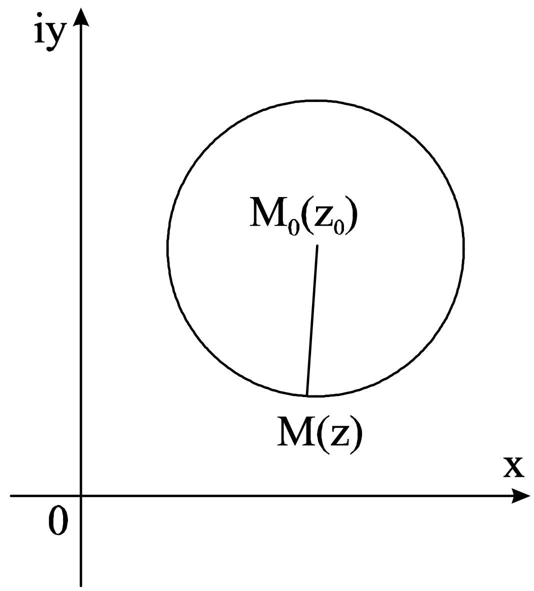

Figura I.6

I.6. Topologizarea mulţimii numerelor complexe

Definiţia I.6: Prin *vecinătate a unui punct* $z_0 \in \mathbb{C}$ înţelegem orice mulţime $V \subset \mathbb{C}$ cu proprietatea că există $D(z_0, \varepsilon)$ astfel încât. $D(z_0, \varepsilon) \subset V$, unde prin $D(z_0, \varepsilon)$ s-a notat *discul deschis de centru* z_0 *şi rază* $\varepsilon > 0$, adică $D(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \varepsilon\}$ (figura I.7).

Familia vecinătăţilor unui punct arbitrar $z_0 \in \mathbb{C}$ este $\mathcal{V}(z_0) = \{V \subset \mathbb{C}; \exists\ D(z_0, \varepsilon)$ astfel încât $D(z_0, \varepsilon) \subset V\}$.

Observăm de asemenea că familia $\mathcal{U}(z_0) = \{D(z_0, \varepsilon) \mid \varepsilon > 0\}$ formează un sistem fundamental de vecinătăţi pentru punctul z_0.

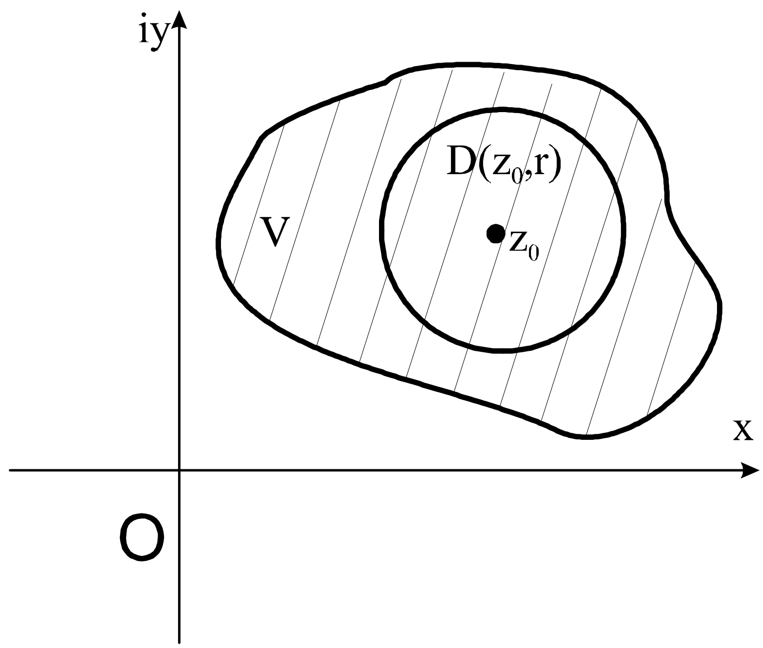

Figura I.7

Reamintim acum următoarele definiţii, adaptate mulţimii $\mathbb{C}$:

Definiţia I.7:

1. O mulţime $D \subseteq \mathbb{C}$ se numeşte *deschisă* dacă fie $D = \emptyset$,fie $D \neq \emptyset$ şi $\forall\, z_0 \in D\ \exists\, D(z_0, \varepsilon) \subset D$.

2. O mulţime $F \subseteq \mathbb{C}$ se numeşte *închisă* dacă $\mathbb{C} \backslash F$ este deschisă.

3. O mulţime $K \subseteq \mathbb{C}$ se numeşte *compactă* dacă este închisă şi mărginită: $\exists\, M > 0$ astfel încât $|z| \leq M, \forall\, z \in K$.

4. O mulţime $D \subset \mathbb{C}$ se numeşte *conexă* dacă oricare ar fi $A \subseteq D$, $A \neq \emptyset$, A simultan deschisă şi închisă, rezultă că $A = D$.

5. Un punct $z_0 \in \mathbb{C}$ se numeşte *punct de acumulare* pentru o mulţime $D \subseteq \mathbb{C}$ dacă orice vecinătate a lui z_0 intersectează mulţimea D în măcar un punct diferit de

$z_0 : \forall V \in \mathcal{V}(z_0),\ (V \setminus \{z_0\}) \cap D \neq \varnothing$.

6. Un punct z_0 este *punct interior* mulţimii D dacă există un disc $D(z_0, \varepsilon) \subset D$, unde $\varepsilon > 0$.

Să vedem în cele ce urmează la ce revine în această topologie convergenţa, respectiv condiţia Cauchy pentru un şir de numere complexe.

Definiţia I.8: Un şir $(z_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset (\mathbb{C}, |\cdot|)$ se numeşte *convergent* dacă există $z_0 \in \mathbb{C}$ cu proprietatea că $\forall V \in \mathcal{V}(z_0)\ \exists n_V \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n_V$, $x_n \in V$.

Vom nota $z_n \to z_0$.

Teorema I.2: 1. *Un şir* $(z_n)_{n\in N^*} \subset \mathbb{C}$ *este convergent la* $z_0 \in \mathbb{C}$ *dacă:*
$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *astfel încât* $\forall n \geq n_\varepsilon, |z_n - z_0| < \varepsilon$
2. *Un şir* $(z_n)_{n\in N^*} \subset \mathbb{C}$, $z_n = x_n + iy_n, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$, *este convergent la* $z_0 = x_0 + iy_0$ *dacă şi numai dacă* $x_n \to x_0$ *şi* $y_n \to y_0$ *în* $\mathbb{R}$.

Observaţia I.4: De fapt convergenţa unui şir de numere complexe revine la convergenţa a două şiruri de numere reale; acestea pot fi şi şirurile modulelor, respectiv a argumentelor, atunci când şirul este nenul.

Definiţia I.9: Un şir $(z_n)_{n\in N^*} \subset \mathbb{C}$ se numeşte *şir Cauchy* dacă:
$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in N^*$ astfel încât $\forall n \geq n_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}$ avem $|z_{n+p} - z_n| < \varepsilon$.

Teorema I.3: *Un şir* $(z_n)_{n\in \mathbb{N}^*} \subset \mathbb{C}$, $z_n = x_n + iy_n$ *este şir Cauchy dacă şi numai dacă şirurile reale* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *sunt şiruri Cauchy.*

Teorema I.5: *Pe spaţiul* $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ *orice şir Cauchy este convergent..*

Definiţia I.11:

1. Se numeşte *serie de numere complexe* un culpu de şiruri $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}, (S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, unde $z_n \in \mathbb{C}$ şi $S_n = z_0 + z_1 + ... + z_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. z_n se numeşte temenul general al seriei, iar S_n se numeşte şirul sumelor perţiale. Vom nota seria cu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$.

2. O serie de numere comlpexe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ se numeşte *convergentă* dacă şirul sumelor sale parţiale $S_n = z_1 + z_2 + ... + z_n$ este convergent în $\mathbb{C}$. În mod echivalent (în virtutea faptului că $\mathbb{C}$ este un spaţiu Banach) avem

Teorema I.6: *Seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ *este convergentă dacă şi numai dacă este îndeplinită condiţia de tip Cauchy:*
$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *astfel încât* $\forall k \in \mathbb{N}$ *şi* $\forall n \geq n_\varepsilon$ *avem* $|z_{n+1} + z_{n+2} + ...z_{n+k}| < \varepsilon$.

Observaţia I.5: Scriind, de exemplu, fiecare termen z_n în forma algebrică $z_n = x_n + y_n$, putem descompune şirul sumelor parţiale a seriei sub forma $S_n = (x_1 + x_2 + ...x_n) + i(y_1 + y_2 + ...y_n)$; deci studiul seriei complexe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ revine la studiul seriilor reale $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$. În caz de convergenţă avem $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n + i \sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$.

I.7. Punctul de la infinit. Sfera lui Riemann

Mulţimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale se completează prin două puncte, anume $-\infty$ şi $+\infty$, obţinându-se dreapta reală încheiată. În mod similar putem completa mulţimea $\mathbb{C}$, dar printr-un singur punct, notat ∞, obţinându-se *planul complex extins* sau *planul lui Gauss.*

Vom nota $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.Aceasta se poate topologiza la rândul ei.

Definiţia I.12: Prin vecinătate a punctului ∞ vom înţelege orice mulţime $V \subset \mathbb{C}_\infty$ care conţine exteriorul unui disc, deci

$V \in \mathcal{V}(\infty)$ dacă există $\varepsilon > 0$ astfel încât $V \supset \mathbb{C} \setminus D(0, \varepsilon)$ (figura I.8).

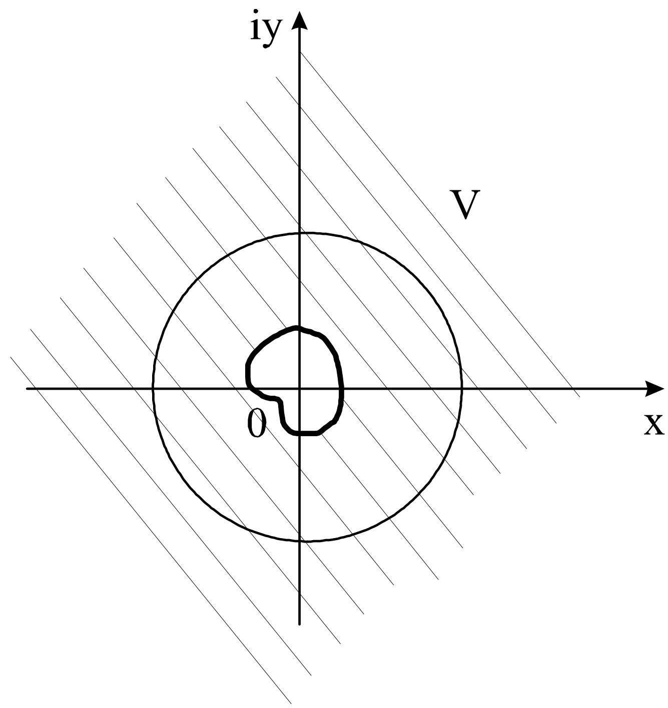

Figura I.8

În cele ce urmează vom exprima faptul că un şir de numere complexe are limita ∞.

Definiţia I.13: Un şir $(z_n)_{n\in N} \subset \mathbb{C}$ *are limita* ∞ (sau *diverge* la ∞) dacă: $\forall V \in \mathcal{V}(\infty)\ \exists n_V \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n_V$, $x_n \in V$.

Vom nota $z_n \to \infty$.

Teorema I.8: *Un şir* $(z_n)_{n\in N} \subset \mathbb{C}$ *are limita* ∞ *dacă şi numai dacă* $|z_n| \overset{\mathbb{R}}{\to} +\infty$ *sau, echivalent,*

$$z_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}^* (\text{ sau începând cu un rang } n_0) \text{ şi } \frac{1}{z_n} \to 0.$$

Aşa cum pentru mulţimea numerelor complexe am găsit o imagine geometrică, anume planul complex, am dori să punem în evidenţă un model geometric şi pentru mulţimea $\mathbb{C}_\infty$. Vom arăta că pentru aceasta poate fi aleasă o sferă din $\mathbb{R}^3$. Pentru uşurinţa calculelor vom considera sfera cu centrul în origine şi de rază 1, adică sfera unitate, pe care o vom nota cu $S_3(0,1)$ (această alegere însă nu este esenţială, demonstraţia putându-se adapta şi pentru alte sfere din $\mathbb{R}^3$). Vom descrie această corespondenţă bijectivă dintre $\mathbb{C}_\infty$ şi $S_3(0,1)$ mai întâi printr-o construcţie geometrică: fie sistemul de coordonate în $\mathbb{R}^3$ dat de originea O şi axele de cooronate x_1, x_2, x_3. Notăm cu N punctul de coordonate $(0,0,1)$, pe care îl vom numi *polul nord al sferei.* Vom identifica planul x_1Ox_2 cu planul complex, deci orice punct de coordonate $(x_1,x_2,0)$ poate fi identificat cu punctul de afix $z = x_1+ix_2$. Fie acum $M(x_1,x_2,x_3)$ un punct oarecare de pe $S_3(0,1)$, diferit de N. Dreapta MN intersectează planul x_1Ox_2 într-un punct P de afix z (figura I.9). Considerăm aplicaţia definită geometric astfel:

$$\phi : S_3(0,1) \to \mathbb{C}_\infty,\ \phi(M) = \begin{cases} P, & \text{dacă } M \neq N, \\ \infty, & \text{dacă } M = N. \end{cases}$$

Vom numi această aplicaţie *proiecţia stereografică.*

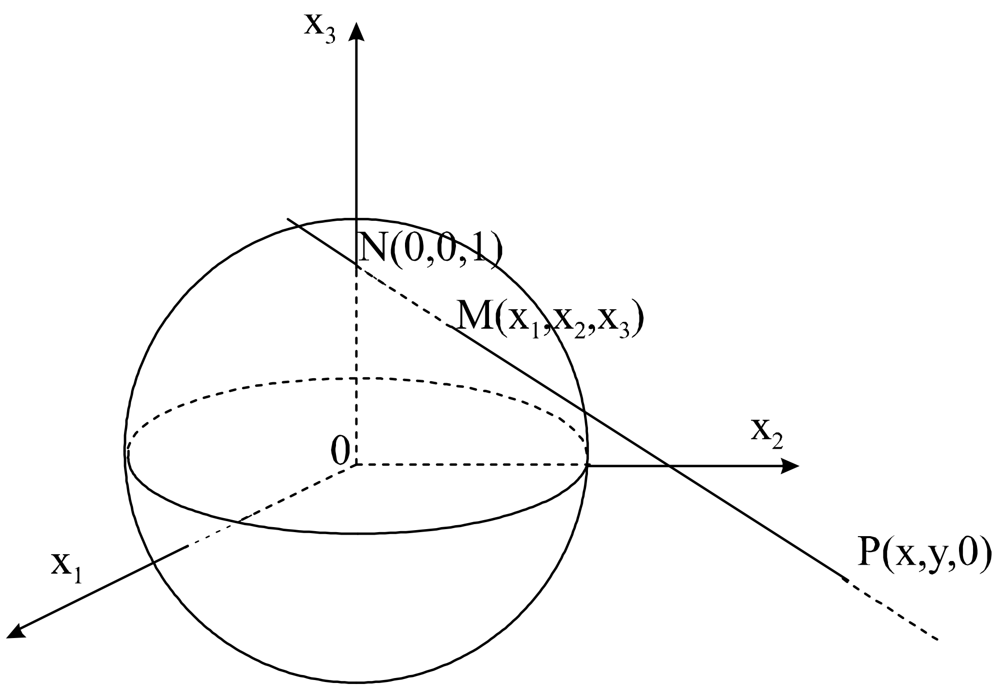

Figura I.9

Teorema I.7: *Aplicaţia proiecţie stereografică este un bijecţie între sfera unitate $S_3(0,1)$ şi planul complex extins $\mathbb{C}_\infty$.*

Vom reveni asupra mulţimii $\mathbb{C}_\infty$ în capitolul următor.

Capitolul al II-lea
Funcţii complexe de o variabilă complexă
II.1. Limită şi continuitate pentru funcţii complexe

O funcţie complexă este o funcţie $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, deci pentru orice $z \in D$ avem $f(z) \in \mathbb{C}$; astfel $f(z) = u(z) + iv(z)$, unde $u, v : D \to \mathbb{R}$. Prin identificarea lui $\mathbb{C}$ cu $\mathbb{R}^2$ (adică făcând identificarea $x + iy \equiv (x, y)$), putem considera mulţimea D ca fiind o submulţime a lui $\mathbb{R}^2$.

Deci $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, cu $u, v : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Rezultatele de bază referitoare la funcţiile reale de două variabile reale se consideră ştiute.

Vom adapta în continuare unele definiţii cunoscute din cazul real în contextul funcţiilor complexe.

Definiţia II.1: Fie $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ şi z_0 punct de acumulare pentru mulţimea D. Spunem că funcţia f *are limita l în punctul* z_0 dacă pentru orice şir $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset D$, $z_n \neq z_0$ cu $z_n \to z_0$ avem $f(z_n) \to l$. Scriem $\lim\limits_{z\to z_o} f(z) = l$.

Dăm unele reguli de calcul, similare cu cele din $\mathbb{R}$.

Proprietăţi (**operaţii cu limite**):

I. *Fie $f, g : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, z_0 punct de acumulare pentru D.*

Dacă există $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = l_1$, $\lim\limits_{z\to z_0} g(z) = l_2$ cu $l_1, l_2 \in \mathbb{C}$ atunci:

1) Există $\lim\limits_{z\to z_0} (\alpha f + \beta g)(z) = \alpha l_1 + \beta l_2$, oricare ar fi scalarii $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$;

2) Există $\lim\limits_{z\to z_0} (f \cdot g)(z) = l_1 \cdot l_2$;

3) Dacă $g(z) \neq 0$ pe o vecinătate a lui z_0 şi $l_2 \neq 0$, atunci există $\lim\limits_{z\to z_0} \left(\frac{f}{g}\right)(z) = \frac{l_1}{l_2}$.

II. Dacă $f : D \subseteq \mathbb{C} \to E \subseteq \mathbb{C}$, $g : E \to \mathbb{C}$, z_0 este punct de acumulare pentru D şi există $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = l$, iar l este punct de acumulare pentru mulţimea $f(D)$, cu $f(z) \neq l$ pe o vecinătate a lui z_0 şi există $\lim\limits_{w\to l} g(w) = l_1$, atunci funcţia $g \circ f : D \to \mathbb{C}$ are limită în z_0 şi $\lim\limits_{z\to z_0} (g \circ f)(z) = l_1$.

Limitele din proprietatea de mai sus sunt finite; facem convenţia $a + \infty = \infty$ pentru orice $a \in \mathbb{C}$, iar cazul $\infty + \infty$ este nedeterminat. Deasemenea $\infty \cdot \infty = \infty$, $a \cdot \infty = \infty$ dacă $a \neq 0$, iar $0 \cdot \infty$ este caz de nedeterminare. Convenim ca $\frac{a}{0} = \infty$ dacă $a \neq 0$ şi $\frac{\infty}{a} = \infty$ pentru $a \neq \infty$. Cazul $\frac{0}{0}$ este nedeterminat.

Definiţia II.2: Fie $f : D \subseteq \mathbb{C}$, $z_0 \in D$. f se numeste *continuă în* z_0 dacă pentru orice şir $(z_n)_n \subseteq D$, $z_n \to z_0$ avem $f(z_n) \to f(z_0)$.

Observaţia II.1: Dacă z_0 este punct de acumulare pentru D, atunci f este continuă in z_0 dacă şi numai dacă există $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Dacă z_0 este punct izolat pentru D, atunci f este în mod sigur continuă în z_0.

Proprietăţi (**operaţii cu funcţii continue**):

1. Dacă $f, g : D \to \mathbb{C}$, $z_0 \in D$ şi f, g sunt continue în z_0, atunci $f + g$ şi $f \cdot g$ sunt continue în z_0.

Dacă în plus $g(z_0) \neq 0$, atunci este bine definită funcţia $\frac{f}{g}$ pe o vecinătate a lui z_0 şi este continuă în z_0.

2. Dacă $f : D \subseteq \mathbb{C} \to E \subseteq \mathbb{C}$, $g : E \to \mathbb{C}$, $z_0 \in D$, f continuă în z_0 şi g continuă în $w_0 = f(z_0)$, atunci $g \circ f : D \to \mathbb{C}$ este continuă în z_0.

În mod specific are loc următoarea teoremă:

Teorema II.1 (caracterizarea limitei şi continuităţii în $\mathbb{C}$):

Fie $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$.

1) Dacă $z_0 = x_0+iy_0$ este punct de acumulare pentru D, atunci există $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = l_1 + il_2$ dacă şi numai dacă există

$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = l_1$ *şi* $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = l_2$.

2) Dacă $z_0 \in D$, f este continuă în z_0 dacă şi numai dacă u, v sunt continue în (x_0, y_0)..

Teorema II:2: *Proiecţia streografică definită în paragraful I.7 este un homeomorfism între sfera lui Riemann $S_3(0,1)$ şi planul complex extins $\mathbb{C}_\infty$.*

Observaţia II.2: Dacă două mulţimi D şi E sunt homeomorfe (adică dacă există între ele un homeomorfism ϕ) atunci structura topologică de pe una dintre mulţimi se trasportă prin ϕ în structura topologică a celeilalte. Astfel mulţimile deschise, închise, compacte, conexe ale lui D sunt duse prin ϕ în mulţimi de acelaşi tip ale lui E.

II.2. Derivabilitatea şi diferenţiabilitatea funcţiilor complexe

Vom considera în cele ce urmează mulţimea deschisă şi conexă $D \subseteq \mathbb{C}$. Dacă D nu este conexă, se realizează studiul pe fiecare componentă conexă a lui D.

Definiţia II.3: Fie $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z_0 \in D$.

1) Prin *derivata funcţiei f în punctul z_0* înţelegem „numărul" (unic) din $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, notat cu $f'(z_0)$, unde $f'(z_0) = \lim\limits_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$, atunci când această limită există.

2) Funcţia f se numeşte *derivabilă în z_0* dacă $f'(z_0) \in \mathbb{C}$.

3) Spunem că f este *olomorfă pe D* dacă f este derivabilă în orice punct al lui D.

4) f se numeşte *diferenţiabilă în z_0* dacă există $\alpha \in \mathbb{C}$ şi $\omega : D \to \mathbb{C}$,

cu $\lim\limits_{z\to z_0} \omega(z) = \omega(z_0) = 0$, astfel încât

$$f(z) = f(z_0) + \alpha(z - z_0) + \omega(z)(z - z_0), \forall z \in D.$$

Observaţia II.3: Ideea de bază în definiţia funcţiilor diferenţiabile este de a aproxima, atunci când este posibil, funcţiile complexe prin funcţii mai simple şi anume prin funcţii afine. Cu notatiile de mai sus, o asemenea functie afină este $d_f(z; z_0) = f(z_0) + \alpha(z - z_0)$.

Teorema II.3: *Fie $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z_0 \in D$. Funcţia f este derivabilă în z_0 dacă şi numai dacă f este diferenţiabilă în z_0.*

În plus, constanta α din definiţia diferenţiabilităţii este $A = f'(z_0)$.

Legătura dintre derivabilitate şi continuitate este similară cu cea din $\mathbb{R}$:

Teorema II.4: *Fie $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ derivabilă în $z_0 \in D$. Atunci f este continuă în z_0.*

Proprietatea II.1 (**operaţii cu funcţii derivabile**):

I. Fie $f, g : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z_0 \in D$, f, g derivabile în z_0. Atunci:

1) $f + g$ este derivabilă în z_0 cu $(f + g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$;

2) $f \cdot g$ este derivabilă în z_0 şi $(f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0) \cdot g(z_0) + f(z_0) \cdot g'(z_0)$;

3) Dacă în plus $g(z_0) \neq 0$, atunci $\frac{f}{g}$ este derivabilă în z_0 unde

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0) \cdot g(z_0) - f(z_0) \cdot g'(z_0)}{g^2(z_0)}.$$

II. Fie $f : D \to E$, $g : E \to \mathbb{C}$, $D, E \subseteq \mathbb{C}$ mulţimi deschise, $z_0 \in D$ şi $w_0 = f(z_0)$. Dacă f este derivabilă în z_0 şi g este derivabilă în w_0, atunci $g \circ f$ este derivabilă în z_0 cu $(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0)$.

III. Fie D, E mulţimi deschise din $\mathbb{C}$, $f : D \to E$ bijecţie, $z_0 \in D$ şi inversa $f^{-1} : E \to D$ continuă astfel încât $f'(z_0) \neq 0$.

Dacă f este derivabilă în z_0, atunci f^{-1} este derivabilă în $w_0 = f(z_0)$ şi are loc:

$$(f^{-1})'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(w_0)\right)}.$$

Reamintim că o funcţie $\phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ este diferenţiabilă într-un punct $(x_0, y_0) \in D$ dacă există α_1 şi $\alpha_2 \in \mathbb{R}$ şi există $\omega_k : D \to \mathbb{R}$, $k = \overline{1,2}$, cu $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \omega_k(x, y) = \omega_k(x_0, y_0) = 0$ astfel încât:

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= \phi(x_0, y_0) + \alpha_1(x - x_0) + \alpha_2(y - y_0) + \\ &\quad + \omega_1(x, y)(x - x_0) + \omega_2(x, y)(y - y_0), \ \forall (x, y) \in D. \end{aligned}$$

Constantele reale α_1 şi α_2 sunt de fapt derivatele parţiale ale funcţiei ϕ în raport cu x, respectiv y : $\alpha_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\alpha_2 = \frac{\partial \phi}{\partial y}(x_0, y_0)$.

Urmărim să stabilim în continuare o caracterizare a derivabilităţii unei funcţii complexe prin intermediul părţii ei reale şi a părţii imaginare. Rezultatul diferă esenţial de cel găsit în cazul continuităţii:

Teorema II.5 (**teorema lui Riemann de caracterizare a derivabilităţii**):

F*ie $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,$f = u + iv$,o funcţie complexă şi $z_0 \in D$. Funcţia f este derivabilă în z_0 dacă şi numai dacă funcţiile $u, v : D \subset \mathbb{R}^2 \to C$ sunt diferenţiabile în (x_0, y_0) şi în plus au loc condiţiile Cauchy-Riemann:*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \end{cases}.$$

În acest caz $f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)$.

Teorema II.6: *Fie* D *un domeniu (mulţime deschisă şi conexă) şi* $f : D \to \mathbb{C}$ *olomorfă astfel încât* $\operatorname{Re} f$ *sau* $\operatorname{Im} f$ *este constantă. Atunci rezultă că* f *este constantă.*

Observaţia II.4: La baza demonstraţiei de mai sus au stat condiţiile $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ şi $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$, deci enunţul se poate reformula în felul următor:

Corolar II.1: *Dacă pe o mulţime deschisă conexă* D *au loc relaţiile* $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ *şi* $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$ *(sau, echivalent,* $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ *şi* $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$*) atunci* f *este constantă. În particular, dacă* $f' = 0$ *pe* D *atunci* f *este constantă.*

Corolar II.2: *Fie* D *o mulţime deschisă şi conexă şi* $f : D \to \mathbb{C}$ *olomorfă astfel încât una din următoarele funcţii este constantă:* $|f|$ *sau* $\arg f$ *(în cazul în care* $f(z) \neq 0$, pentru orice $z \in D$*). Atunci* f *este constantă.*

II.3 Funcţii armonice

Vom stabili în continuare legătură care există între funcţiile armonice $u : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ şi funcţiile olomorfe $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Definiţia II.4: O funcţie $u : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clasă $C^2(D)$ se numeşte *funcţie armonică* dacă verifică ecuaţia lui Laplace: $\Delta u = 0$, unde

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y}.$$

Expresia Δu se numeşte *laplace-ianul* funcţiei u, iar condiţia $\Delta u = 0$ se numeste *condiţia de armonicitate* pentru funcţia u.

Teorema II.7: *Fie* $D \subset \mathbb{C}$ *un domeniu (mulţime deschisa şi conexă) şi* $f : D \to \mathbb{C}$ *olomorfă,* $f = u + iv$*. Dacă* $u, v \in C^2(D)$ *atunci* u *şi* v *sunt funcţii armonice.*

Vom folosi acest rezultat în diverse aplicaţii.

Reciproca Teoremei II.7 nu are loc, aşa cum se poate vedea în Problema II.13. Totuşi, impunând condiţii mai tari pentru domeniul D, proprietatea are loc. Vom avea nevoie, pentru demonstraţie, de urmatoarea definiţie:

Definiţia II.5: O mulţime $D \subset \mathbb{C}$ este *convexă* dacă pentru orice două puncte $z_1, z_2 \in D$ segmentul cu capetele în z_1 şi z_2 este conţinut în întregime în D (adică $z = tz_2 + (1-t)z_1 \in D$,oricare ar fi $t \in [0, 1]$).

Teorema II.8: *Considerăm* D *o mulţime convexă din plan şi* $u : D \to \mathbb{R}$ *armonică. Atunci există o functie* $f : D \to \mathbb{C}$ *olomorfă cu* $f = u + iv$.

Observaţia II.5: **1**. O asemenea funcţie armonică v se numeşte *conjugata armonică* a lui u. În general aceasta nu este unică; ştiind v, urmează că şi functia $v + c$ (unde c este o constantă reală) este o conjugată armonică a lui u.

2. Teorema II.8 are loc pe mulţimi mai generale (mulţimi simplu conexe, pe care le vom defini în capitolul al III-lea). Deoarece în demonstraţia teoremei din acest caz este nevoie să definim integrala complexă lăsam acest rezultat pentru capitolul IV, ca exerciţiu (Problema IV. 16).

3. Demostraţia făcută în cazul mulţimilor convexe (teorema II.8 de mai sus) familiarizează cititorul cu metoda care ne permite găsirea unei funcţii olomorfe cunoscându-i partea reală (a se vedea problemele II.6 - II.9). In esenţă ea se referă la a integra parţial condiţiile Cauchy-Riemann.

II.5. Funcţii elementare

1. Funcţia exponenţială

Definiţia II.6: Prin *funcţia complexă exponenţială* se înţelege funcţia $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\exp(x+iy) = e^x(\cos y + i \sin y)$.

Această funcţie se notează de asemenea şi prin e^z, unde $z = x + iy$.

Motivaţie: În $\mathbb{R}$, şirul $x_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ este convergent cu limita e^x;şirul complex $z_n = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ este de asemenea covergent, iar limita sa este $e^x(\cos y + i \sin y)$ (a se vedea şi Problema I.11).

Proprietatea II.2:
1. $\exp|_{\mathbb{R}}$ *coicide cu funcţia exponenţiala reală;*
2. $\exp$ *este periodică de perioadă principală* $2\pi i$;
3. $\exp(2\pi i) = 1$, $\exp(\pi i) = -1$;
4. $\exp(z_1 + z_2) = \exp z_1 \cdot \exp z_2$;
5. $\exp$ *este funcţie olomorfă pe* $\mathbb{C}$ *cu* $\exp' = \exp$.

2.Funcţia logaritm

Urmărim, în cele ce urmează,să introducem o funcţie similară logaritmului natural din $\mathbb{R}$.

Funcţia exponenţială în complex, fiind periodică, nu este injectivă, deci nu admite inversă. Dar dacă vom restrânge funcţia la o bandă paralelă cu axa imaginară, de lăţime 2π (perioada principală a funcţiei este $2\pi i$), vom obţine o funcţie injectivă, deci inversabilă. De exemplu, să considerăm

$$D_0 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, -\pi < \operatorname{Im} z < \pi\}$$

şi

$$D_k = D_0 + 2k\pi i = \{z + 2k\pi i;\ z \in D_0\},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Vom nota în continuare $\mathbb{C}\backslash(-\infty, 0] = \mathbb{C}\backslash\{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} z \leq 0\}$.

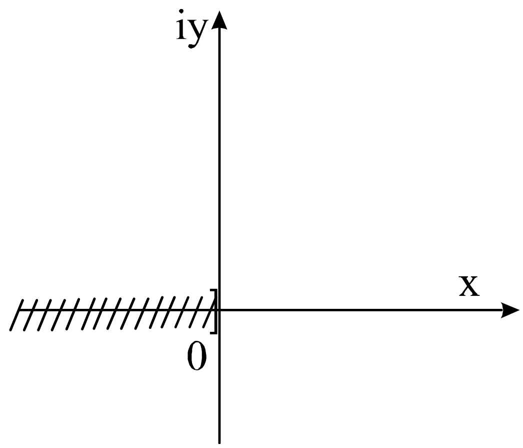

Figura II.1

Definiţia II.7: Numim *determinarea principală a funcţiei logaritm* funcţia $f_0 : \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0] \to D_0,\ f_0(z) \overset{not}{=} \ln z = \ln|z| + i \arg z$.

Mai general, prin *determinare a funcţiei logaritm* vom înţelege orice funcţie $f_k : \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0] \to D_k,\ f_k(z) \overset{not}{=} \ln z = \ln|z| + i \arg z + 2k\pi i,\ k \in \mathbb{Z}$.

Proprietatea II.3:

1. Restricţia funcţiei f_0 la semiaxa reală pozitivă $f_0 : (0, +\infty) \to D_0$ coincide cu logaritmul natural real .

2. Are loc egalitatea $e^{f_k(z)} = z$ (adică $\exp \circ f_k = 1_{\mathbb{C}\backslash(-\infty,0]}$).

3. Totuşi $f_k(e^z) = z + 2m\pi i,\ k, m \in \mathbb{Z}$; în particular pentru $k = 0$ şi $z \in D_0$ are loc $f_0 \circ \exp = 1_{D_0}$.

4. Pentru orice $k \in \mathbb{Z}$, funcţiile f_k sunt olomorfe cu $f_k'(z) = \frac{1}{z}$.

Observaţia II.6: Proprietatea II.3 ne spune că funcţia logaritm complex nu verifică toate proprietăţile cunoscute ale logaritmului real (de exemplu $\ln \circ \exp = 1_{\mathbb{R}}$ aşa cum se poate vedea în Problema II.12). Semnalăm, de asemenea, că în general, în complex, $\begin{cases} \ln z_1 z_2 \neq \ln z_1 + \ln z_2 \\ n \ln z \neq \ln z^n,\ n \in \mathbb{N}. \end{cases}$:

Fie $z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$ şi $z_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Scriem numerele z_1 şi z_2 sub formă trigonometrică şi găsim

$$z_1 = \cos\frac{7\pi}{6} + i \sin\frac{7\pi}{6},\ z_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i \sin\frac{4\pi}{3}, .$$

deci $|z_1| = |z_2| = 1$, $\arg z_1 = \frac{7\pi}{6}$ şi $\arg z_2 = \frac{4\pi}{3}$, de unde

$$\ln z_1 + \ln z_2 = \ln 1 + i\frac{7\pi}{6} + \ln 1 + i\frac{4\pi}{3} = i\frac{5\pi}{2}. \qquad (1)$$

Produsul lor este

$$z_1 z_2 = \cos\frac{15\pi}{6} + i \sin\frac{15\pi}{6} = \cos(2\pi + \frac{\pi}{2}) + i \sin(2\pi + \frac{\pi}{2}) = \cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2}$$

şi astfel

$$\ln z_1 z_2 = \ln 1 + i\frac{\pi}{2}. \tag{2}$$

Confruntând (1) cu (2) găsim rezultate diferite. În general, dacă $\arg z_1 + \arg z_2 \in (-\pi, \pi]$ egalitatea are loc, în caz contrar, nu.

3. Funcţia putere

Definiţia II.8: Pentru fiecare $a \in \mathbb{C}$ se poate defini funcţia $f : \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0] \to \mathbb{C}$, $f(z) = e^{a \ln z} \overset{not}{=} z^a$, numită *funcţia putere*, unde prin ln s-a notat o determinare oarecare a logaritmului complex.

Proprietatea II.4:
1. Restricţia la $\mathbb{R}$ a funcţiei putere complexe în cazul $a \in \mathbb{R}$ coincide cu funcţia putere reală.
2. Dacă $a = n \in \mathbb{N}$, avem o singură determinare a funcţiei putere, iar în cazul $a = \frac{m}{n}$ (unde m şi n sunt numere naturale prime între ele) avem n determinări ale sale.
3. Funcţia putere complexă este olomorfă cu derivata $(z^a)' = a \cdot z^{a-1}, \forall\, z \in \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$ (a fixat în $\mathbb{C}$).

Observaţia II.7: Datorită proprietăţilor speciale ale funcţiei logaritm complex va rezulta că unele dintre relaţiile verificate de funcţia putere din $\mathbb{R}$ nu au loc şi în $\mathbb{C}$; de exemplu $(z^a)^b \neq z^{ab}$ şi $(z^a)^b \neq (z^b)^a$ (în general). Lăsăm aceasta ca un exerciţiu pentru cititor.

4. Funcţiile trigonometrice

Definiţia II.9: Vom defini funcţiile *sinus* şi *cosinus* în complex prin formulele:

$$\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i};$$
$$\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Proprietatea II.5:
1. Restricţiile funcţiilor $\sin|_{\mathbb{R}}$ şi $\cos|_{\mathbb{R}}$ sunt tocmai funcţiile cunoscute din $\mathbb{R}$.
2. $\sin$ *şi* $\cos$ *sunt olomorfe pe $\mathbb{C}$ cu* $\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$.
3. Au loc formulele cunoscute în $\mathbb{R}$ pentru sin si cos, de exemplu:

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1;$$

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \sin z_2 \cos z_1;$$
$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2;$$

Observaţia II.8: Fără a necesita o definire specială, dar cu un rol important în teoria funcţiilor de o variabilă complexă, sunt funcţiile:

-*polinomială*: $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_{n-1} z + a_0$, cu $a_0, ..., a_n \in \mathbb{C}$ şi

-*raţională*: $R : \mathbb{C} \setminus \{z_1, ..., z_k\} \to \mathbb{C}$, $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, unde P, Q sunt funcţii polinomiale, iar $z_1, ..., z_k$ sunt rădăcinile lui $Q : Q(z_1) = ... = Q(z_k) = 0$ şi $Q(z) \neq 0$ pentru $z \neq z_1, ..., z_k$.

Capitolul al III-lea
Integrale curbilinii în $\mathbb{R}^n$

III.1. Drumuri şi curbe în $\mathbb{R}^n$

Pentru a defini integralele curbilinii de speţa întâi şi de speţa a doua, vom introduce mai întâi noţiunile de drum şi curbă.

Definiţia III.1: Numim *drum parametrizat* în $\mathbb{R}^n$ o funcţie $\gamma\ : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ continuă. Pentru $t \in [a,b]$, notăm $\gamma(t) = (\gamma_1(t), ..., \gamma_n(t))$. Ecuaţiile

$$\gamma : \begin{cases} x_1 = \gamma_1(t) \\ \quad \dots\dots\dots \\ x_n = \gamma_n(t) \end{cases} , t \in [a,b] \tag{1}$$

definesc *reprezentarea parametrică* a drumului γ.

Cazuri particulare: a) $n = 2$. Atunci un drum γ în $\mathbb{R}^2$ se poate scrie sub forma $\gamma(t) = (f(t), g(t))$, $t \in [a,b]$, unde f, g sunt funcţii continue pe $[a,b]$. Putem de asemenea scrie pentru orice $t \in [a,b]$,

$$\gamma : \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) . \end{cases} \tag{2}$$

b) $n = 3$. Un drum γ în $\mathbb{R}^3$ se poate scrie în forma $\gamma(t) = (f(t), g(t), h(t))$, $t \in [a,b]$ sau

$$\gamma : \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) , \end{cases} \tag{3}$$

unde funcţiile f, g, h sunt continue pe $[a,b]$.

Definiţia III.2: Dacă $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ este un drum, atunci mulţimea $\gamma([a,b]) = \{\gamma(t),\ t \in [a,b]\}$ (imaginea intervalului $[a,b]$ prin funcţia γ) se numeşte *imaginea drumui* γ (sau *traiectorie* sau *hodograf*).

Exemplul III.1:

1) Considerăm drumul definit parametric prin

$$\gamma_1 : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t, \end{cases}$$

unde $t \in [0,\pi]$. Imaginea acestui drum este semicercul de centru O şi rază 1 aflat în semilpanul superior,parcurs în sens trigonometric.

2) Fie drumul dat prin ecuaţia implicită $y = \sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1,1]$.El poate fi paremetrizat prin

$$\gamma_2 : \begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{1-t^2}, \end{cases}$$

$t \in [-1,1]$. Se constată că acest drum are aceeaşi imagine ca şi drumul precedent, dar este parcurs invers.

Definiţia III.3: Numim *opusul drumului* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, drumul notat $\gamma^- : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, definit prin $\gamma^-(t) = \gamma(a+b-t)$, $(\forall)\, t \in [a,b]$. Observăm că $\gamma^-(a) = \gamma(b)$, $\gamma^-(b) = \gamma(a)$.

Definiţia III.4: Dacă $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ şi $\gamma_2 : [b,c] \to \mathbb{R}^n$ sunt drumuri cu proprietatea că $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$, numim *juxtapunerea lui* γ_1 *cu* γ_2 drumul $\gamma_1 \cup \gamma_2 : [a,c] \to \mathbb{R}^n$,

$$(\gamma_1 \cup \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), \ t \in [a,b] \\ \gamma_2(t), \ t \in [b,c]. \end{cases}$$

Definiţia III.5: Un drum $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_n)$ se numeşte *drum neted*, dacă funcţiile $\gamma_1, ..., \gamma_n \in C^1([a,b])$. Un drum $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ se numeşte *neted pe porţiuni* dacă se poate scrie ca o juxtapunere a unui număr finit de drumuri netede.

Vom defini în cele ce urmează noţiunile de drum rectificabil şi lungimea unui drum şi vom da o metodă de calcul a lungimii unui drum din $\mathbb{R}^n$. Idea de bază în definirea lungimii unei curbe este o idee fundamentală în matematică, anume aceea de aproximare, aşa cum se va vedea mai jos.

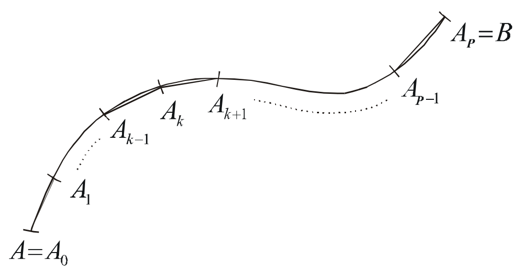

Figura III.1

Fie $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ un drum dat de reprezentarea parametrică (1). Considerăm o diviziune $\Delta \in \mathcal{D}([a,b])$, $\Delta : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_p = b$ şi γ_Δ drumul poligonal (reuniunea segmentelor) cu vârfurile în punctele $A_k(\gamma_1(t_k), ..., \gamma_n(t_k)) \in \gamma$, $(\forall) k = \overline{1,p}$. Atunci lungimea segmentului de dreaptă cu vârfurile în punctele $A_{k-1}(\gamma_1(t_{k-1}), ..., \gamma_n(t_{k-1}))$ şi $A_k(\gamma_1(t_k), ..., \gamma_n(t_k))$ este

$$\sqrt{[\gamma_1(t_k) - \gamma_1(t_{k-1})]^2 + [\gamma_2(t_k) - \gamma_2(t_{k-1})]^2 ... + [\gamma_n(t_k) - \gamma_n(t_{k-1})]^2}$$

şi deci lungimea drumului poligonal γ_Δ este

$$l(\gamma_\Delta) = \sum_{k=1}^{p} |A_{k-1}A_k| =$$

$$= \sum_{k=1}^{p} \sqrt{[\gamma_1(t_k) - \gamma_1(t_{k-1})]^2 + ... + [\gamma_n(t_k) - \gamma_n(t_{k-1})]^2}. \tag{4}$$

Linia poligonală înscrisă $A_1 A_2 ... A_p$ „aproximează” curba dată.

Definiţia III.6: Spunem că drumul γ *are lungime finită* sau că este *rectificabil* dacă mulţimea $\{l(\gamma_\Delta),\ \Delta \in \mathcal{D}([a,b])\}$ este mărginită. În acest caz, *lungimea* $l(\gamma)$ *a drumului* γ se defineşte prin

$$l(\gamma) = \sup_{\Delta \in \mathcal{D}[a,b]} l(\gamma_\Delta).$$

Prezentăm mai jos cîteva proprietăţi ale lungimii unui drum.

Propoziţia III.1: *a) Pentru orice drum rectificabil* γ, *avem* $l(\gamma) = l(\gamma^-)$;

b) Dacă γ_1, γ_2 *sunt drumuri juxtapozabile rectificabile, atunci* $\gamma_1 \cup \gamma_2$ *este rectificabil şi* $l(\gamma_1 \cup \gamma_2) = l(\gamma_1) + l(\gamma_2)$.

Teorema III.1: (de reprezentare integrală a lungimii unui drum) *Fie* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *un drum neted reprezentat parametric prin relaţiile* (1). *Atunci drumul* γ *este rectificabil, iar lungimea sa este*

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{[\gamma_1'(t)]^2 + ...[\gamma_n'(t)]^2} dt. \tag{5}$$

Analizăm acum un caz particular important pentru aplicaţii, anume cazul drumurilor date implicit: $y = f(x)$; el se poate paremetriza considerând x ca parametru.

Corolar III.1: *Presupunem că* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ *este un drum definit parametric prin*

$$\gamma : \begin{cases} x = x, \\ y = f(x), \end{cases} \tag{6}$$

pentru $x \in [a,b]$, *unde* $f \in C^1([a,b])$. *Atunci* γ *este drum rectificabil, iar lungimea sa este*

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx. \tag{7}$$

Vom defini în continuare noţiunea de drumuri echivalente. Fie $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ un drum şi $t = \varphi(\tau) : [c,d] \to [a,b]$ o bijecţie continuă strict crescătoare. Atunci $\gamma \circ \varphi$ este tot un drum şi se numeşte *drum obţinut din* γ *prin schimbarea de parametru* $t = \varphi(\tau)$.

Definiţia III.7: Spunem că drumurile $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ şi $\gamma_2 : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ sunt *drumuri echivalente prin relaţia s de schimbare de parametru* (şi notăm $\gamma_1 s \gamma_2$) dacă există o funcţie $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ bijectivă, continuă şi strict crescătoare astfel încât $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \varphi$.

Un exemplu de drumuri echivalente este dat de γ_1 şi γ_2^- din exemplul III.1.

Se poate demonstra cu uşurinţă următorul rezultat:

Teorema III.2: *Relaţia s mai sus definită este o relaţie de echivalenţă pe mulţimea drumurilor din* $\mathbb{R}^n$.

Definiţia III.8:. Numim *curbă orientată* o clasă de drumuri echivalente în raport cu relaţia s de schimbare de parametru.

Observaţia III.1: Se poate arăta că lungimea unei curbe nu depinde de parametrizare.

Spunem că o curbă este *de clasă* C^1 (sau *curbă netedă*) dacă un reprezentant al clasei de echivalenţă care este curba este drum de clasă C^1 (neted). Analog se defineşte o curbă netedă pe porţiuni. De altfel, vom identifica clasa de echivalenţă (curba) cu un reprezentant (drum).

Se poate arăta că dacă $\gamma_1 s \gamma_2$, atunci $l(\gamma_1) = l(\gamma_2)$.

III.2: Integrale curbilinii de speţa I

Pentru a introduce integrala curbilinie de speţa I, să luăm un exemplu din fizică: fie $\overset{\frown}{AB}$ un arc de curbă (de exemplu în plan), pe care ni-l imaginăm ca pe un fir material (figura III.1). Presupunem că ştim densitatea $\rho(M)$ a firului în punctul M al arcului $\overset{\frown}{AB}$.

Considerăm o diviziune a arcului $\overset{\frown}{AB}$: $A = A_0, A_1, \dots, A_{k-1}, A_k, \dots, A_n = B$ (în această ordine) şi punctele intermediare $M_k \in A_{k-1}A_k$, (ceea ce revine la considerarea unei divizări a int

această divizare). Calculăm masa porţiunii de fir $A_{k-1}\overset{\frown}{\;}A_k$. Ea se aproximează cu

$\rho(M_k) \cdot l\left(A_{k-1}\overset{\frown}{\;}A_k\right)$, unde $l\left(A_{k-1}\overset{\frown}{\;}A_k\right)$ este lungimea arcului $A_{k-1}\overset{\frown}{\;}A_k$. Deci,

$$\text{masa } \overset{\frown}{AB} \approx \sum_{k=1}^{n} \rho(M_k) \cdot l\left(A_{k-1}\overset{\frown}{\;}A_k\right).$$

De aici rezultă că masa $\overset{\frown}{AB} = \lim\limits_{||\Delta|| \to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} \rho(M_k) \cdot l\left(A_{k-1}\overset{\frown}{\;}A_k\right)$, unde $||\Delta|| = \max\left\{l\left(A_{k-1}\overset{\frown}{\;}A_k\right),\ k = \overline{1,n}\right\}$. Aceasta este o prezentare intuitivă a unei probleme practice care a condus la introducerea noţiunii de integrală curbilinie de speţa întâi.

Fie $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ un drum rectificabil, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n)$ şi $F : \gamma([a,b]) \to \mathbb{R}$ o funcţie dată. Vom defini integrala curbilinie a lui F în raport cu lungimea de arc. Pentru aceasta, fie $\Delta : a = t_0 < t_1 < ... < t_p = b$ diviziune a intervalului $[a,b]$ şi $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$, $k = \overline{1,p}$ un sistem de puncte intermediare. Notăm $P_k = \gamma(t_k)$ şi s_k lungimea segmentului de dreaptă de extremităţi P_{k-1} şi P_k, adică

$$s_k = l([P_{k-1}P_k]) = \sqrt{[\gamma_1(t_k) - \gamma_1(t_{k-1})]^2 + ... + [\gamma_n(t_k) - \gamma_n(t_{k-1})]^2}.$$

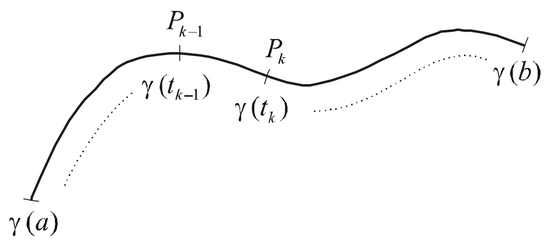

Figura III.2

Atunci suma Riemann ataşată funcţiei F în raport cu lungimea curbei γ, diviziunii Δ şi sistemului de puncte intermediare $\tau = \{\tau_k\}_{k=\overline{1,p}}$ este

$$S_\gamma(F, \Delta, \tau) = \sum_{k=1}^{p} F(\gamma(\tau_k))\, s_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{p} F(\gamma_1(\tau_k), ..., \gamma_n(\tau_k)) \sqrt{[\gamma_1(t_k) - \gamma_1(t_{k-1})]^2 + ... + [\gamma_n(t_k) - \gamma_n(t_{k-1})]^2}.$$

Reamintim că prin norma diviziunii Δ înţelegem numărul

$$||\Delta|| = \max\left\{t_k - t_{k-1}, k = \overline{1,p}\right\}.$$

Definiţia III.9: Spunem că funcţia F este *integrabilă în raport cu lungimea curbei* γ dacă există un număr real I cu proprietatea că $(\forall)\,\varepsilon > 0$, $(\exists)\,\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât $(\forall)\ \Delta \in \mathcal{D}([a,b])$(=mulţimea diviziunilor intervalului $[a,b]$) cu $||\Delta|| < \delta(\varepsilon)$ şi oricare ar fi sistemul de puncte intermediare $\tau = \{\tau_k\}_{k=\overline{1,p}}$, să avem

$$|S_\gamma(F, \Delta, \tau_k) - I| < \varepsilon.$$

În acest caz, numărul I se numeşte *integrala curbilinie (pe curba* γ*) a funcţiei* F şi se notează $I = \int_\gamma F(x)\, dl$.

Demonstrăm în cele ce urmează un rezultat care asigură, în anumite ipoteze suplimentare, existenţa integralei curbilinii şi în plus ne dă o formulă de calcul a acestei integrale cu ajutorul integralei Riemann.

Teorema III.3 (**Teorema de reducere a integralei curbilinii de speţa I la o integrală Riemann**):

Fie $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$,

$$\gamma : \begin{cases} x_1 = \gamma_1(t) \\ \dots\dots\dots \\ x_n = \gamma_n(t), \end{cases} \tag{8}$$

$t \in [a,b]$, *o reprezentare parametrică a curbei* γ *netede (de clasă* C^1*) sau netede pe porţiuni şi* $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *(*D *domeniu ce conţine curba* γ*) o funcţie* *continuă. Atunci există integrala curbilinie* $\int\limits_{\gamma} F(x)\,dl$ *şi avem*

$$\int\limits_{\gamma} F(x_1,...,x_n)\,dl = \int_a^b F(\gamma(t))\sqrt{(\gamma_1'(t))^2+...+(\gamma_n'(t))^2}dt. \qquad (9)$$

Din definiţie rezultă cu uşurinţă următoarele proprietăţi ale integralelor curbilinii de speţa I. Demonstraţiile lor le lăsăm în seama cititorului.

Propoziţia III.2: *a) Dacă* $\gamma_1 s \gamma_2$ *şi* F *este integrabilă pe* γ_1, *atunci* F *este integrabilă şi pe* γ_2 *şi* $\int\limits_{\gamma_1} Fdl = \int\limits_{\gamma_2} Fdl.$

b) *Dacă* F *este integrabilă pe* γ, *atunci* F *este integrabilă şi pe* γ^- *şi* $\int\limits_{\gamma} Fdl = -\int\limits_{\gamma^-} Fdl.$

c) Dacă γ_1 *şi* γ_2 *sunt drumuri juxtapozabile şi* F *este o funcţie integrabilă pe* $\gamma_1 \cup \gamma_2$, *atunci* F *este integrabilă pe* γ_1 *şi pe* γ_2 *şi*

$$\int\limits_{\gamma_1\cup\gamma_2} Fdl = \int\limits_{\gamma_1} Fdl + \int\limits_{\gamma_2} Fdl.$$

d) *Dacă* F, G *sunt două funcţii integrabile pe* γ *şi* λ, μ *sunt doi scalari reali, atunci* $\lambda F + \mu G$ *este o funcţie integrabilă pe* γ *şi avem*

$$\int\limits_{\gamma} (\lambda F + \mu G)dl = \lambda \int\limits_{\gamma} Fdl + \mu \int\limits_{\gamma} Gdl.$$

III.3: Integrale curbilinii de speţa a II-a

Definiţia III.10: Numim *formă diferenţială pe domeniul* $D \subseteq \mathbb{R}^n$ o expresie de tipul $\omega = P_1dx_1 + ... + P_ndx_n$, unde $P_1, ..., P_n : D \to \mathbb{R}$ sunt funcţii date depinzând de n variabile. Aceste funcţii P_j, $j = \overline{1,n}$ se numesc *coeficienţii formei diferenţiale* ω.

Definiţia III.11: Două forme diferenţiale $\omega = P_1dx_1 + ... + P_ndx_n$ şi $\widetilde{\omega} = \widetilde{P_1}dx_1 + ... + \widetilde{P_n}dx_n$ se numesc *egale* dacă $P_j = \widetilde{P_j}$, pentru orice $j = \overline{1,n}$.

Cazuri particulare: a) Pentru $n = 2$, notăm variabilele independente cu x, y şi astfel o formă diferenţială ω definită pe un domeniu D din $\mathbb{R}^2$ se va scrie în forma

$$\omega = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy.$$

a) Pentru $n = 3$, notăm variabilele independente cu x, y, z. O formă diferenţială ω definită pe un domeniu D din $\mathbb{R}^3$ va avea forma

$$\omega = P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz.$$

Vom defini în continuare integralele curbilinii de speţa a doua sau dintr-o formă diferenţială ω. Pentru aceasta, fie $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ un drum dat parametric prin

$$\gamma : \begin{cases} x_1 = \gamma_1(t) \\ \text{..........} \\ x_n = \gamma_n(t), \end{cases} \tag{10}$$

şi $P_1, ...P_n : \gamma([a,b]) \to \mathbb{R}$ funcţii date. Notăm $\omega = P_1 dx_1 + ... + P_n dx_n$. Fie diviziunea $\Delta : a = t_0 < t_1 < ... < t_p = b$ a intervalului $[a,b]$ şi $\tau = \{\tau_k\}_{k=\overline{1,p}}$, $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$, $k = \overline{1,p}$ un sistem de puncte intermediare. Construim suma Riemann asociată formei diferenţiale ω, diviziunii Δ şi sistemului de puncte intermediare τ în raport cu γ :

$$S_\gamma(\omega, \Delta, \tau) = \sum_{k=1}^{p} \{P_1(\gamma(\tau_k))[\gamma_1(t_k) - \gamma_1(t_{k-1})] +$$

$$+ ... + P_n(\gamma(\tau_k))[\gamma_n(t_k) - \gamma_n(t_{k-1})]\}.$$

Definiţia III.12: Spunem că forma diferenţială ω este *integrabilă pe* γ dacă există un număr real I astfel încât $(\forall)\,\varepsilon > 0$, $(\exists)\,\delta(\varepsilon) > 0$ astfel ca $(\forall)\,\Delta \in \mathcal{D}([a,b])$ cu $||\Delta|| < \delta(\varepsilon)$ şi $(\forall)\,\tau = \{\tau_k\}_{k=\overline{1,p}}$ un sistem de puncte intermediare, să avem

$$|S_\gamma(\omega, \Delta, \tau) - I| < \varepsilon. \tag{11}$$

Numărul real I, dacă există, se numeşte *integrala formei diferenţiale* ω *pe* γ şi se notează $I = \int\limits_\gamma \omega$.

Propoziţia III.3: *1) Dacă ω_1, ω_2 sunt forme diferenţiale integrabile pe curba γ şi λ_1, λ_2 sunt scalari reali, atunci $\int\limits_\gamma (\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2) = \lambda_1 \int\limits_\gamma \omega_1 + \lambda_2 \int\limits_\gamma \omega_2$ (liniaritatea integralei curbilinii de speţa a doua în raport cu forma diferenţială).*

2) Dacă γ_1, γ_2 sunt drumuri juxtapozabile şi forma diferenţială ω este integrabilă pe curba $\gamma_1 \cup \gamma_2$, atunci ω este integrabilă atât pe γ_1, cât şi pe γ_2 şi $\int\limits_{\gamma_1\cup\gamma_2} \omega = \int\limits_{\gamma_1} \omega + \int\limits_{\gamma_2} \omega$.

3) Dacă ω este o formă diferenţială integrabilă pe γ, iar γ^- este opusul lui γ, atunci ω este integrabilă şi pe γ^- şi $\int\limits_{\gamma^-} \omega = -\int\limits_\gamma \omega$.

Dăm şi în acest caz o metodă de calcul a integralei cu ajutorul integralelor Riemann.

Teorema III.4 (**Teorema de reducere la o integrală Riemann**): *Considerăm un drum rectificabil $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, neted sau neted pe porţiuni, dat parametric prin relaţiile* (5.10) *şi $\omega = P_1 dx_1 + ... + P_n dx_n$ o formă diferenţială, unde $P_1, ..., P_n : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sunt funcţii continue şi $\gamma \subset D$ (D fiind domeniu). Atunci ω este integrabilă pe γ şi are loc relaţia*

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{a}^{b} [P_1(\gamma(t)) \cdot \gamma_1^{'}(t) + ... + P_n(\gamma(t)) \cdot \gamma_n^{'}(t)]dt. \tag{12}$$

Observaţia III.2: Se ştie că lucrul mecanic al unei forţe conservative $\overline{F}$ care se deplasează parcurgând arcul $\overset{\frown}{AB}$ este dat de $L = \int_{\overset{\frown}{AB}} \overline{F} \cdot \overline{dr}$, deci el se exprimă cu ajutorul unei integrale curbilinii de speţa a doua:

$$L = \int_{\overset{\frown}{AB}} P_1 dx_1 + P_2 dx_2 + P_3 dx_3,$$

unde (P_1, P_2, P_3) sunt componentele forţei $\overline{F}$, iar $\overline{r} = (x_1, x_2, x_3)$ este deplasarea. Este ştiut faptul că lucrul mecanic al forţei conservative $\overline{F}$ care îşi deplasează punctul de aplicare, nu depinde de drumul parcurs, ci doar de doar de extremităţile drumului.

Acest exemplu fizic ne sugerează introducerea noţiunii de independenţă de drum a unei integrale curbilinii de speţa a doua.

Definiţia III.13: Fie $\omega = P_1 dx_1 + ... + P_n dx_n$ o formă diferenţială, unde $P_1, ..., P_n : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ şi γ_1, γ_2 două curbe din domeniul D având aceleaşi capete. Integrala formei ω se numeşte *independentă de drum* dacă $\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$.

Definiţia III.14: Forma diferenţială $\omega = P_1 dx_1 + ... + P_n dx_n$, cu $P_1, ..., P_n : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, se numeşte *exactă* dacă există o funcţie $f : D \to \mathbb{R}$ diferenţiabilă încât

$$df = \omega. \tag{13}$$

În acest caz , f se numeşte *primitivă pentru forma diferenţială* ω, iar condiţia $df = \omega$ revine la următoarele egalităţi:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = P_1, \frac{\partial f}{\partial x_2} = P_2, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n} = P_n. \tag{14}$$

Vom da în continuare o generalizare a Teoremei Leibniz-Newton pentru integralele curbilinii de speţa a II-a.

Teorema III.5: *Fie forma diferenţială exactă ω având coeficienţii continui pe $D \subset \mathbb{R}^n$ şi curba netedă $\gamma : [a, b] \to D$. Dacă f este o primitivă pentru ω, atunci:*

$$\int_{\gamma} \omega = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)). \tag{15}$$

Observaţia III.3: Proprietatea rămâne valabilă şi pentru drumuri netede pe porţiuni. Într-adevăr, dacă $\gamma = \gamma_1 \cup ... \cup \gamma_m$, unde $\gamma_1, ..., \gamma_2$ sunt netede, atunci

$$\int\limits_{\gamma}\omega=\int\limits_{\gamma_1}\omega+...+\int\limits_{\gamma_m}\omega=f(\gamma(b_1))-f(\gamma(a))+...+f(\gamma(b_m))-f(\gamma(b_{m-1})),$$

unde $b_m=b$ şi (a,b_1) , (b_1,b_2) , ..., (b_{m-1},b) sunt extremităţile drumurilor γ_1, γ_2, ...,γ_m. Deci $\int\limits_{\gamma}\omega=f(\gamma(b))-f(\gamma(a))$.

Observaţia III.4: Aproximând drumurile rectificabile prin linii poligonale înscrise (care sunt drumuri netede pe porţiuni), putem aplica Observaţia III.3 pentru a deduce că Teorema III.5 se menţine şi pentru drumuri rectificabile.

Prezentăm acum o teoremă de caracterizare a independenţei de drum a integralelor curbilinii de speţa a doua.

Teorema III.6: *Fie ω o formă diferenţială având coeficienţii continui pe D. Integrala lui ω este independentă de drum dacă şi numai dacă pentru orice drum inclus în D, $\gamma:[a,b]\to D\subseteq\mathbb{R}^n$, închis ($\gamma(a)=\gamma(b)$), avem $\int\limits_{\gamma}\omega=0$.*

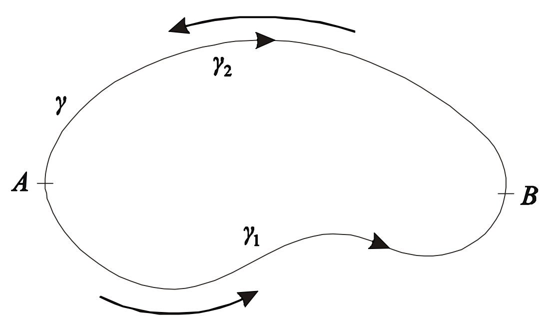

Figura III.3

Definiţia III.15: Mulţimea deschisă $D\subseteq\mathbb{R}^n$ se numeşte *mulţime conexă* (prin arce) dacă orice două puncte ale sale pot fi unite printr-o linie poligonală inclusă în mulţimea D.

Teorema III.7: *1) Orice formă diferenţială exactă cu coeficienţi continui pe o mulţime D are integrala independentă de drum.*

2) Dacă D este deschisă şi conexă (prin arce), are loc şi reciproca.

Urmărim în cele ce urmează să stabilim condiţii (necesare şi suficiente) care să asigure faptul că o formă diferenţială este exactă.

Definiţia III.16: Fie ω o formă diferenţială, $\omega=P_1(x_1,...,x_n)dx_1+...+P_n(x_1,...,x_n)dx_n$, cu $P_i:D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ de clasa C^1. Forma diferenţială ω se numeşte *închisă* dacă

$$\frac{\partial P_k}{\partial x_j}=\frac{\partial P_j}{\partial x_k},(\forall)\,k,,j=\overline{1,n}\,,k\neq j. \tag{15}$$

Teorema III.8: *Fie $\omega=P_1dx_1+...+P_ndx_n$, $P_i:D\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $i=\overline{1,n}$ de clasa C^1 pe D. Dacă forma diferenţială ω este exactă, atunci ω este închisă.*

Reciproca Teoremei III.8 nu este în general adevarată. Ea are loc totuşi pe mulţimi cu o structura mai specială, numite mulţimi simplu conexe.

Definiţia III.17: O mulţime $D \subset \mathbb{R}^n$ se numeşte *simplu conexă* dacă este conexă şi orice două curbe $\gamma_1, \gamma_2 : [a,b] \to D$ pot fi deformate în mod continuu una în alta, deformările rămânând în mulţimea D. (sau, echivalent, orice curbă închisă $\gamma : [a,b] \to D$ poate fi restânsă la un punct din D fără a ieşi din mulţimea D).

Observaţia III.5: Din punct de vedere intuitiv, un domeniu simplu conex este o mulţime fără "găuri".

De exemplu, orice curbă simplă $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ (adică injectivă pe $[a,b)$) şi închisă, $\gamma \subseteq D$, delimitează un domeniu simplu conex inclus în D.

De asemenea orice bilă din spaţiul $\mathbb{R}^n$ este o mulţime simplu conexă.

Formulăm acum reciproca teoremei III.8 pe mulţimi simplu conexe:

Teorema III.9: *Fie $\omega = P_1 dx_1 + ... + P_n dx_n$, $P_i : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$ de clasa C^1 pe mulţimea simplu conexă D. Dacă forma diferenţială ω este închisă, atunci ω este exactă.*

Corolar III. 2: *Dacă D este o mulţime simplu conexă din $\mathbb{R}^n$, iar $\omega = P_1 dx_1 + ... + P_n dx_n$ este o formă diferenţială închisă cu coeficienţii $P_i : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $P_i \in C^1(D)$, $i = \overline{1,n}$, atunci integrala lui ω pe orice curbă închisă inclusă în D este zero.*

Capitolul al IV-lea
Integrala funcţiilor complexe

IV.1 Definiţia şi proprietăţile integralei complexe

Definiţia IV.1: Fie $f : (\gamma) \to \mathbb{C}$, unde $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ este un drum din planul complex. Pentru a defini integrala funcţiei f pe curba (γ) considerăm o divizare a intervalului $[a, b]$.

$\Delta :\quad a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ care induce pe curba γ o *divizare* prin punctele $z_k = \gamma(t_k)$, $\forall\, k = \overline{1, n}$.

Fie şi *sistemul de puncte intermediare (s.p.i.)* (ζ_k), unde $\zeta_k = \gamma(\tau_k) \in (\gamma), \forall\ k = \overline{1, n}$, $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$.

Norma divizării Δ este $\|\Delta\| = \max\{|t_k - t_{k-1}|;\ \ k = \overline{1, n}\}$, iar *suma Riemann* ataşată funcţiei f pe divizarea Δ şi sistemului de puncte intermediare (s.p.i.) ζ este

$$S_{\Delta,\zeta}(f) = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1})$$

Funcţia f se numeşte *integrabilă pe curba* (γ) dacă:

există $I \in \mathbb{C}$ încât pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon > 0$ cu proprietatea că oricare ar fi divizarea Δ, cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$ şi oricare ar fi sistemul de puncte intermediare (ζ) avem $|S_{\Delta,\zeta}(f) - I| < \varepsilon$.

În cazul în care numărul I există, îl vom nota cu $\int\limits_\gamma f(z)dz$ şi îl vom numi *integrala funcţiei* f *pe curba* (γ).

Observaţia IV.1: I este limita sumelor Riemann luate pe toate diviziunile Δ cu norma $\|\Delta\| \to 0$. Rezultă că numărul I definit mai sus, atunci când există, este unic (ca limita unei şir din $\mathbb{R}$).

Teorema IV.1: *Fie* $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ *şi* $(\gamma) \subset D$ *o curbă. Dacă* f *este integrabilă pe* (γ), *atunci:*

$$\int\limits_\gamma f(z)dz = \int\limits_\gamma u(x, y)dx - v(x, y)dy + i\int\limits_\gamma v(x, y)dx + u(x, y)dy.$$

Vedem astfel că integrala unei funcţii complexe se reduce la două integrale curbilinii de specia a II-a. Aplicând rezultatele cunoscute pentru integralele curbilinii de specia a II-a (a se vedea formula (12) din teorema III.4) , obţinem următoarea teoremă:

Teorema IV.2: *Dacă* $f : (\gamma) \to \mathbb{C}$ *este o funcţie continuă, iar* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ *este o curbă netedă, atunci* f *este integrabilă pe* (γ) *şi are loc:*

$$\int\limits_\gamma f(z)dz = \int\limits_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt \tag{1}$$

sau, echivalent,

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{a}^{b} [u(\phi(t),\psi(t)) \cdot \phi'(t) - v(\phi(t),\psi(t)) \cdot \psi'(t)]dt +$$

$$+i\int_{a}^{b} [v(\phi(t),\psi(t)) \cdot \phi'(t) - u(\phi(t),\psi(t)) \cdot \psi'(t)]dt, \tag{2}$$

unde $\gamma(t) = \phi(t) + i\psi(t)$.

Teorema IV.3: *Dacă* f *este integrabilă pe* (γ) *atuci are loc inegalitatea:*

$$\left| \int_{\gamma} f(z)dz \right| \leq l(\gamma) \cdot \sup_{z\in\gamma} |f(z)|,$$

unde $l(\gamma)$ *este lungimea curbei* (γ).

În cele ce urmează intenţionăm să dăm o formulă de tip Leibniz-Newton pentru integrelele funcţiilor complexe.

Definiţia IV.2: O funcţie $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *admite primitive* dacă există $F : D \to \mathbb{C}$ olomorfă încât $F' = f$. Funcţia F se numeşte *primitivă* pentru funcţia f.

Observaţia IV.2: Dacă $F = U + iV$, iar $f = u + iv$, condiţia ca F să fie primitivă pentru f se scrie (din teorema lui Riemann):

$\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial V}{\partial x} = u + iv$,adică $\begin{cases} u = \frac{\partial U}{\partial x} \\ v = \frac{\partial V}{\partial x} \end{cases}$.

Pe de altă parte, aşa cum am vazut în teorema IV.1, calculul oricărei integrale complexe revine la calculul a două integrale curbilinii de specia a doua.

Aceasta ne sugerează că pentru a stabili o formulă de tip Leibniz-Newton am putea utiliza primitivele pentru forme diferenţiale aşa ca în Capitolul III (Definiţia III.13). Teorema următoare dă legătura dintre cele două maniere de a defini primitivele.

Teorema IV.4: *În cazul în care funcţia* $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *este continuă,* $f = u + iv$, *funcţia* $F = U + iV$ *este primitivă a lui* f *dacă şi numai dacă* U *este primitivă pentru forma diferenţială* $\omega_1 = udx - vdy$,*iar* V *este primtivă pentru* $\omega_2 = vdx + udy$.

Dacă notăm cu $\omega_1 = udx - vdy$, $\omega_2 = vdx + udy$, teorema IV.4 afirmă că formele diferenţiale ω_1şi ω_2 sunt exacte.

Atunci, particularizând rezultatele în ceea ce priveşte independenţa de drum a integralelor curbilinii de specia a II-a, obţinem:

Teorema IV.5 (**formula Leibnitz-Newton**): *Dacă* $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *este o funcţie continuă şi admite primitiva* F*, atunci pentru orice drum rectificabil* $\gamma : [a, b] \to D$ *are loc:*

$$\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Teorema IV.6: *Funcţia continuă* $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *admite primitivă dacă şi numai dacă , pentru orice două curbe rectificabile* $(\gamma_1), (\gamma_2) \subset D$ *având aceleaşi capete, avem că*

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

sau, echivalent, dacă şi numai dacă $\int_\gamma f(z)dz = 0$ *pe orice curbă închisă din* D.

În continuare ne vom ocupa de integralele funcţiilor olomorfe.

Teorema IV.7 (teorema fundamentală a lui Cauchy): *Fie* $D \subseteq \mathbb{C}$ *un domeniu simplu conex,* $f : D \to \mathbb{C}$ *o funcţie olomorfă cu* f' *continuă şi* $(\gamma) \subset D$ *o curbă închisă. Atunci* $\int_\gamma f(z)dz = 0$.

Observaţia IV.3 (referitoare la teoremele IV.4 - IV.7): Fie D un domeniu simplu conex, $f : D \to \mathbb{C}$ olomorfă. Din demonstraţia teoremei IV.7 urmează că formele diferenţiabile $\omega_1 = udx - vdy$ şi $\omega_2 = vdx + udy$ sunt închise. Atunci, conform teoremei III.9, ω_1 şi ω_2 sunt exacte, adică adimit primitive. Teorema IV. 4 spune că şi f admite primitive. O primitivă se poate găsi, conform teoremei IV.5, lăsând arbitrar capătul $\gamma(b) = w$ al curbei γ şi notând $\gamma(a) = z_0$; astfel $F(w) = \int_{z_0 w} f(z)dz$ este primitivă pentru f, unde prin $z_0 w$ înţelegem orice curbă rectificabilă având aceste capete (integrala unei functii care admite primitive nu depinde de drumul ales: teorema IV.6).

Deci dată o funcţie olomorfă f pe un domeniu simplu conex D , o primitivă pentru f poate fi calculată prin formula

$$F(w) = \int_{z_0 w} f(z)dz, \text{ } z_0 w \text{ fiind un drum rectificabil cu capetele } z_0 \text{ şi } w.$$

Vom da fără demonstraţie o variantă a teoremei IV.7 care are loc în condiţii mai generale.

Definiţia IV.3: Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu. O curbă închisă $(\gamma) \subset D$ se numeşte *omotopă cu un punct în* D dacă, pentru orice $z_0 \in (\gamma)$, (γ) se poate deforma în mod continuu la curba degenerată z_0, deformările rămânând în mulţimea D.

Observaţia IV:4:

1) Se vede uşor că un domeniu D este simplu conex dacă şi numai dacă orice curbă închisă din D este omotopă cu un punct în D.

2) Dacă D este deschisă şi (γ) este omotopă cu un punct în D, atunci domeniul D_γ determinat de curba (γ) este simplu conex.

Teorema IV.8 (**teorema fundamentală a lui Cauchy - forma generală**):

Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ deschisă, $f : D \to \mathbb{C}$ olomorfă şi $(\gamma) \subset D$ curbă închisă omotopă cu un punct în D.

Atunci $\int\limits_\gamma f(z)dz = 0$.

Exemplul IV.1: Considerăm $(\gamma) \subset \mathbb{C}$ o curba simplă (fără autointersecţii) închisă şi $a \in \mathbb{C}\backslash(\gamma)$.

Să calculăm $\int\limits_\gamma \frac{dz}{z-a}$.

Funcţia $f : \mathbb{C}\backslash\{a\} \to \mathbb{C},\ f(z) = \frac{1}{z-a}$ este olomorfă (cu derivată continuă).

Distingem două situaţii:

1) $a \notin D_\gamma$,unde D_γ este domeniul determinat de curba închisă (γ).

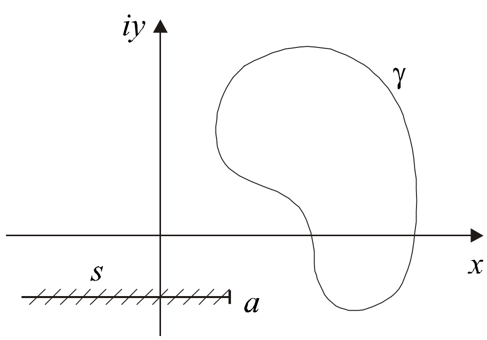

Figura IV.1

Mulţimea $\mathbb{C}\backslash\{a\}$ nu este simplu conexă, dar dacă notăm cu s semidreapta cu vârful în a, paralelă cu axa reală, ce nu intersctează (γ), mulţimea $\mathbb{C}\backslash s$ este domeniu simplu conex în care f este olomorfă (figura IV.1).

Aplicând teorema fundamentală a lui Cauchy funcţiei f pe $\mathbb{C}\backslash s$ rezultă că $\int\limits_\gamma \frac{dz}{z-a} = 0$.

2) $a \in int\, D_\gamma$.

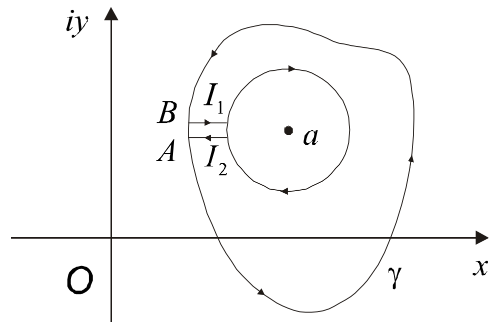

Figura IV.2

Arătăm în acest caz că $\int\limits_{\gamma} \frac{dz}{z-a} = \int\limits_{|w-a|=r} \frac{dz}{z-a}$:

Realizăm o tăietură ce uneşte curba (γ) cu cercul $C(a,r)$ de ecuaţie $|w-a| = r$ (unde alegem $r > 0$ astfel încât $C(a,r) \subset D_\gamma$) prin două segmente paralele la distanţa ε una de alta, notate I_1 şi I_2 (vezi figura IV.2).

Considerăm acum curba $\bar{\gamma}$ obţinută prin parcurgerea curbei γ de la A la B în sens trigonometric, apoi I_1, apoi cercul $C(a,r)$ în sens invers trigonometric, apoi I_2 (în sens opus lui I_1).

Curba $\bar{\gamma}$ este simplă închisă şi putem alege un domeniu simplu conex D în $C\setminus\{a\}$ încât $\bar{\gamma} \subset D$. Atunci $\int\limits_{\bar{\gamma}} f(z)dz = 0$. Pe de altă parte avem că $\int\limits_{\bar{\gamma}} f(z)dz = \int\limits_{\gamma} f(z)dz + \int\limits_{I_1} f(z)dz - \int\limits_{C(a,r)} f(z)dz - \int\limits_{I_2} f(z)dz$ şi pentru $\varepsilon \to 0$ $\int\limits_{I_1} f(z)dz - \int\limits_{I_2} f(z)dz = 0$, de unde $\int\limits_{\gamma} f(z)dz - \int\limits_{C(a,r)} f(z)dz = 0$.

Acum, pentru calculul integralei pe cerc, parametrizăm cercul:

$$C(a,r): \;\; z - a = r(\cos t + i \sin t),\;\; t \in [0, 2\pi].$$

Atunci $\int\limits_{C(a,r)} \frac{dz}{z-a} = \int\limits_{C(a,r)} \frac{r(-\sin t + i\cos t)}{r(\cos t + i \sin t)} dt = \int\limits_0^{2\pi} i dt = 2\pi i$. Deci $\int\limits_{\gamma} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i$.

În sinteză, $\int\limits_{\gamma} \frac{dz}{z-a} = \begin{cases} 0, \text{ dacă } a \notin D_\gamma \\ 2\pi i, \text{ dacă } a \in int\, D_\gamma \end{cases}$.

Aplicaţie: $\int\limits_{C(0,r)} \frac{dz}{z^2-1}$ pentru $r = 1/2$ şi $r = 2$.

Dăm următoarea variantă a teoremei fundamentale a lui Cauchy, utilă în demonstrarea unor formule integrale, cît şi în unele aplicaţii:

Teorema IV.9: *Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ un deschis, iar (γ), o curbă simplă închisă omotopă cu un punct în D, $z_0 \in D\setminus\gamma$ şi $f : D \to \mathbb{C}$ continuă, olomorfă pe $D\setminus\{z_0\}$.*

Atunci $\int\limits_{\gamma} f(z)dz = 0$.

IV.3. Integrale complexe parametrice

Definiţia IV.4: Prin *integrală parametrică* vom înţelege o expresie (care depinde de z) de tipul $\int\limits_{\gamma} f(w,z)dw$, unde $f:(\gamma)\times D\to\mathbb{C}$, cu $D\subset\mathbb{C}$ un domeniu şi (γ) o curbă plană.

Teorema IV.10: *Fie $D\subset\mathbb{C}$ un domeniu şi (γ) o curbă rectificabilă din planul complex. Dacă funcţia $f:(\gamma)\times D\to\mathbb{C}$ este continuă, atunci $F(z)=\int\limits_{\gamma} f(w,z)dw$ este de asemena continuă în D.*

Teorema IV.11: 1. *Dacă funcţia $g_w : D\to\mathbb{C}$, $g_w(z)=f(w,z)$ este olomorfă pentru orice $w\in(\gamma)$, iar $g'_w(z)=\frac{\partial f}{\partial z}(w,z)$ este continuă de ansamblul variabilelor pe $\gamma\times D$, atunci şi funcţia F este olomorfă în D cu*

$$F'(z)=\int\limits_{\gamma}\frac{\partial f}{\partial z}(w,z)dw.$$

2. *Fie $g:(\gamma)\to\mathbb{C}$ funcţie continuă şi*

$$F(z)=\int\limits_{\gamma}\frac{g(w)}{w-z}dw,$$

unde $z\in\mathbb{C}\setminus(\gamma)$.

Atunci F este olomorfă pe $\mathbb{C}\setminus(\gamma)$ şi admite derivate de orice ordin:

$$F^{(n)}(z)=n!\int\limits_{\gamma}\frac{g(w)}{(w-z)^{n+1}}dw.$$

Teorema IV.12 (**formula integrală a lui Cauchy**): *Fie $D\subseteq\mathbb{C}$ un deschis, $(\gamma)\subset D$ curbă simplă închisă, omotopă cu un punct în D, $z_0\in intD_\gamma$, $f:D\to\mathbb{C}$ olomorfă.*

Atunci

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f(z)}{z-z_0}dz.$$

Are loc, de asemenea, şi următorul rezultat important:

Teorema IV.13 (**formula integrală a lui Cauchy generalizată**): *Considerăm $D\subseteq\mathbb{C}$ un deschis, $(\gamma)\subseteq D$ o curbă simplă închisă omotopă cu un punct în D,iar $f:D\to\mathbb{C}$ o funcţie olomorfă. Atunci, oricare ar fi $z_0\in intD_\gamma$, f admite derivată de orice ordin în z_0,iar derivata sa de ordin n este:*

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}dw..$$

Observaţia IV:5: 1) Fie $D \subseteq C, (\gamma) \subseteq D$. Teorema IV.12 ne spune că este suficient să cunoaştem valorile unei funcţii olomorfe pe o curbă (γ) simplă, închisă, omotopă cu un punct în D, pentru a obţine valorile ei în orice punct $z \in intD_\gamma$, anume $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw$; acelaşi lucru este valabil şi pentru valorile derivatelor sale $f^{(n)}(z)$ (teorema IV.13).

Deci putem "reface" funcţia f cunoscând doar valorile pe o curbă simplă închisă (γ).

2) Funcţiile olomorfe pe mulţimi deschise admit derivate de orice ordin n şi acestea sunt date de formula din teorema IV.13.

Teorema IV.14 (**formula integrală a lui Cauchy pentru două curbe**): *Fie $f : D \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă, unde D este o mulţime care conţine cercurile $C(0, R_1)$ şi $C(0, R_2)$. Dacă $z \in \mathbb{C}$ încât $R_1 < |z| < R_2$, are loc formula*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w|=R_2} \frac{f(w)}{w-z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w|=R_1} \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

Iată în continuare o „reciprocă” a teoremei fundamentale a lui Cauchy:

Teorema IV.15 (**teorema lui Morera**): *Fie $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ o funcţie continuă, unde D este mulţime deschisă. Dacă $\int\limits_{\gamma} f(z)dz = 0$ pe orice curbă γ simplă închisă omotopă cu un punct în D, atunci f este olomorfă pe D.*

Corolar IV.1: *Fie $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continuă şi olomorfă pe $D \backslash \{z_0\}$, unde D este mulţime deschisă şi $z_0 \in D$. Atunci f este olomorfă pe D.*

Această consecinţă a teoremei lui Morera are un rol important atât în unele rezultate teoretice,cât şi în rezolvarea unor probleme.

Formulăm în continuare o aplicaţie la formula integrală generalizată a lui Cauchy :

Teorema IV.16 (**teorema lui Liouville**): *Dacă $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ este o funcţie olomorfă şi mărginită atunci este constantă.*

Capitolul al V-lea
Serii Taylor şi serii Laurent

V.1. Serii de funcţii

În acest capitol vom prezenta două tipuri speciale de serii de funcţii, anume seriile Taylor şi seriile Laurent. Ele se vor dovedi deosebit de importante atunci când vom introduce noţiunea de singularitate izolată a unei funcţii complexe şi de reziduu.

Vom reaminti la început câteva definiţii referitoare la seriile de funcţii reale (convergenţă punctuală, absolută şi uniformă), cât şi enunţul unor criterii de convergenţă. Vom puncta apoi care dintre aceste rezultate se menţin şi în cazul funcţiilor complexe.

Pentru o abordare unitară vom nota în acest capitol prin Λ corpul $\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$.

Definiţia V.1: Fie $f_n : D \subseteq \Lambda \to \Lambda, \forall\, n \in N$. Se numeşte *serie de funcţii* de termen general f_n cuplul format din şirurile $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, unde S_n este şirul sumelor parţiale:

$S_n = f_0 + f_1 + ... + f_n, \forall\, n \in N$. Vom nota această serie cu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$.

Definiţia V.2: Seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ se numeşte *convergentă în* z_0 dacă seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(z_0)$ de numere din Λ este convergentă.

Definiţia V.3: Seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ se numeşte *punctual convergentă pe o mulţime* $A \subseteq D$ dacă seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ este convergentă în orice $z \in A$.

Deoarece pe Λ şirurile convergente coincid cu şirurile Cauchy, definiţia de mai sus este echivalentă cu condiţia Cauchy:

$$\forall\, z \in A \quad \forall \varepsilon > 0 \;\exists\; n_{z,\varepsilon} \in N \text{ astfel încât } \forall\, n \geq n_{z,\varepsilon}, \forall p \in N \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f_{n+1}(z) + ... + f_{n+p}(z)| < \varepsilon.$$

Definiţia V.4: Seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ se numeşte *absolut convergentă în punctul* $z \in D$ dacă seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |f_n\,(z)|$ este convergentă ca serie de numere reale pozitive.

Definiţia V.5: Mulţimea punctelor în care o serie de funcţii este convergentă punctual se numeşte *mulţime de convergenţă* .

În baza condiţiei Cauchy putem formula si alte definitii în mod convenabil:

Definiţia V.6: Serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ este *uniform convergentă pe o mulţime* $K \subset \Lambda$ dacă

$$\forall \varepsilon > 0 \;\exists\; n_\varepsilon \in N \;\; a.i. \forall\, n \geq n_\varepsilon\,, \forall\, p \in N \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |f_{n+1}(z) + ... + f_{n+p}(z)| < \varepsilon, \forall\, z \in K.$$

Definiţia V.7: Seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ este *uniform convergentă pe compactele din* D dacă oricare ar fi un compact $K \subseteq D$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ este uniform convergentă pe K:

$$\forall K \subseteq D \text{ compact}, \forall \varepsilon > 0 \; \exists \; n_{K,\varepsilon} \in N \text{ astfel încât} \, \forall \, n \geq n_{K,\varepsilon}, \forall \, p \in N \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f_{n+1}(z) + ... + f_{n+p}(z)| < \varepsilon, \forall \, z \in K.$$

Uniforma convergenţă pe compactele dintr-o mulţime asigură convergenţa punctuală pe acea mulţime. De asemenea convergenţa uniformă treansferă unele proprietăţi (continuitate, integrabilitate) de la termenii seriei la suma seriei:

Propoziţia V.1: *Fie $f_n : D \subseteq \Lambda \to \Lambda$ un şir de funcţii astfel încât seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ este uniform convergentă la f pe compactele din mulţimea de convergenţă D_1.*

1) Atunci $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ este şi punctual convergentă pe D_1.

2) Presupunem că f_n sunt continue pe D_1; atunci f este de asemenea continuă.

3) Dacă $\Lambda = \mathbb{R}$ si f_n sunt integrabile Riemann, atunci f este integrabilă Riemann.

4) Considerăm $\Lambda = \mathbb{C}$.

Dacă f_n sunt continue pe o curbă netedă $\gamma \subset D_1$ atunci $\int\limits_{\gamma} \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(z)dz$ converge uniform la $\int\limits_{\gamma} f(z)dz$.

Presupunem că f_n sunt olomorfe. Atunci f este olomorfă şi în plus seria derivatelor de orice ordin k, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}$ este uniform convergentă pe compactele din D_1 la $f^{(k)}$.

Un rezultat de uniformă convergenţă a unei serii de funcţii reale sau complexe este:

Teorema V.1 (criteriul lui Weierstrass): *Dacă $f_n : D \subseteq \Lambda \to \Lambda$ este un şir de funcţii astfel încât*

$$\exists (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset [0, +\infty) \text{ cu } |f_n(t)| \leq \alpha_n, \, \forall \, n \in \mathbb{N}, \forall \, t \in D$$

şi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ este convergentă, atunci seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ este absolut şi uniform convergentă pe D.

Vom reaminti încă două rezultatei de uniformă convergenţă specifice seriilor de funcţii reale:

Teorema V.2 (**criteriul lui Abel de uniformă convergenţă**): *Fie* $f_n, g_n : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *două şiruri de funcţii. Dacă seria* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *este uniform convergentă pe* D*, iar şirul de funcţiile* g_n *este monoton descrescător şi uniform mărginit pe* D *(există* $M > 0$ *astfel încât* $|g_n(t)| \leq M$*, pentru orice* $t \in D$*), atunci seria* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n g_n$ *este uniform convergentă pe* D*.*

Teorema V.3 (**criteriul lui Dirichlet de uniformă convergenţă**): *Fie* $f_n, g_n : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *două şiruri de funcţii. Dacă seria* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *are şirul sumelor parţiale* $S_n = f_1 + f_2 + ... + f_n$ *uniform mărginit pe* D*, iar şirul de funcţiile* g_n *este monoton descrescător şi uniform convergent la* 0 *, atunci seria* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n g_n$ *este uniform convergentă pe* D*.*

V.2. Serii Taylor complexe

Cele mai multe rezultate din paragraful precedent se pot transpune şi pentru serii complexe. În continuare le vom formula pe cele mai importante şi, acolo unde există deosebiri semnificative de în demonstraţii, vom indica raţionamentele respective.

Definiţia V.8: Se numeşte *serie de puteri în panul complex* (sau *serie Taylor*) o serie de funcţii de variabila $z \in \mathbb{C}$ de forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{5}$$

unde $z_0 \in \mathbb{C}$ este un număr fixat, iar $(a_n)_{n \in N}$ este un şir de numere complexe.

În acest caz funcţiile termen sunt $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f_n(z) = a_n(z - z_0)^n$. Luând $z_0 = 0$ obţinem seria

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \tag{5'}$$

Pentru seriile (5) şi $(5')$ suntem interesaţi să răspundem la aceleaşi probleme ca în paragreful anterior referitor la structura mulţimii de convergenţă, tipul de convergenţă a serii $(5')$ şi proprietăţile funcţiei sumă. Informaţiile esenţiale obţinute pentru seria $(5')$ se vor transfera print-o translaţie de pas z_0 la seria (5).

Exemplul V.2: Seria geometrică $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ este convergentă pe discul unitate deschis $|z| < 1$ şi are suma

$$f(z) = \frac{1}{1-z} \text{ pentru } |z| < 1.$$

Pentru $|z| \geq 1$, seria nu este convergentă.

Cercetăm structura de convergenţă a seriei de puteri $(5')$. Similar cazului seriilor de puteri reale avem şi în complex următoarea teoremă:

Teorema V.4 (**teorema lui Abel în planul complex**):

1) Dacă există $z_0 \in \mathbb{C}, z_0 \neq 0$, *astfel încât* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ *converge, atunci* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *converge pentru orice* $z \in \mathbb{C}$ *cu* $|z| < |z_0|$.

Mai mult, convergenţa este absolută şi uniformă pe compactele din discul $D(0, |z_0|)$.

2) Dacă există $z_1 \in \mathbb{C}$ *încât* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_1^n$ *diverge, atunci* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *diverge pentru orice* $z \in \mathbb{C}$ *cu* $|z| < |z_1|$.

Teorema V.5 (**teorema razei de convergenţă**): *Pentru seria de puteri* $(5')$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *există şi este unic elementul* $r \in [0, +\infty]$ *astfel încât:*

1) Dacă $r = 0$, *convergenţa seriei* $(5')$ *are loc numai în* $z_0 = 0$.

2) Dacă $r \in (0, \infty)$, *seria* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *converge absolut şi uniform pe compactele din* $D(0, r)$ *şi diverge pe* $\mathbb{C} \setminus \overline{D}(0, r)$; *pe cercul* $|z| = r$ *convergenţa se studiază de la caz la caz.*

3) Daca $r = +\infty$, *atunci* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *converge absolut şi uniform pe compactele din* $\mathbb{C}$.

Definiţia V.9: Vom numi *rază de convergenţă* pentru seria $(5')$ elementul (unic) $r \in [0, +\infty]$ a cărui existenţă este asigurată de teorema precedentă.

Teorema V.6(formule de calcul pentru raza de convergenţă în $\mathbb{C}$):

1) **Formula lui Hadamard**: *Raza de convergenţă* r *pentru seria* $(5')$ *este dată de*

$$r = \frac{1}{l}, \text{ unde } l = \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

(unde s-a făcut convenţia $r = +\infty$ *pentru* $l = 0$ *şi* $r = 0$ *pentru* $l = +\infty$*).*

2) Dacă există $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l_1$*,atunci raza de convergenţă a seriei considerate este* $r = \frac{1}{l_1}$.

3) Dacă există $\limsup\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = l_2$,*atunci raza căutată este* $\frac{1}{l_2}$.

Informaţiile referitoare la funcţia sumă a unei serii de puteri complexe le vom enunţa sintetic în următorul rezultat:

Teorema V.8: *Dacă* $r > 0$ *este raza de convergenţă pentru seria de puteri* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, *atunci funcţia* $f : D(0, r) \to \mathbb{C}$, $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *este olomorfă..*

Observaţia V.6: Seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ este absolut şi uniform convergentă pe compactele din $D(z_0, r)$, iar suma sa este olomorfă pe $D(z_0, r)$.

Definiţia V.10: O funcţie $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (unde mulţimea D este deschisă) se numeşte *analitică* pe D dacă:

Oricare ar fi $z_0 \in D$ există discul $D(z_0, r)$, $r > 0$ şi există $(a_n)_{n\in N} \subset \mathbb{C}$ astfel încât $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, pentru orice $z \in D(z_0, r)$.

Folosind teorema V.8' pe fiecare disc $D(z_0, r) \subset D$ obţinem:

Teorema V.10: *Orice funcţie analitică este o funcţie olomorfă.*

V.3. Serii Laurent

Vom studia în continuare un alt tip de serii de funcţii, specifice spaţiului $\mathbb{C}$, ce se vor dovedi ulterior deosebit de importante în clasificarea singularităţilor izolate ale funcţiilor.

Definiţia V.11: 1) Se numeşte *serie Laurent* o serie de forma:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n,\ z_0 \in \mathbb{C} \text{ fixat},\ a_n \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}, \tag{6}$$

unde prin sumarea de la $-\infty$ la $+\infty$ se înţelege

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

sau

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = \sum_{m=1}^{\infty} a_{-m}(z - z_0)^{-m} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n.$$

Prima dintre cele două serii în care se descompune seria Laurent se numeşte *partea principală*, iar a doua se numeşte *partea analitică* (sau *partea tayloriană*) a seriei Laurent.

2) O serie Laurent se numeşte *convergentă* dacă atât partea principală, cât şi partea sa tayloriană sunt convergente.

Pentru o serie Laurent ne vor interesa aceleaşi probleme ca în cazul seriilor de puteri: structura mulţimii de convergenţă, tipul de convergenţă a seriei şi proprietăţiile funcţiei sumă.

Teorema V.11: *Mulţimea de convergenţă pentru o serie Laurent* $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *este o coroană circulară centrată în* z_0:

$$D(z_0; r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z - z_0| < r_2\},\ 0 < r_1 < r_2.$$

Convergenţa este absolută şi uniformă pe compactele din $D(z_0; r_1, r_2)$*, iar suma seriei este olomorfă.*

V.4. Funcţii olomorfe pe mulţimi deschise

În continuare vom urmări să studiem problema reciprocă: în ce condiţii o funcţie complexă se poate dezvolta în serie Taylor sau Laurent?

Abordăm mai întâi cazul seriilor Taylor.

Dată o funcţie $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, unde D este un deschis, ne întrebăm ce proprietate a lui f asigură analiticitatea sa (adică posibilitatea de a se dezvolta în serie de puteri în jurul fiecărui punct $z_0 \in D$) :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n,\ \ \forall\, z \in D(z_0, r).$$

De asemenea, ne întrebăm ce relaţie există între coeficienţii a_n şi funcţia f , dar şi cum să găsim raza de convergenţă r fără (eventual) a face dezvoltarea lui f în serie de puteri. Răspunsul este dat de următoarea teoremă:

Teorema V.12 (**analiticitatea funcţiilor olomorfe**): *Dacă* $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *este olomorfă, iar* D *un deschis, atunci* f *este analitică, anume*

pentru orice $z_0 \in D$ *există* $r = d(z_0, Fr\, D)$ *astfel încât* $\forall\, z \in D(z_0, r)$ *are loc dezvoltarea:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n.$$

Observaţia V.7: Teoremele V.10 şi V.12 ne spun că, în cazul complex, funcţiile derivabile şi cele analitice coincid (în $\mathbb{R}$, funcţiile analitice nu sunt tot una cu funcţiile derivabile, nici măcar cu cele de clasă C^∞).

Exemplul V.3:. Să dezvoltăm în serie de puteri în jurul originii funcţiile elementere:

I. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = e^z$. Stabilim întâi mulţimea de convergenţă:

$z_0 = 0 \Rightarrow r = d(0, FrC) = +\infty.$

Apoi $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{n!} \quad (f^{(n)}(z) = e^z, \forall\, n \in N)$. Atunci

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot z^n, \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

II. $f : \mathbb{C} \setminus [-\infty, -1] \to \mathbb{C}, f(z) = \ln(1+z)$.

Raza de convergenţă este $r = d(0, [-\infty, -1]) = 1$, deci dezvoltarea va avea loc în $D(0,1)$.

Derivatele succesive ale logaritmului sunt

$f'(z) = \frac{1}{1+z}$, $f''(z) = -(1+z)^{-2}$, $f'''(z) = 1 \cdot 2 \cdot (1+z)^{-3}, \ldots.,$ $f^{(n)}(z) = (-1)^{n-1}(n-1)!\,(1+z)^{-n}, \ldots;$

de unde $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = -\frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{3}$, ... , $a_n = (-1)^{n-1}\frac{1}{n}, \ldots$.

Deducem că dezvoltarea în serie Taylor a lui f este

$$\ln(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \cdot z^n, \forall\, z \in D(0,1).$$

III. $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \sin z$, $g(z) = \cos z$.

Dezvoltarea are loc pentru ambele funcţii în tot planul complex.

Calculăm derivatele funcţiei f :

$f'(z) = \cos z$, $f''(z) = -\sin z$, $f'''(z) = -\cos z$, $f^{IV}(z) = \sin z$ şi apoi derivatele se repetă din patru în patru; urmează că

$a_{4k} = 0$, $a_{4k+1} = \frac{1}{(4k+1)!}$, $a_{4k+2} = 0$, $a_{4k+3} = -\frac{1}{(4k+3)!}$, $k \in \mathbb{Z}$ şi dezvoltarea în serie de puteri a funcţiei f este

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} \cdot z^{2n+1}, \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

În mod similar pentru g derivatele se repetă din patru în patru şi va avea loc dezvoltarea

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} \cdot z^{2n}, \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

V.5. Funcţii olomorfe într-o coroană circulară

Putem formula acum problema reciprocă pentru dezvoltări Laurent: dată o funcţie pe o coroană circulară $D(z_0; r_1, r_2)$,să găsim condiţii care să ne asigure dezvoltarea ei în serie Laurent după puterile (pozitive si negative) ale lui $(z - z_0)$.

Teorema V.13: *Dacă $f : D(z_0; r_1, r_2) \to \mathbb{C}$ este olomorfă, atunci f se poate dezvolta în serie Laurent după puterile lui $z - z_0$.*

Definiţia V.12: Se numeşte *disc punctat* coroana circulară $D(z_0; 0, r)$, cu $r > 0$.

Observaţia V.8: Seriile de puteri sunt în legătură cu discurile şi funcţiile olomorfe pe disc, iar seriile Laurent sunt asociate coroanelor circulare şi funcţiilor olomorfe în coroane circulare . Mai exact pentru D o mulţime deschisă şi

$z_0 \in D$, dacă $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ este olomorfă, atunci f se dezvoltă în serie de puteri în jurul lui z_0 pe un disc $D(z_0, r)$, iar dacă $f : D \setminus \{z_0\} \to C$ este olomorfă, atunci f este dezvoltabilă în serie Laurent în jurul lui z_0 pe discul punctat $D(z_0, r) \setminus \{z_0\} = D(z_0; 0, r)$.

Capitolul al VI-lea
Reziduuri

VI.1. Singularităţi izolate.

Definiţia VI.1: Se numeşte *punct singular izolat* pentru o funcţie f un punct z_0 dintr-o mulţime deschisă $D \subset \mathbb{C}$ astfel încât $f : D \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ este olomorfă.

Observaţia VI.1: Dacă z_0 este un punct izolat singular pentru f, rezultă că f admite dezvoltare Laurent pe discul punctat $0 < |z - z_0| < r$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n}.$$

În funcţie de felul cum se prezintă partea principală din această dezvoltare, putem avea următoarele tipuri de singularităţi izolate:

Definiţia VI.2:

1. z_0 este punct singular aparent dacă partea principală în dezvoltarea de mai sus lipseşte:

$$a_{-n} = 0, \forall n \geq -1.$$

2. z_0 este pol (de ordin n_0) dacă partea principală este o sumă finită:

$$\exists\ n_0 \geq 1 \text{ încât } a_{-n_0} \neq 0, \text{ iar } a_{-n} = 0, \forall\ n > n_0.$$

3. z_0 este singularitate esenţială dacă partea principală este o serie efectivă (mulţimea coeficienţilor nenuli din partea principală este infinită):

$$card\{n \in N^*; a_{-n} \neq 0\} = \chi_o.$$

Exemplul VI.1:

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z},\ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \text{ este funcţie olomorfă.}$$

Se observă că punctul z_0 sete singulsritate izolată pentru funcţia f.

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \Rightarrow f(z) = \frac{1}{z} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{(m+1)!},$$ care este serie de puteri efectivă,

de unde rezultă că $z_0 = 0$ este singularitate aparentă.

Exemplul VI.2:

$$f(z) = \frac{1}{z^n},\ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

este gata dezvoltată în serie Laurent în jurul punctului singular izolat $z_0 = 0$ cu partea tayloriană 0, iar partea principală $\frac{1}{z^n}$, de unde rezultă că $z_0 = 0$ este pol de ordin n.

Exemplul VI.3:
$$f(z) = \sin \frac{1}{z},\ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\},$$
având singularitatea izolată $z_0 = 0$.

Folosind dezvoltarea funcţiei $\sin w$ în serie de puteri, făcând $w = \frac{1}{z}$ avem:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{1}{z}\right)^{2n+1}$$ având partea principală chiar seria

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{z^{2n+1}},$$ de unde rezultă că $z_0 = 0$ este singularitate esenţială.

Pentru o funcţie $f : D \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ olomorfă urmărim în continuare să caracterizăm tipurile de singularităţi izolate cu ajutorul limitei funcţiei f în punctul z_0. Un prim rezultat, referitor la singularităţi aparente, este:

Teorema VI.1 (teorema de caracterizare a singularităţilor aparente): Fie $f : D \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ olomorfă, unde $D \subseteq \mathbb{C}$ este un deschis şi $z_0 \in D$. Atunci au loc echivalenţele:

1. z_0 este singularitate aparentă;
2. $\exists \lim\limits_{z \to z_0} f(z) \in \mathbb{C}$;
3. f este mărginită într-o vecinătate $V(z_0) \setminus \{z_0\}$;
4. (*caracterizarea lui Riemann*) $\exists \lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0) \cdot f(z) = 0$.

Definiţia VI.3: O funcţie g *are un zerou de ordin* n în z_0 dacă există o funcţie olomorfă g_1 având acelaşi domeniu de definiţie ca g încât $g_1(z_0) \neq 0$ şi $g(z) = (z - z_0)^n \cdot g_1(z)$ pe o vecinătate a lui z_0.

Teorema VI.2: Fie $f : D \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ olomorfă, unde $D \subseteq \mathbb{C}$ un deschis şi $z_0 \in D$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

1. z_0 este pol de ordin n pentru f;
2. Funcţia $(z - z_0)^n f(z)$ are în z_0 singularitate aparentă, cu $\lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0)^n f(z) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$
3. Funcţia $\frac{1}{f}$ are în z_0 un zerou de ordin n.

Teorema VI.3 (teorema de caracterizare a polilor): Fie $f : D \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ olomorfă, unde $D \subseteq \mathbb{C}$ este mulţime deschisă şi $z_0 \in D$.

f are în z_0 pol dacă şi numai dacă $\exists \lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$.

Exemplu VI.4: Fie $f(z) = \frac{\sin z}{z^3}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$; punctul $z_0 = 0$ este singularitate izolată pentru f. Pentru a stabili tipul singularităţii calculăm

$\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \lim\limits_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} \cdot \frac{1}{z^2} = \infty$, (deoarece $\frac{\sin z}{z} \to 1$ şi $\frac{1}{z^2} \to \infty$ atunci când $z \to z_0$), deci z_0 este pol.

Găsim ordinul polului: căutăm $n \in N^*$ astfel încât $\exists \lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

$$\lim_{z\to 0} z^n \cdot \frac{\sin z}{z^3} = \lim_{z\to 0} z^{n-2} \cdot \frac{\sin z}{z} = 1 \in \mathbb{C}\setminus\{0\} \text{ pentru } n = 2,$$

deci $z_0 = 0$ este pol de ordin 2.

Teorema VI.4 (teorema de caracterizare a singularităţilor esenţiale):

Fie $f : D\setminus\{z_0\} \to \mathbb{C}$ olomorfă, unde $D \subseteq \mathbb{C}$ este deschis şi $z_0 \in D$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

1. f are în z_0 singularitate esenţială;
2. Nu există $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ în $\mathbb{C}_\infty$;
3. Există două şiruri $(z_n), (w_n) \subset D\setminus\{z_0\}$, cu $z_n, w_n \to z_0$ încât $f(z_n) \to A$, $f(w_n) \to B$, iar $A \neq B$ $(A, B \in \mathbb{C}_\infty)$.

VI.2. Reziduuri

Definiţia IV.4: Fie $f : D\setminus\{z_0\} \to \mathbb{C}$ olomorfă, unde $D \subseteq \mathbb{C}$ este deschis şi $z_0 \in D$. Atunci f admite pe un disc punctat $0 < |z - z_0| < r$ o dezvoltare Laurent:

$$f(z) = ... + \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + ... + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + ...$$

Se numeşte *reziduul funcţiei f în z_0* coeficientul a_{-1} din această dezvoltare.

Vom nota $a_{-1} = rez(f, z_0)$.

Motivarea noţiunii: Să presupunem că avem o curbă simplă închisă $(\gamma) \subset D\setminus\{z_0\}$ încât $z_0 \in intD_\gamma$. Atunci

$$\int\limits_\gamma f(z)dz = ...+a_{-n}\int\limits_\gamma \frac{dz}{(z-z_0)^n} + ...+a_{-1}\int\limits_\gamma \frac{dz}{z-z_0} + \int\limits_\gamma [a_0 + a_1(z-z_0)...]\, dz.$$

Funcţia $a_0 + a_1(z-z_0) + ...$ fiind olomorfă pe $D(z_0, r) \supset \gamma$ va avea integrala 0 (conform teoremei fundamentale a lui Cauchy).

Pentru $n > 1$, funcţia

$$\frac{1}{(z-z_0)^n} = (z-z_0)^{-n} \text{ are pe } D\setminus\{z_0\} \text{ primitiva } \frac{(z-z_0)^{-n+1}}{-n+1} \text{ şi deci}$$

integrala sa pe curba închisă (γ) va fi 0.

Pentru $n = 1$ ştim că $\int\limits_\gamma \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i$ (exemplul din paragraful III.2).

Deci $\int\limits_\gamma f(z)dz = 2\pi i \cdot a_{-1}$, ceea ce justifică interesul nostru pentru coeficientul a_{-1} dintre toţi coeficienţii dezvoltării.

Metode de calcul a reziduurilor:

I. Dacă z_0 este singularitate aparentă pentru f, atunci (partea principală lipsind) avem:

$$rez(f, z_0) = 0.$$

II. a) Dacă z_0 este pol pentru f, să presupunem mai întâi că z_0 este pol de ordin 1:

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \dots\,, \text{ pe } 0 < |z - z_0| < r.$$

$$\Rightarrow (z - z_0)f(z) = a_{-1} + a_0(z - z_0) + \dots;$$

trecâd la limită pentru $z \to z_0$ în această egalitate va rezulta că

$$rez(f, z_0) = a_{-1} = \lim_{z \to z_0} (z - z_0)f(z).$$

Aplicaţie: Fie $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$, unde $g, h : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfe, $z_0 \in D$ încât $g(z_0) \neq 0$ şi $h(z_0) = 0, h'(z_0) \neq 0$; h va avea în z_0 un zerou de ordin 1 :

$$h(z) = (z - z_0)h_1(z) \ \ , \ h_1 \text{ olomorfă cu } h_1(z) \neq 0. \text{ Atunci}$$

$(z - z_0)f(z) = \dfrac{g(z)}{h_1(z)}$, funcţia $\dfrac{g}{h_1}$ fiind olomorfă pe un disc $D(z_0, r)$, $\dfrac{g}{h_1}(z_0) \neq 0$, adică f are în z_0 un pol de ordin 1.

$$rez(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0)f(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{z - z_0}{h(z)} \cdot g(z) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

b) Dacă f are în z_0 un pol de ordin $n > 1$, vom avea

$$(z - z_0)^n f(z) = a_{-n} + a_{-n+1}(z - z_0) + \dots + a_{-1}(z - z_0)^{n-1} + a_0(z - z_0)^n + \dots;$$

derivând relaţia succesiv de $(n - 1)$ ori găsim:

$$[(z - z_0)^n f(z)]^{(n-1)} = (n - 1)!a_{-1} + n!a_0(z - z_0) + \dots$$

$$\text{obţinem } rez(f, z_0) = a_{-1} = \frac{1}{(n - 1)!} \lim_{z \to z_0} [(z - z_0)^n f(z)]^{(n-1)}.$$

III. Dacă z_0 este singularitate esenţială pentru f, neavând o formula de calcul pentru reziduu, modalitatea de a-l găsi este să realizăm în jurul lui z_0 pentru f, pe un disc punctat, dezvoltarea Laurent.

VI.3. Teorema reziduurilor

Vom da în continuare rezultatul esenţial legat de calculul integralelor curbilinii pentru funcţii care au singularităţi izolate în interiorul domeniului determinat de curbă.

Teorema VI.5 (teorema reziduurilor): Fie $f : D \setminus \{z_1, ..., z_n\} \to \mathbb{C}$ olomorfă cu $D \subseteq \mathbb{C}$ mulţime deschisă şi $z_1, ..., z_n \in D$. Dacă $\gamma \subset D \setminus \{z_1, ..., z_n\}$ este o curbă simplă închisă omotopă cu un punct în D, atunci

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{z_k \in intD_\gamma} rez(f, z_k).$$

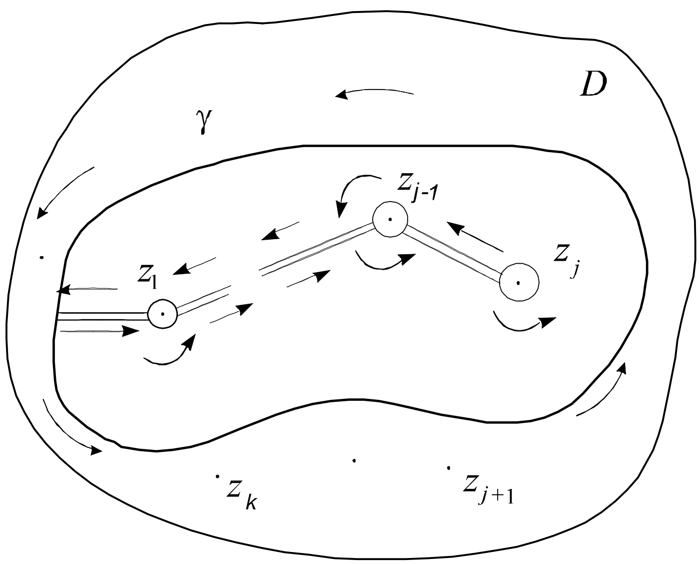

Figura VI.1

O extensie a acestei teoreme este asa numită teorema a semireziduurilor:

Teorema VI.6 (**teorema semireziduurilor**): Fie γ un contur simplu închis dintr-un domeniu D si $f : D\backslash(\{a_1, a_2, ..., a_m\} \cup \{z_1, z_2, ..., z_n\}) \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă, unde $a_1, a_2, ..., a_m \in intD_\gamma$ sunt singularităţi izolate şi $z_1, z_2, ..., z_n \in \gamma$ sunt poli de ordin 1.

i) Dacă γ adimte tangentă unică în $z_1, z_2, ..., z_n$, atunci

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{m} rez(f, a_j) + \pi i \sum_{k=1}^{n} rez(f, z_k).$$

ii) Dacă δ_k este unghiul dintre semitangente în z_k la γ, atunci

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{m} rez(f, a_j) + i \sum_{k=1}^{n} (\pi - \delta_k)\, rez(f, z_k).$$

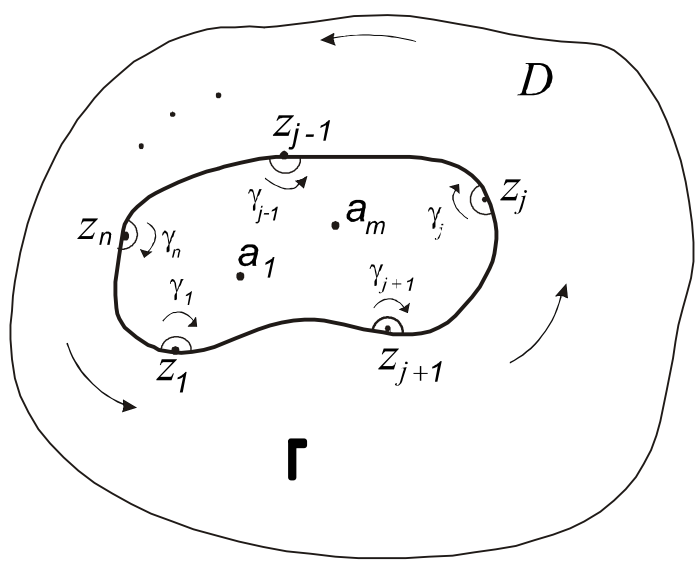

Figura VI.2

VI.4. Aplicaţii ale teoremei reziduurilor în calculul unor integrale reale

I. Ne propunem să calculăm integrala

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt,$$

unde R este o funcţie raţională al cărei numitor în $\cos t$ şi $\sin t$ se anulează.

Căutăm o curbă (γ) simplă închisă $\gamma(t) = x(t) + iy(t) \subset \mathbb{C}$ cu $t \in [0, 2\pi]$ şi o funcţie complexă f încât I să se poată exprima cu ajutorul integralei complexe $\int_\gamma f(z)dz$.

O alegere convenabilă este cercul unitate (la fel de bine poate fi luat orice alt cerc cu centrul în origine)

$\gamma: \quad |z| = 1 \Leftrightarrow z = \cos t + i \sin t,\ t \in [0, 2\pi]$.

Cum $\bar{z} = \cos t - i \sin t$ rezultă

$$\cos t = \frac{z + \bar{z}}{2},\ \sin t = \frac{z - \bar{z}}{2i};$$

Înlocuim $\bar{z} = \frac{|z|^2}{z} = \frac{1}{z}$ şi ţinem cont că $dz = (-\sin t + i\cos t)dt = izdt$, adică $dt = \frac{dz}{iz}$.

Funcţia complexă de integrat va fi

$$f(z) = R\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}, \frac{z-\frac{1}{z}}{2i}\right) \cdot \frac{1}{iz}.$$

Atunci, din teorema reziduurilor

$$I = 2\pi i \sum_{|z_k|<1} rez\left[R\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}, \frac{z-\frac{1}{z}}{2i}\right) \cdot \frac{1}{iz}, z_k\right].$$

II. Fie R o funcţie raţională şi vrem să calculăm $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{iax} \cdot R(x)dx$. Pentru a avea asigurată convergenţa la $+\infty$ şi $-\infty$, conform criteriului de convergenţă în α (vezi criteriile de convergenţă a integralelor generalizate din funcţii pozitive), pentru $R = \frac{P}{Q}$ va trebui să presupunem că:

În cazul $a = 0,\ 1 + gradP < gradQ$, adică $2 + gradP \le gradQ$;

În cazul $a > 0,\ 1 + gradP \le gradQ$.

Ne vom situa în prima ipoteză. În plus mai presupunem că $Q(x) \neq 0\ \forall\ x \in \mathbb{R}$. Asiguraţi de convergenţa integralei $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{iax} \cdot R(x)dx$ avem că $I = \lim\limits_{r\to\infty} \int\limits_{-r}^{r} e^{iax} \cdot R(x)dx$. Vom considera o curbă $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, unde γ_1 este segmentul $[-r, r]$ de pe axa reală; vom completa γ cu un semicerc γ_2 aşa ca în figura VI.3.

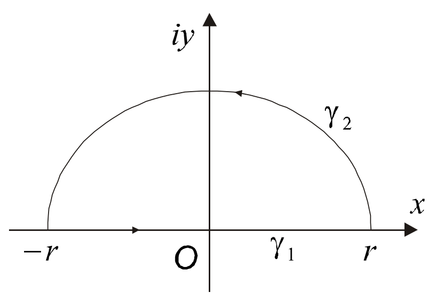

Figura VI.3

Funcţia pe care o alegem este $f(z) = e^{iax} \cdot R(z)$.

În toate exemplele, ideea generală este de a calcula, pentru o curbă γ şi o funcţie f convenabil alese, $\int\limits_{\gamma} f(z)dz$ prin două metode: prin teorema reziduurilor şi prin teorema III.2, alegând o parametrizare a curbei (γ).

Putem alege $r > 0$ suficient de mare încât D_γ să conţină toate singularităţile izolate ale lui f aflate în semiplanul superior.

Cum R este funcţie raţională, singularităţile lui f vor fi în număr finit (vor fi printre rădăcinile lui Q) şi vor fi poli (anulând numitorul, vor face ca limita funcţiei să fie ∞).

Deci
$$\int_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} rez(f, z_k).$$

Parametrizând curba (γ_1) avem $z = t + i \cdot 0$, $t \in [-r, r]$, de unde $dz = dt$ şi $\int\limits_{\gamma_1} f(z)dz = \int\limits_{-r}^{r} f(t)dt$.

Arătăm că $\lim\limits_{r\to\infty} \int\limits_{\gamma_2} f(z)dz = 0$:

$$\left|\int_{\gamma_2} f(z)dz\right| \leq l(\gamma_2) \cdot \sup_{z\in\gamma_2} |f(z)| \leq \pi r \cdot \sup_{z\in\gamma_2} \left|e^{iaz}\right| \cdot |R(z)|$$

$$\left|e^{iaz}\right| = \left|e^{iax-ay}\right| = e^{-ay} \leq 1 \text{ pentru } y = \operatorname{Im} z > 0.$$

Rezultă
$$\left|\int_{\gamma_2} f(z)dz\right| \leq \pi r \cdot \sup_{|z|=r} |R(z)| \leq \pi r \cdot \frac{M}{r^2} \overset{r\to\infty}{\to} 0.$$

Obţinem, prin trecere la limită pentru $r \to \infty$,

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\gamma} f(z)dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx, \text{ adică } I = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} rez(f, z_k).$$

III. Să calculăm integrala reală generalizată $I = \int\limits_{-\infty}^{0} R(x)dx$, unde R este o funcţie raţională $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ cu $Q(x) \neq 0$ pentru $x \leq 0$.

Pentru a avea asigurată convergenţa la $-\infty$, conform criteriului în α, vom cere ca $2 + gradP \leq gradQ$. Vom integra functia complexă $f(z) = R(z) \cdot \ln z$ pe curba din figura VI.4, ocolind partea de pe semiaxa reală negativă prin segmentele I_1 si I_2 paralele cu aceasta.

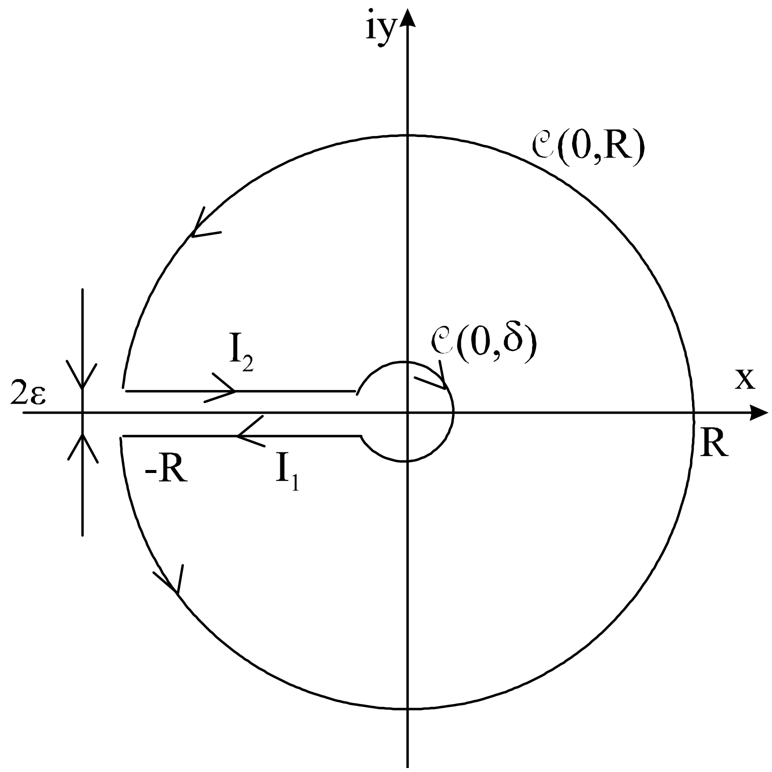

Figura VI.4

Avem

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{C(0,r)} f(z)dz + \int_{I_1} f(z)dz - \int_{C(0,\delta)} f(z)dz - \int_{I_2} f(z)dz. \qquad (1)$$

Parametrizăm segmentele I_1, I_2 :
$I_1 : z = x + i\varepsilon,\ x \in [-r, -\delta],\ dz = dx$
$I_2 : z = x - i\varepsilon,\ x \in [-r, -\delta],\ dz = dx$
Atunci

$$\int_{I_1} f(z)dz - \int_{I_2} f(z)dz = \int_{-r}^{-\delta} \left[R(x+i\varepsilon)\ln(x+i\varepsilon) - R(x-i\varepsilon)\ln(x-i\varepsilon)\right] dx$$

Pentru a calcula $\ln z$ pe cele două segmente observăm că argumentul său dinspre semiplanul superior este π, iar dinspre semiplanul inferior este $-\pi$.

Explicităm logaritmul complex pe I_1, I_2:

$$\ln(x+i\varepsilon) = \ln\sqrt{x^2+\varepsilon^2} + i\arg(x+i\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\to} \ln|x| + i\pi,$$

$$\ln(x-i\varepsilon) = \ln\sqrt{x^2+\varepsilon^2} + i\arg(x-i\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\to} \ln x - \pi i.$$

Atunci

$$\int_{I_1} f(z)dz - \int_{I_2} f(z)dz = 2\pi i \int_{-r}^{-\delta} R(x)dx \overset{r\to\infty}{\underset{\delta\to 0}{\to}} 2\pi i \cdot \int_{-\infty}^{0} R(x)dx. \qquad (2)$$

Integralele pe cele două cercuri tind la 0:

$$\left| \int_{C(0,r)} f(z)dz \right| \leq 2\pi r \cdot \sup_{|z|=r} |R(z)| \cdot |\ln z| \leq 2\pi r \cdot \sup_{|z|=r} |R(z)| \cdot |\ln|z| + i\arg z| \leq$$

$$\leq 2\pi r \cdot \frac{M}{r^2} \cdot (|\ln r| + \pi) \overset{r\to\infty}{\to} 0$$

$$\left| \int_{C(0,\delta)} f(z)dz \right| \leq 2\pi\delta \cdot \sup_{|z|=\delta} |R(z)| \cdot (|\ln|z|| + |\arg z|) \leq$$

$$\leq 2\pi\delta \cdot M \cdot (-\ln\delta + \pi) \overset{\delta\to 0}{\to} 0.$$

Pentru $r > 0$ suficient de mare şi $\varepsilon, \delta > 0$ mici toate rădăcinile numitorului (adică singularităţile lui f) să se găsească în $intD_\gamma$.

Aplicând teorema reziduurilor pe γ găsim

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{z_k \in intD_\gamma} rez(f, z_k). \qquad (3)$$

Combinând acest rezultatele din $(1), (2)$ si (3) deducem

$$\lim_{r\to\infty, \varepsilon\to 0, \delta\to 0} \int_\gamma f(z)dz \to 2\pi i I, \text{ de unde } I = \sum_{z_k \in \mathbb{C}} rez(f, z_k).$$

IV. Să calculăm integrala reală generalizată $I = \int\limits_0^\infty R(x)dx$, unde R este o funcţie raţională $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ cu $Q(x) \neq 0$ pentru $x \geq 0$.

Pentru a avea asigurată convergenţa la $+\infty$ vom presupune $2 + gradP \leq gradQ$.

Curba pe care o vom alege este cea din figura VI.5 , iar funcţia de integrat $f(z) = R(z) \cdot \ln z$,

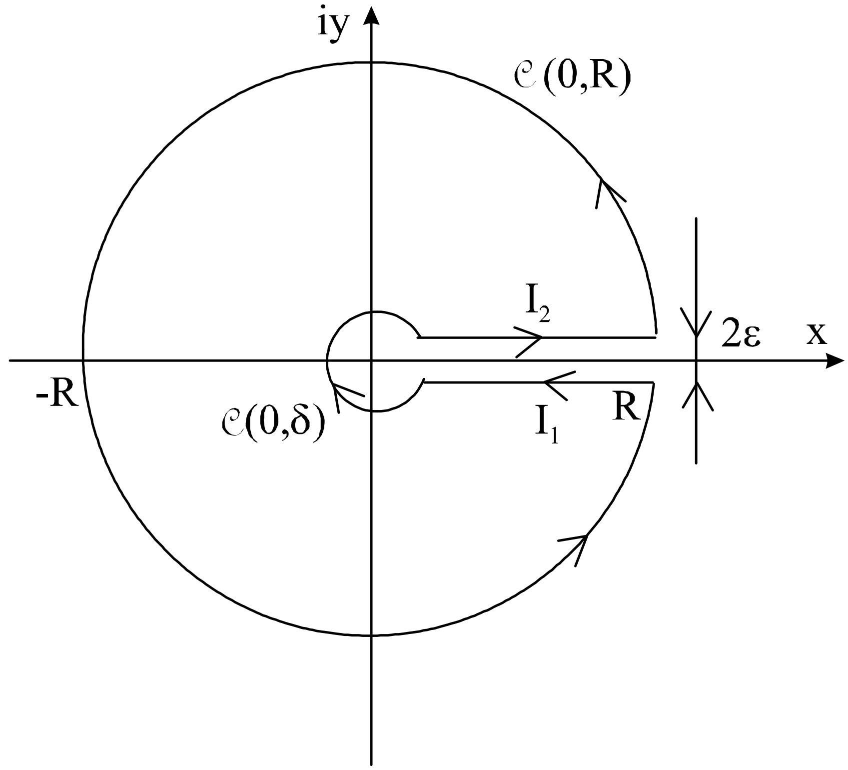

Figura VI.5

unde vom presupune pentru funcţia ln că argumentul ia valori în $(0, 2\pi]$ (deci $z \in \mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$, $\ln z = \ln |z| + i \arg z$).

Observăm că pe semiaxa pozitivă Ox, dinspre semiplanul superior argumentul este 0, iar dinspre semiplanul inferior argumentul este 2π.

Putem alege $r > 0$ suficient de mare şi $\varepsilon, \delta > 0$ suficient de mici încât toate rădăcinile lui Q (adică singularităţile lui f) să se găsească în $intD_\gamma$.

Atunci

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{z_k \in intD_\gamma} rez(f, z_k).$$

Pe de alta parte

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{C(0,r)} f(z)dz + \int_{I_1} f(z)dz - \int_{C(0,\delta)} f(z)dz - \int_{I_2} f(z)dz.$$

Parametrizăm I_1 si I_2 similar ca în cazul III anterior:
$I_1 : z = x + i\varepsilon,\ x \in [\delta, r],\ dz = dx$

$I_2 : z = x - i\varepsilon,\ x \in [\delta, r],\ dz = dx$ si găsim

$$\ln(x + i\varepsilon) = \ln\sqrt{x^2 + \varepsilon^2} + i\arg(x + i\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\to} \ln|x| + i0 = \ln x$$

$$\ln(x - i\varepsilon) = \ln\sqrt{x^2 + \varepsilon^2} + i\arg(x - i\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\to} \ln x + 2\pi i.$$

Atunci

$$\int_{I_1} f(z)dz - \int_{I_2} f(z)dz = -2\pi i \int_{\delta}^{r} R(x)dx \overset{r\to\infty}{\underset{\delta\to 0}{\to}} -2\pi i \cdot \int_0^{\infty} R(x)dx.$$

Analog ca în cazul III, $\left|\int\limits_{C(0,r)} f(z)dz\right| \leq 2\pi r \cdot \frac{M}{r^2} \cdot (|\ln r| + 2\pi) \overset{r\to\infty}{\to} 0$ şi $\left|\int\limits_{C(0,\delta)} f(z)dz\right| \leq 2\pi\delta \cdot M \cdot (-\ln\delta + 2\pi) \overset{\delta\to 0}{\to} 0$.

Atunci

$$\int_0^{\infty} R(x)dx = -\sum_{z_k \in int D_\gamma} rez(f, z_k).$$

V. Să presupunem acum că dorim să calculăm integrala reală $I = \int\limits_0^{\infty} R(x)\ln x dx$, unde R este o funcţie raţională $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ cu $Q(x) \neq 0$ pentru $x \geq 0$.

Pentru a avea asigurată convergenţa la $+\infty$ vom presupune din nou că $2 + gradP \leq gradQ$.

Curba pe care o vom alege este tot cea din figura VI.5 , iar funcţia de integrat $f(z) = R(z) \cdot \ln^2 z$.

Facem aceeaşi convenţie ca la cazul IV şi anume că funcţia argument ia valori în $(0, 2\pi]$ (deci $\ln z = \ln|z| + i\arg z,\ z \in \mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$).

Avem

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{C(0,r)} f(z)dz + \int_{I_1} f(z)dz - \int_{C(0,\delta)} f(z)dz - \int_{I_2} f(z)dz.$$

Utilizând calculul făcut în exemplul precedent avem că $\left|\int\limits_{C(0,r)} f(z)dz\right| \overset{r\to\infty}{\to} 0$ şi $\left|\int\limits_{C(0,\delta)} f(z)dz\right| \overset{\delta\to 0}{\to} 0$.

Dar

$$\ln^2(x + i\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\to} (\ln x + i0)^2 = \ln^2 x,$$

$$\ln^2(x - i\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\to} (\ln x + 2\pi i)^2,$$

de unde

$$\int\limits_{I_1} f(z)dz - \int\limits_{I_2} f(z)dz = -2\pi i \int\limits_{\delta}^{r} R(x)\ln x dx + 4\pi^2 \int\limits_{\delta}^{r} R(x)dx \overset{r\to\infty}{\underset{\delta\to 0}{\to}}$$

$$\overset{r\to\infty}{\underset{\delta\to 0}{\to}} -2\pi i \int\limits_{\delta}^{\infty} R(x)\ln x dx + 4\pi^2 \cdot \int\limits_{0}^{\infty} R(x)dx.$$

Aceasta âmpreună cu teorema reziduurilor

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{z_k \in int D_\gamma} rez(f, z_k).$$

ne conduce la relaţia

$$\sum_{z_k \in int D_\gamma} rez(f, z_k) = -\int\limits_{\delta}^{\infty} R(x)\ln x dx - 2\pi i \cdot \int\limits_{0}^{\infty} R(x)dx.$$

Identificând părţile reale din cele doi membri găsim

$$\int\limits_{\delta}^{\infty} R(x)\ln x dx = -\operatorname{Re}[\sum_{z_k \in int D_\gamma} rez(f, z_k)].$$