Probleme propuse pentru seminarul de analiză complexă

Capitolul I
Structura algebrică şi topologică a mulţimii numerelor complexe

Problema I.1: Determinaţi mulţimea tuturor punctelor din plan al căror afix verifică relaţia: $z + (1/z) \in \mathbb{R}$, cu $z \neq 0$.

Problema I.2: Să se găsească afixul punctului de intersecţie dintre bisectoarea unghiului $M_2M_1M_3$ cu latura $|M_2M_3|$ a triunghiulu $M_1M_2M_3$.

Problema I.3: Fie $z_1, z_2, ..., z_n$ numere complexe nenule de acelaşi modul. Arătaţi că expresia

$$E = \frac{(z_1 + z_2)(z_2 + z_3)....(z_{n-1} + z_n)(z_n + z_1)}{z_1 z_2 ... z_n}$$

este număr real.

Problema I.4: Dacă z_1, z_2, z_3 sunt numere comlpexe nenule distincte două câte două, de acelaşi modul, astfel încât $z_1 + z_2 z_3 \in \mathbb{R}$, $z_2 + z_3 z_1 \in \mathbb{R}$, $z_3 + z_1 z_2 \in \mathbb{R}$, atunci $z_1 z_2 z_3 \in \mathbb{R}$.

Problema I.5: Să se găsească rădăcinile polinomului $P(z) = z^3 - (5 - i)z^2 + (5 - 4i)z - 1 + i$ ştiind că una dintre ele este $z_1 = 1 - i$.

Problema I.6: Fie $z \in \mathbb{C}$ de modul unitate, $z \neq \pm 1$. Să se calculeze expresia $\arg \frac{z-1}{z+1}$.

Problema I.7: Fie polinomul $P \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}]$ de grad n şi un poligon regulat cu m laturi, $m > n$. Să se arate că media aritmetică a valorilor polinomului în vârfurile poligonului regulat este egală cu valoarea polinomului în centru.

Problema I.8: Fie ecuaţia $az^2 + bz + c = 0$, unde $a, b, c \in \mathbb{C}$ cu $\arg a + \arg c = 2 \arg b$ şi $|a| + |c| = |b|$. Să se arate că ecuaţia dată are cel puţin o rădăcină de modul unitar.

Problema I.9: Să se calculeze:

$$S = \cos^2 t + \cos^2 t \cos 2t + \cos^3 t \cos 3t + ... \cos^n t \cos nt.$$

Problema I.10: Să se studieze convergenţa şirului $z_n = \frac{a^n}{n}$, în funcţie de parametrul complex a.

Problema I.11: Dacă $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$, unde $z = x + iy$, să se arate că $\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \to e^z$.

Problema I.12: Dacă şirul de numere complexe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este divergent la ∞, ce se poate spune despre şirul complex $(e^{z_n})_{n\in\mathbb{N}}$?

Problema I.13: 1. Fie $S = 1 + \cos t + \cos 2t + ... + \cos nt$, $t \in \mathbb{R}$. Să se arate că

$$S = \begin{cases} \frac{\sin[(n+1)t/2]\cdot\cos(nt/2)}{\sin(t/2)}, \text{ pentru } t \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ n+1, \text{ pentru } t = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

2. Dacă notăm $e^{it} = \cos t + i \sin t$, să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(1 + e^{it} + e^{2it} + ... + e^{nit}\right),$$

unde $t \in (0, 2\pi)$.

Problema I.14: Să se arate că dacă $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir mărginit din $\mathbb{C}$ atunci conţine un subşir convergent (lema lui Cèsaro în cazul compex).

Problema I.15: Dacă şirul (z_n) este convergent la a , să se arate că şirul de termen general $(z_1 + z_2 + ...z_n)/n$ este convergent de asemenea la a.

Problema I.16: Dacă (z_n) şi (w_n) sunt două şiruri de numere complexe convergente la a, respectiv b, atunci şirul

$$\frac{z_1 w_n + z_2 w_{n-1} + ...z_n w_1}{n} \to ab.$$

Problema I.17: Fie 3 puncte necoliniare din plan de afixe $a, b, c \in \mathbb{C}$ şi un şir $(z_n) \subset \mathbb{C}$ astfel încât $|z_n - a| \to r_1$, $|z_n - b| \to r_2$, $|z_n - c| \to r_3$ sunt şiruri convergente. Să se arate că şirul (z_n) este convergent.

Problema I.18: Să se arate că proiecţia stereografică duce cercurile de pe $S_3(0,1)$ care nu trec prin punctul N în cercuri din $\mathbb{C}$ şi reciproc, iar cercurile de pe $S_3(0,1)$ care trec prin N sunt duce în drepte din planul complex.

Problema I.19: Să se arate că discurile deschise $D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < r\}$ sunt mulţimi deschise, iar discurile închise $T(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| \leq r\}$ sunt mulţimi închise, unde $z_0 \in \mathbb{C}$ şi $r > 0$.

Capitolul al II-lea

Funcţii complexe de o variabilă complexă

Problema II.1: Să se arate că funcţia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(x+iy) = \sqrt{|xy|}$ îndeplineşte condiţiile Cauchy-Riemann în $(0,0)$, dar nu este derivabilă în origine (acesta este un exemplu care ne pune în evidenţă că ,în teorema lui Riemann de caracterizare a derivabilităţii, ipoteza de diferenţiabilitate pentru u şi v nu poate fi omisă).

Problema II.2: Să se determine punctele din planul complex în care funcţia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^2 + z\overline{z} - \overline{z}^2 + 2z - \overline{z}$ este derivabilă.

Problema II.3: Să se edetermine constantele reale $a, b,\ c, d$ astfel încât funcţia

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(x+iy) = x^2 + axy + by^2 + i(cx^2 + dxy + y^2)$$

să fie olomorfă în $\mathbb{C}$. Să se scrie funcţia $f(z)$ corespunzătoare.

Problema II.4: Să se găsească o funcţie olomorfă $f = u + iv$ pe un deschis conex $D \subset \mathbb{C}$ pe care are loc egalitatea $Au + Bv + C = 0$, unde A, B, C sunt constante complexe cu $A^2 + B^2 \neq 0$.

Problema II.5: Să se scrie condiţiile Cauchy-Riemann în coordonate polare.

Problema II.6: Să se determine o funcţie olomorfă în planul comlex a cărei parte reală este $u(x,y) = xy$.

Problema II.7: Să se determine o funcţie olomorfă $f = u+iv$ în semiplanul $D = \{z \in \mathbb{C};\ \operatorname{Re} z > 0\}$ ştiind că partea sa reală este de forma

$$u(x,y) = \phi\left(\frac{x^2+y^2}{x}\right),\ \text{unde } \phi \in C^2(\mathbb{R}).$$

Problema II.8: Să se găsească o funcţie olomorfă $f = u+iv$ pe un domeniu convenabil pentru care $\ln|f(z)|$ este o funcţie de $\frac{x^2+y^2}{x}$. Să se determine complet funcţia f ştiind că $\lim_{\operatorname{Re} z \to \infty} f(z) = 1,\ f(1) = e$.

Problema II.9: Să se găsească o funcţie olomorfă pe $\mathbb{C}$ de forma $f = u+iv$, unde partea sa reală este de forma $u(x,y) = \phi(x^2-y^2)\psi(xy)$, unde ϕ, ψ sunt funcţii de clasă $C^2(\mathbb{R})$ ce îndeplinesc următoarele condiţii: $\begin{cases} \phi(0) = \psi(0) = 1, \\ u(1,0) = e, \\ u(0,1) = 1/e. \end{cases}$

Problema II.10: Are loc formula $\ln e^z = z$?

Problema II.11: Să se rezolve ecuaţia $\sin z = 2$.

Problema II.12: Să se demonstreze că pe mulţimea $\mathbb{C}$ a numerelor complexe se menţin urmatoarele limite fundamentale cunoscute în $\mathbb{R}$:

$$\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}=1,$$

$$\lim_{z\to 0}\frac{tg\ z}{z}=1,$$

$$\lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z}=1.$$

Problema II.13: Să se arate că funcţia $u:\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$, $u(x,y)=\ln(x^2+y^2)$ este armonică, dar nu este partea reală a nici unei funcţii olomorfe $f:\mathbb{C}\backslash\{0\}\to\mathbb{C}$.

Problema II.14: Să se calculeze

a) $\cos(2+i)$;

b) i^i ;

c) $\ln(1+i)$ pe ramura funcţiei $f(z)=\ln z$ care satisface condiţia $f(-3)=\ln 3+7\pi i$.

Problema II.15: Calculaţi $\sqrt[5]{-2-2i}$ luând pentru funcţia $f(z)=\sqrt[5]{z}$ ramura care satisface $f(-1)=-1$.

Problema II.16: Fie $D=\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$. Să se afle câte determinări olomorfe distincte ϕ, care satisfac condiţia indicată, admit în D funcţiile din enunţ:

a) $f(z)=(z-1)\ln z$, $\phi(1)=0$;
b) $f(z)=z^z$, $\phi(1)=1$;
c) $f(z)=z^{iz}$, $\phi(1)=1$;
d) $f(z)=z^{z/2}$, $\phi(1)=1$;
e) $f(z)=z^{iz/4}$, $\phi(1)=1$;
f) $f(z)=z^z$, $\phi'(1)=1$.

Problema II.17: Să se arate că funcţia $f(z)=(z-1)^{2n+3}\exp\left(a\frac{z+1}{z-1}\right)$, $a>0$, este mărginită în discul unitate $D(0,1)$ împreună cu primele $n+1$ derivate; ce se poate spune despre $f^{(n+2)}$?

Problema II.18: Să se găsească domeniul maxim de definiţie al funcţiei $f(z)=\ln(\sin z)$.

Capitolul al III-lea

Integrale curbilinii în $\mathbb{R}^n$

Problema III.1: Să se calculeze

$$\int_\gamma \frac{(x+z-a)^2\cos yz + y^2\cos xz + z^2\sin xy}{(x-a)^2-z^2}ds,$$

unde (γ) este porţiunea de curbă determinată de intersecţia torului T de ecuaţii parametrice

$$\begin{cases} x=(a+b\cos u)\cos v \\ y=(a+b\cos u)\sin v \quad ,u,v\in[0,2\pi], \\ z=b\sin u \end{cases}$$

şi planul xOz,cuprinsă între punctele $A(a+b,0,0)$ şi $B(a+\frac{\sqrt{3}b}{2},0,\frac{b}{2})$, unde $a,b>0$.

Problema III.2: Fie curba dată implicit de ecuaţia $x^3+y^3-\frac{3xy}{2}=0$(foliul lui Déscartes) şi fie (γ) porţiunea din curbă cuprinsă între punctul $A(\frac{3}{4},\frac{3}{4})$ şi punctul B de maxim al foliului.

Să se calculeze:

$$\int_\gamma \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{y--2x^2}{2y^2-x}\right)^2}}\cdot\frac{[\frac{y-2x^2}{2y^2-x}\left(-2y^2+8x^2y-x\right)+\left(2x^2-8xy^2+y\right)]}{\left(2y^2-x\right)^2}ds.$$

Problema III.3: Să se calculeze $I=\int\limits_\gamma(x^2+y^2+z^2)ds$, unde (γ) este arcul de curbă obţinut dinintersecţia hiperboloidului cu o pânză de rotaţie $x^2+y^2-z^2=1$ cu planul $x+y+z=0$, cuprins între punctele $A(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{-\sqrt{2}}{2},0)$ şi $B(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3})$.

Problema III.4: Utilizând definiţia integralei curbilinii de speţa I, să se studieze convergenţa urmatoarelor şiruri şi să se calculeze limita lor:

$$S_n=\sum_{k=2}^n\cos\frac{\pi}{4k}\sqrt{\frac{\pi^2}{16k^2(k-1)^2}+\ln^2\frac{\cos\frac{\pi}{4k}}{\cos\frac{\pi}{4(k-1)}}}$$

$$T_n=\sum_{k=2}^n\cos\frac{\pi}{4(n-k+1)}\sqrt{\frac{\pi^2}{16(n-k+1)^2(n-k+2)^2}+\ln^2\frac{\cos\frac{\pi}{4(n-k+1)}}{\cos\frac{\pi}{4(n-k+2)}}}.$$

Problema III.5: Utilizând definiţia integralei curbilinii de speţa I pentru o funcţie $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbf{R}$ integrabila pe prima bisectoare, să se arate că există

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left| f\left(\frac{k-1}{n}, \frac{k-1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}, \frac{k}{n}\right) \right|^{a}, \text{ unde } a \in \mathbf{R},\ a \geq 1.$$

Problema III.6: 1. Fie curba $\gamma : \begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = 2arctg\ t - t + 1 \end{cases}$, $t \in [0,1]$. Să se calculeze $\int\limits_{\gamma} y \cdot e^{-x} ds$.

2. Fie $f : [0, \ln 2] \times \left[1, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbf{R}$ o funcţie integrabilă pe curba γ cu proprietatea că pe orice compact $[x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ există punctul (ξ, η) încât $f(\xi, \eta) = \eta \cdot e^{-\xi}$. Să se calculeze $\int\limits_{\gamma} f(x,y) ds$.

Problema III.7: Fie (γ) porţiunea din curba

$$\begin{cases} x^3 + y^3 + z^3 - 3x^2 - 6y^2 + 3z^2 + 3x + 12y + 3z - 8 = 0 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

cuprinsă între punctele $(1, 2, -1)$ şi $(2, 1, -1)$. Să se calculeze

$$I = \int\limits_{\gamma} (x-1)^3 ds.$$

Problema III.8: Se consideră curba $\gamma : \begin{cases} x^2 - 4y = 0 \\ 2a \cdot e^z - x = 0 \end{cases}$, unde $a > 0$, cuprinsă între punctele

$A(2a, a^2, 0)$ şi $B(2ae, a^2e^2, 1)$. Să se calculeze

$$I = \int\limits_{\gamma} \frac{[1 + (\frac{x}{2a})^{1/4}]^{1/3}}{1 + 2y} ds.$$

Problema III.9: Fie $f_0,\ f_1 : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ funcţii continue şi fie şirul definit prin

$$f_n(x,y) = \int\limits_{\gamma} f_{n-1}(u,v)du - f_{n-2}(u,v)dv\ ,\ n \geq 2,$$

unde (γ) este segmentul de dreaptă ce uneşte $(0,0)$ cu (x,y). Dacă $|f_0| \leq 1,\ |f_1| \leq 1,\ \forall\ (x,y) \in \mathbf{R}^2$, să se arate ca şirul dat de

$$g_n(x,y) = y^{n-2} f_2(x,y) + xy^{n-3} f_3(x,y) + ... + x^{n-3} y f_{n-1}(x,y) + x^{n-2} f_n(x,y),\ n \geq 2,$$

este convergent la 0 pentru $\forall\ (x,y) \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Problema III.10: Fie

$$I = \int_{\gamma} \frac{x \ln(x^2+y^2) + y\, arctg\, \frac{y}{x}}{x^2+y^2} dx + \frac{y \ln(x^2+y^2) - x\, arctg\, \frac{y}{x}}{x^2+y^2} dy,$$

unde $(0,0) \in \gamma$.

Dacă (γ) este un contur simplu închis rectificabil, care nu conţine în interior perechea $(0,0)$, să se arate că $I = 0$.

Dacă perechea $(0,0)$ nu se află în interiorul domeniului determinat de (γ) să se arate ca proprietatea de sus nu mai este adevarată.

Problema III.11: Se consideră (γ) porţiunea din curba $\begin{cases} x^3 = a^2 y \\ 6xz = a^2 \end{cases}$ cuprinsă între punctele $A(a, a, \frac{a}{6})$ şi $B(a^2, a^4, \frac{1}{6})$, unde $a > 0$.

Să se calculeze $I = \int\limits_{\gamma} x ds$.

Problema III.12: 1. Să se arate că

$$\int_{\gamma} \sin(x^2 - y^2) ch\, 2xy\, dx - \cos(x^2 - y^2) sh\, 2xy\, dy = 0$$

pe orice drum închis rectificabil (γ).

2. Să se deducă faptul că

$$\lim_{b \to 0} \frac{1}{b} \int_0^a x \cos(x^2 - b^2) sh\, 2bx\, dx = \int_0^a 2x^2 \cos x^2 dx$$

şi că

$$\int_0^a (\sin x^2 + 2x^2 \cos x^2) dx = a \sin a^2.$$

Problema III.13: Să se calculeze $I = \int\limits_{\gamma} (y^2 + xy + 1) dx + (x^2 + xy - 1) dy$ pe curba $y = y(x)$ dată implicit prin ecuaţia $\ln(x+y) = xy$, $x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

Problema III.14: Fie curba (γ) dată prin ecuaţia $y(x) = (x-1)^{3/2}$, $x \in [1,2]$. Să se calculeze

$$I = \int_{\gamma} \frac{y}{x^2 - 1} dx + \frac{8}{3(1+x^2)} dy.$$

Problema III.15: Să se calculeze

$$I = \int_{\gamma} \{\cos^2[\sin(x^2+y^2)] - x^2 \cos(x^2+y^2) \sin[2\sin(x^2+y^2)]\} dx -$$

$$-xy\cos(x^2+y^2)\sin[2\sin(x^2+y^2)]dy,$$

unde (γ) este curba $x+y+1=0,\ x\geq 0,\ \ y\geq 0.$

Problema III.16: Fie curba $(\gamma): y(x)=\ln\sin x,\ \ x\in\left[\alpha,\frac{\pi}{2}\right]$ cu $\alpha>0$. Să se calculeze

$$\lim_{\alpha\to 0}\int\limits_{\gamma}\sin(2n+1)x ds,\ \ n\in\mathbf{N}.$$

Capitolul al IV-lea

Integrala funcţiilor complexe

Problema IV.1: Să se calculeze $\int\limits_\gamma \overline{z} dz$, unde γ este segmentul $[-i, i]$;

Problema IV.2: Calculaţi $\int\limits_\gamma \ln z dz$, unde $\gamma(t) = e^{i\frac{\pi}{2}(2t-1)}$, $t \in [0,1]$.

Problema IV.3: Fie γ cercul de centru origine şi rază r. Să se calculeze $\int\limits_\gamma \frac{dz}{z^2-1}$.

Problema IV.4: Să se calculeze integrala

$$I = \int\limits_{|z-i|=1} \frac{\cos z}{(z-i)^3} dz.$$

.

Problema IV.5: Fie γ o curbă având un capăt în originea O şi celălalt în punctul A de afix $z = 1$. Dacă γ nu trece prin punctele $z = i$ şi $z = -i$ şi intersectează cel mult o dată semidreptele imaginare cu originea în O, să se arate că

$$\int\limits_\gamma \frac{dz}{1+z^2} = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \{-1, 0, 1\}.$$

Problema IV.6: Să se calculeze

$$I = \int\limits_{|z|=2} z^2 \ln \frac{z+1}{z-1} dz.$$

Problema IV.7: Fie (γ) cercul de centru 1 şi rază 1. Să se calculeze

$$\int\limits_\gamma \frac{dz}{z^4+1}.$$

Problema IV.8: Să se calculeze

$$I = \int\limits_{|z|=2} \frac{dz}{z^n (1-z)^m},\ \text{unde } n, m \in \mathbb{Z}.$$

Problema IV.9 (**formulă de medie**): Fie f o funcţie olomorfă în discul $|z-a|<r$, continuă în $|z-a|\leq r$, cu $a\in\mathbb{C}$ fixat. Să se demonstreze formula

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(a+re^{it}\right)dt=f\left(a\right). \tag{1}$$

Problema IV.10 (**generalizarea formulei integrale a lui Cauchy pe discuri**): Fie $f:\overline{D\left(0,r\right)}\to\mathbb{C}$ o funcţie continuă, olomorfă pe $D\left(0,r\right)$. Atunci

$$f\left(z\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=r}\frac{f\left(w\right)}{w-z}dw$$

pentru orice $z\in D\left(0,r\right)$.

Problema IV.11: Fie $\Delta=\{z\in\mathbb{C};\ |z|<1\}$ şi $f,\ g:\overline{\Delta}\to\mathbb{C}$ două funcţii continue, olomorfe pe Δ. Să se arete că

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1}\left[\frac{f\left(w\right)}{w-z}+z\frac{g\left(w\right)}{zw-1}\right]dw=\begin{cases} f\left(z\right), & \text{dacă } |z|<1\\ g\left(\frac{1}{z}\right), & \text{dacă } |z|>1\end{cases}.$$

Problema IV.12 (**formula lui Poisson**): Fie D o mulţime deschisă şi $R>0$ astfel încât $\overline{D\left(0,R\right)}\subset D$. Dacă $0<r<R$ şi $\theta\in[0.2\pi]$ atunci

$$f\left(r\cdot e^{i\theta}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f\left(R\cdot e^{it}\right)\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cdot\cos\left(t-\theta\right)+r^2}dt.$$

Problema IV.13: Integrând funcţia complexă $f\left(z\right)=\frac{1}{z}$ pe elipsa γ de semiaxe a şi b să se deducă valoarea integralei reale

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{dt}{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}.$$

Problema IV.14: Calculând integrala funcţiei complexe $f(z)=\ln\left(\sin z\right)$ pe un drum γ adecvat , să se deducă valoarea integralei reale $I=\int\limits_0^{\pi}\ln(\sin x)dx$.

Problema IV.15: Cunoscând valoarea integralei lui Gauss $G=\int\limits_0^{\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ să se găsească valoarea integralei lui Poisson:

$$I=\int_0^{\infty}e^{-ax^2}\cos bxdx,\ a>0,b\in\mathbb{R}.$$

Problema IV.16: Dacă $D \subset \mathbb{C}$ este o mulţime simplu conexă şi $u : D \to \mathbb{R}$ este o funcţie armonică, atunci există o funcţie $f : D \to \mathbb{C}$ olomorfă cu $f = u+iv$.

Capitolul al V-lea

Serii Taylor şi serii Laurent

Problema V.1: Să se găsească mulţimea de convergenţă pentru seria de funcţii

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+i)^{2n+1}}{n^2}.$$

Problema V.2: Să se găsească mulţimea de convergenţă pentru seriile de puteri complexe

$$a) \sum_{n=0}^{\infty} (\cos in)\, z^n;\ b) \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda^n)\, z^n\, , \lambda \in \mathbb{C}\ ;\quad c) \sum_{n=0}^{\infty} (1-i^n)\, z^n.$$

Problema V.3: Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şi de numere complexe astfel încât $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$. Să se arate că oricare ar fi $\delta > 0$ cu $\delta < \ln 2$ seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} \cos nz$ este uniform convergentă pe mul.

Problema V.4: Să se stabilească mulţimea de convergenţă şi suma seriilor

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{z+1}\right)^n$; b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{z-1}\right)^n$.

Problema V.5: Dacă seriile de puteri $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ şi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ au eceeaşi rază de convergenţă r şi aceeaşi sumă f pe intervalul $(-r,r)$ atunci $a_n = b_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Problema V.6: Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie de clasă $C^\infty(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$ şi derivatele de ordin k ale lui f sunt mărginite pe $\mathbb{R}$: există $M > 0$ astfel încât $\left|f^{(k)}(x)\right| \leq M$, pricare ar fi $k \in \mathbb{N}$ şi $x \in \mathbb{R}$. Atunci $f(x) = 0$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

Problema V.7: să se dezvolte în serie de puteri în jurul originii funcţia

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - z + 1}.$$

Problema V.8 Ştiind că şirul lui Fibonacci este dat de relaţia de recurenţă

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n\ ,\ a_0 = a_1 = 1\ ,$$

se cere legătura dintre termenii acestui şir şi coeficienţii dezvoltării Taylor în origine pentru funcţia

$$f(z) = \frac{1}{1 - z - z^2}.$$

Problema V.9: a) Să se arate că pentru $|z| < \frac{1}{2}$ are loc dezvoltarea

$$\frac{1}{\sqrt{1-2z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} z^n.$$

b) Să se deducă identitatea

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_{2n}^{n} (1/6)^n = \sqrt{3}.$$

Problema V.10: Să se dezvolte în serie de puteri in jurul originii funcţia

$$f(z) = e^z \cos z.$$

Capitolul al VI-lea

Reziduuri

Problema VI.1: Să se stabilească tipul de singularităţi ale funcţiilor de mai jos în punctele indicate:

i) $\frac{z}{tgz}$ $(z_0 = 0)$; ii) $\frac{1-\cos z}{z^2}$ $(z_0 = 0)$; iii) $\frac{1}{\cos^2 z} - \frac{1}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}$ $(z_0 = \frac{\pi}{2})$; iv) $\frac{z}{(e^z-1)^2}$ $(z_0 = 2k\pi i,\ k \in \mathbb{Z})$; v) $\frac{1}{z^2}e^{\frac{1}{z+1}}$ $(z_0 = 0$ şi $z_1 = -1)$; vi) $z\left(e^{\frac{1}{z}} - 1\right)$ $(z_0 = 0)$; vii) $z^2 \cos\frac{\pi}{z}$ $(z_0 = 0)$; viii) $\frac{1}{z^2-1}\cos\frac{\pi z}{z+1}$ $(z_1 = 1$ şi $z_2 = -1)$.

Problema VI.2: Să se calculeze următoarele reziduuri:

i) $rez\left(\frac{\sin z}{z^2}, 0\right)$; ii) $rez\left(\frac{e^z}{(z-1)^2}, 0\right)$; iii) $rez\left(\frac{e^{z^2}}{z^{2n+1}}, 0\right)$; iv) $rez\left(\frac{z^2\sin(1/z)}{(z-1)(z-2)}, \alpha\right)$, $\alpha = 0, 1, 2$; v) $rez\left(ctg^2\pi z, 0\right)$; vi) $rez\left(\frac{z}{chz-1-(z/2)^2}, 0\right)$, unde prin cosinus hiperbolic ch se înţelege $chz = \frac{e^z+e^{-z}}{2}$.

Problema VI.3: i) Fie funcţiile olomorfe $g, h : D \to \mathbb{C}$, iar $z_0 \in D$ un punct astfel încât $g(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = h'(z_0) = 0$, $h''(z_0) \neq 0$. Atunci pentru o vecinătate convenabilă a punctului z_0, notată V, funcţia $f : V\backslash\{z_0\} \to \mathbb{C}$, $f = \frac{g}{h}$ este bine definită şi are în z_0 un pol de ordin 2 cu reziduul

$$rez\,(f, z_0) = \frac{2g'(z_0)}{h''(z_0)} - \frac{g(z_0)\,h'''(z_0)}{(h''(z_0))^2}.$$

ii) Să se calculeze integrala

$$I = \int\limits_{|z|=7} \frac{1+z}{1-\cos z}dz.$$

Problema VI.4: Să se calculeze

$$I = \int\limits_{|z|=2} \frac{1}{z}\sin\frac{1}{(z-1)^2}dz.$$

Problema VI.5: Folosind teorema reziduurilor să se determine valoarea integralei reale

$$I = \int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{(2+\cos t)^2}.$$

Problema VI.6: Să se calculeze integrala reală generalizată

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(a+bx^2)^n},$$

unde $a, b > 0$.

Problema VI.7: Să se calculeze

$$I = \int_{0}^{+\infty} \frac{\ln x}{(x+a)^2+b^2} dx.$$

Problema VI.8: Să se calculeze

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{(e^x+1)(e^x+2)} dx, \; 0 < a < 1.$$

Problema VI.9: Să se calculeze

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot tg \frac{x}{2} dx.$$

Problema VI.10: Să se calculeze

$$I = \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^3}.$$

Problema VI.11: Să se calculeze

$$I = \int_{\gamma} \frac{dz}{(z+1)^2 (z+2)(z^2+1)},$$

unde γ este triunghiul cu vârfurile în punctele -2, $2i$ şi $2i$.

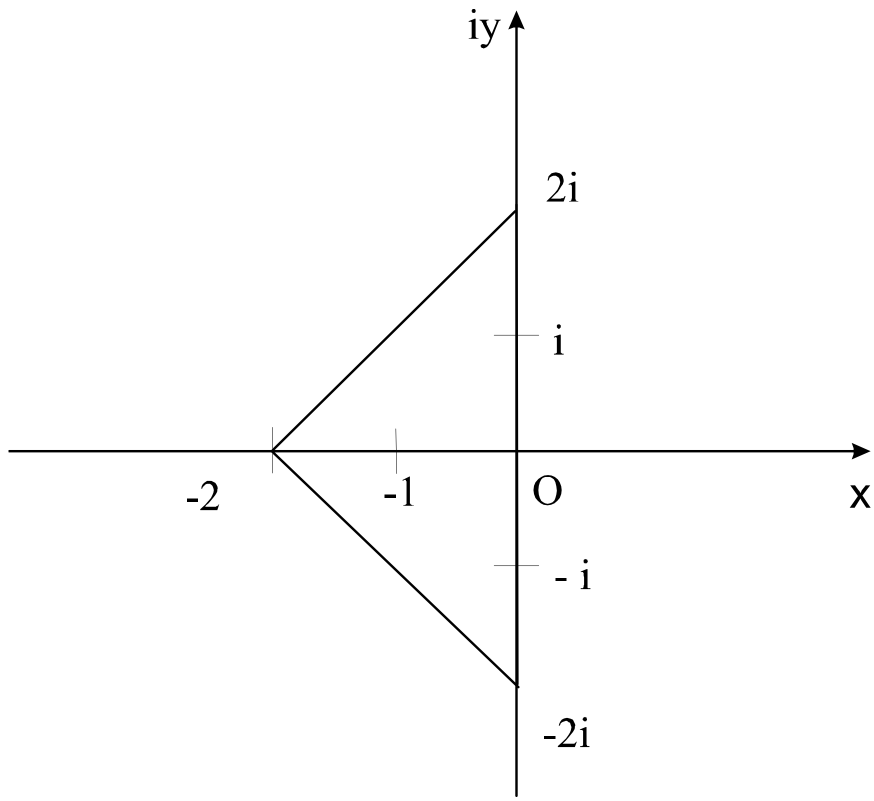

Figura VI.6

Problema VI.12: Să găsim valoarea integralei

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{4 - 3\cos t}.$$

Problema VI.13: Să calculăm

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^a}{1 + x^n} dx, \text{ unde } n \in N,\ a \in R.$$

unde $-1 < a < n - 1$, integrând convenabil o funcţie complexă pe curba din figura VI.7:

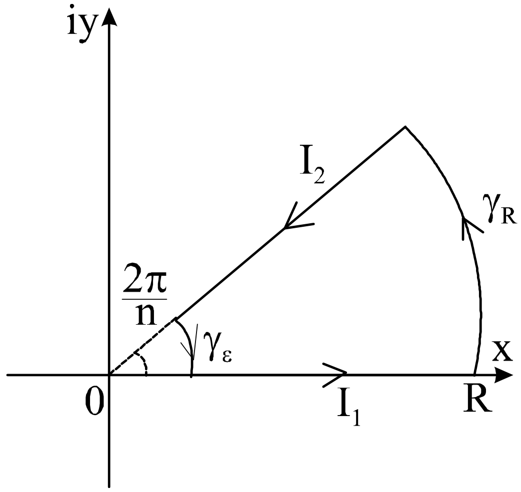

Figura VI.7