Alina Gavriluţ **Anca Croitoru**

Probleme de Analiză Matematică
II - Spaţii metrice.
Calcul diferenţial în $\mathbb{R}^p$

Editura ,,Alexandru Myller"
Iaşi 2013

Referenţi ştiinţifici:

Prof.dr. **Ovidiu Cârjă**,
Universitatea "Al.I. Cuza" Iaşi

Prof.dr. **Eugen Popa**,
Universitatea "Al.I. Cuza" Iaşi

Cuprins

Capitolul 1

Spaţii metrice

1.1 Consideraţii teoretice

Spaţii vectoriale

Definiţia 1.1.1. Fie $(K, +, \cdot)$ un corp (numit corp de scalari) şi X o mulţime nevidă, înzestrată cu două operaţii: una internă, numită *adunare* (definită pe $X \times X$, cu valori în X) şi alta externă, numită *înmulţire cu scalari* (definită pe $\mathbb{R} \times X$, cu valori în X). X se numeşte *spaţiu vectorial* (sau *liniar*) peste corpul K (notat uneori prin $(X, +, \cdot)$) dacă sunt satisfăcute următoarele axiome:

1) asociativitatea: $x + (y + z) = (x + y) + z, \forall x, y, z \in X$;

2) existenţa elementului neutru: $\exists \theta \in X$ astfel încât $\forall x \in X, x + \theta = \theta + x = x$;

3) $\forall x \in X, \exists -x \in X$ (opusul lui x) astfel încât $x + (-x) = (-x) + x = \theta$;

4) comutativitatea: $x + y = y + x, \forall x, y \in X$;

5) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y, \forall x, y \in X, \forall \lambda \in K$;

6) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x, \forall x \in X, \forall \lambda, \mu \in K$;

7) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x, \forall x \in X, \forall \lambda, \mu \in K$;

8) $1 \cdot x = x, \forall x \in X$.

În cazul când $K = \mathbb{R}$, X se va numi spaţiu vectorial (sau liniar) real.

Definiţia 1.1.2. Fie $(X, +, \cdot)$ un spaţiu liniar peste corpul de scalari K şi $Y \subseteq X$ o submulţime nevidă a lui X. Y se numeşte *subspaţiu liniar al lui X* dacă Y, înzestrat cu operaţiile de adunare „+” şi înmulţire cu scalari „·” pe X, este, la rândul lui, spaţiu liniar peste K.

Teorema 1.1.3. *Fie $(X, +, \cdot)$ un spaţiu liniar peste corpul de scalari K şi $\emptyset \neq Y \subseteq X$. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) Y este subspaţiu liniar al lui X;

(ii) $\begin{cases} x + y \in Y, & \forall x, y \in Y, \\ \alpha x \in Y, & \forall \alpha \in K, \forall x \in Y \end{cases};$

(iii) $\alpha x + \beta y \in Y$, $\forall \alpha, \beta \in K$, $\forall x, y \in Y$.

Definiţia 1.1.4. Fie E o mulţime nevidă, iar $p \in \mathbb{N}^*$ un număr natural fixat.

Prin definiţie, spaţiul E^p este produsul cartezian $\underbrace{E \times E \times \ldots \times E}_{p \text{ ori}} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_p) | x_i \in E, \forall i \in \{1, \ldots, p\}\}$.

Fie $x, y \in E$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_p)$, unde $x_1, \ldots, x_p$, $y_1, \ldots, y_p \in E$. Atunci $x = y$ dacă şi numai dacă $x_i = y_i$, pentru orice $i \in \{1, \ldots, p\}$.

Observaţia 1.1.5. Fie $E = \mathbb{R}$, mulţimea numerelor reale. Un element x se află în $\mathbb{R}^p$ dacă şi numai dacă $x = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$, unde $x_1, x_2, \ldots, x_p$ sunt în $\mathbb{R}$ şi se numesc *componentele* lui x.

Elementele spaţiului $\mathbb{R}^p$ se numesc *vectori*.

Observăm următoarele:

Pentru $p = 1$, se obţine $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$, care reprezintă punctele axei reale (dreapta reală).

Pentru $p = 2$, se obţine $\mathbb{R}^2$, care reprezintă mulţimea punctelor din plan (raportat la un sistem ortogonal de axe) (planul):

$$x = (x_1, x_2) \overset{\text{corespondenţă biunivocă}}{\leftrightarrows} P(x_1, x_2) \leftrightarrows \overrightarrow{OP} \text{ (vector de poziţie)};$$

Pentru $p = 3$, se obţine $\mathbb{R}^3$, care reprezintă mulţimea punctelor din spaţiu (raportat la un sistem triortogonal de axe) (spaţiul):

$x = (x_1, x_2, x_3) \overset{\text{corespondenţă biunivocă}}{\leftrightarrows} P(x_1, x_2, x_3) \leftrightarrows \overrightarrow{OP}$ (vector de poziţie).

Vom defini acum suma (adunarea) vectorilor:

După cum este cunoscut, în $\mathbb{R}^2$, adunarea a doi vectori $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$ se face după regula paralelogramului, rezultând vectorul sumă, $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$.

După acelaşi model, în $\mathbb{R}^p$ se defineşte:

(i) *adunarea* : $\forall x, y \in \mathbb{R}^p$, *suma vectorilor x şi y* este vectorul $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_p + y_p)$ (se defineşte pe componente);

(ii) *înmulţirea cu scalari* (*reali*): $\forall x \in \mathbb{R}^p, \forall \lambda \in \mathbb{R}$, produsul vectorului x cu scalarul λ este: $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_p)$.

Teorema 1.1.6. *Spaţiul $\mathbb{R}^p$ înzestrat cu operaţiile de adunare şi înmulţire cu scalari (definite mai sus) este spaţiu vectorial real.*

Exemplul 1.1.7. Fie A o mulţime oarecare nevidă.

1) Fie T un spaţiu liniar peste corpul K. Atunci mulţimea $\mathcal{F}(A,T) = \{f | f : A \to T\}$, este spaţiu liniar peste K. Dacă $T = \mathbb{R}$, atunci $\mathcal{F}(A,T)$ se notează simplu prin $\mathcal{F}(A)$.

2) $M(A) = \{f | f : A \to \mathbb{R}$ este mărginită$\}$ este un subspaţiu liniar al lui $\mathcal{F}(A)$.

3) Pentru $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $\mathcal{C}(A) = \{f | f : A \to \mathbb{R}$ este continuă pe $A\}$ este un subspaţiu liniar al lui $\mathcal{F}(A)$.

4) Fie $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, mulţimea funcţiilor de clasă C^n pe A, adică $C^n(A = \{f | f : A \to \mathbb{R}$ este derivabilă de n ori pe A şi $f^{(n)}$ este continuă pe $A\}$, este un subspaţiu liniar al lui $\mathcal{F}(A)$.

5) Pentru $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, mulţimea funcţiilor de clasă C^∞ pe A, adică

$$C^\infty(A) = \{f | f : A \to \mathbb{R} \text{ este derivabilă de orice ordin pe } A\},$$

este un subspaţiu liniar al lui $\mathcal{F}(A)$.

6) Dacă $A = \mathbb{N}$ şi $T = \mathbb{R}$, atunci se obţine spaţiul liniar real

$$\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) = \mathcal{F}(\mathbb{N}) = \{f | f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\},$$

notat cu s şi care reprezintă mulţimea tuturor şirurilor numerice. Aşadar,

$$s = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} | x_n \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

7) Dacă se consideră $A = \mathbb{N}$ în exemplul precedent, atunci se obţine spaţiul liniar $M(\mathbb{N})$ al tuturor şirurilor numerice mărginite, care se mai notează prin m sau ℓ^∞.

8) Mulţimea $c = \{(x_n)_n \subset \mathbb{R} | (x_n)_n$ este convergent$\}$ este un subspaţiu liniar al lui s.

9) Mulţimea $c_0 = \{(x_n)_n \subset \mathbb{R} | x_n \to 0\}$ este un subspaţiu liniar al lui s.

10) Pentru $p \in [1, +\infty)$, mulţimea

$$l^p = \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \middle| \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p < +\infty \right\}$$

este un subspaţiu liniar al lui s.

11) Mulţimea $\mathbb{R}^\infty = \{(x_n)_n \subset \mathbb{R} |$ există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_n = 0$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0\}$ este un subspaţiu liniar al lui s.

Spaţii metrice

Definiţia 1.1.8. Fie $X \neq \emptyset$. O aplicaţie $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ se numeşte *distanţă* sau *metrică* pe X dacă au loc:

(M_1) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

(M_2) $d(x,y) = d(y,x), \forall x, y \in X$ *(simetria);*

(M_3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y), \forall x, y, z \in X$ *(inegalitatea triunghiulară).*

Perechea (X, d) se numeşte *spaţiu metric.*

Observaţia 1.1.9. Pe aceeaşi mulţime se pot defini mai multe metrici, în raport cu care mulţimea devine un alt spaţiu, cu proprietăţi distincte.

Propoziţia 1.1.10. *Într-un spaţiu metric oarecare* (X, d) *au loc:*

(i) $d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + ... + d(x_{n-1}, x_n), \forall x_1, x_2, ..., x_n \in X$;

(ii) $|d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y), \forall x, y, z \in X$;

(iii) $|d(x,y) - d(x',y')| \leq d(x,x') + d(y,y'), \forall x, y, x', y' \in X$ *(inegalitatea patrulaterului).*

Observaţia 1.1.11. Interpretări în plan ale ultimelor două inegalităţi: lungimea oricărei laturi a unui triunghi este cel puţin egală cu diferenţa lungimilor celorlalte două, respectiv într-un patrulater, diferenţa lungimilor a două laturi este cel mult egală cu suma lungimilor celorlalte două laturi.

Exemplul 1.1.12. I) $(\mathbb{R}^p, d)$ cu $p \in \mathbb{N}^*$, unde d este definită de relaţia $d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_p - y_p)^2} = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{p} (x_i - y_i)^2}$,

$\forall x = (x_1, x_2, ..., x_p), y = (y_1, y_2, ..., y_p) \in \mathbb{R}^p$ este spaţiu metric (d se numeşte *metrica euclidiană*).

Pentru $p = 1$ se obţine $d(x,y) = |x - y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, care este distanţa obişnuită între două numere reale.

Pentru $p = 2, d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ este distanţa obişnuită între două puncte din plan.

II) $(\mathbb{R}^p, d_1)$, $(\mathbb{R}^p, d_2)$, cu $p \in \mathbb{N}^*$, sunt spaţii metrice, unde

$d_1(x,y) = \max\limits_{i=\overline{1,p}} |x_i - y_i|$

$d_2(x,y) = \sum\limits_{i=1}^{p} |x_i - y_i|$,

$\forall x = (x_1, x_2, ..., x_p), y = (y_1, y_2, ..., y_p) \in \mathbb{R}^p$.

III) Fie A o mulţime oarecare nevidă şi $\mathcal{M}(A) = \{f : A \to \mathbb{R} | \ f$ mărginită pe $A\}$. Atunci funcţia $d : \mathcal{M}(A) \times \mathcal{M}(A) \to \mathbb{R}_+, d(f,g) = \sup\limits_{x \in A} |f(x) - g(x)|$

este o metrică pe $\mathcal{M}(A)$, numită metrica uniformă, metrica convergenţei uniforme sau metrica Cebîşev.

IV) Fie X o mulţime nevidă oarecare. Funcţia $d : X \times X \to \mathbb{R}_+, d(x,y) = \begin{cases} 1, x \neq y \\ 0, x = y \end{cases}$ este metrică pe X, numită *metrica discretă*.

V) Fie $(X_i, d_i), i = \overline{1,p}$, $p \in \mathbb{N}^*$, spaţii metrice oarecare. Considerăm $X = X_1 \times X_2 \times ... \times X_p$ şi $d(x,y) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{p} d_i^2(x_i, y_i)}, \forall x = (x_1, x_2, ..., x_p), y = (y_1, y_2, ..., y_p) \in X, x_i, y_i \in X_i, \forall i = \overline{1,p}$. Atunci d este metrică (numită *metrica produs*) pe spaţiul produs al celor n spaţii metrice. (X, d) se numeşte *spaţiu metric produs*.

Spaţii normate

Definiţia 1.1.13. O funcţie $|| \cdot || : X \to \mathbb{R}_+$ se numeşte *normă* pe spaţiul vectorial real X dacă:

(N_1) $||x|| \geq 0, \forall x \in X; ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$ *(pozitivitatea);*

(N_2) $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||, \forall x \in X, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ *(omogenitatea);*

(N_3) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||, \forall x, y \in X$ *(inegalitatea triunghiulară).*

Perechea $(X, || \cdot ||)$ se numeşte *spaţiu normat.*

Observaţia 1.1.14. Pe acelaşi spaţiu vectorial se pot defini mai multe norme, iar în raport cu fiecare normă, spaţiul vectorial devine un alt spaţiu normat, cu proprietăţi distincte.

Din definiţie rezultă imediat următoarele proprietăţi:

Propoziţia 1.1.15. *Fie* $(X, || \cdot ||)$ *un spaţiu normat. Atunci:*

$$\begin{aligned} |||x|| - ||y||| &\leq ||x - y||, \forall x, y \in X; \\ ||\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_n u_n|| &\leq |\lambda_1| \cdot ||u_1|| + |\lambda_2| \cdot ||u_2|| + ... + |\lambda_n| \cdot ||u_n||, \\ \forall \lambda_i &\in \mathbb{R}, \forall u_i \in X, i = \overline{1,n}; \end{aligned}$$

Teorema 1.1.16. *Dacă* $(X, \| \cdot \|)$ *este un spaţiu normat, atunci funcţia* $d(x,y) = ||x - y||, \forall x, y \in X$, *este o distanţă pe* X, *având proprietăţile:*

(i) $d(x + z, y + z) = d(x,y), \forall x, y, z \in X$;

(ii) $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| \cdot d(x,y), \forall x, y \in X, \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

(iii) $\|x\| = d(x, \theta)$, $\forall x \in X$.

Observaţia 1.1.17. Orice normă induce o distanţă, deci orice spaţiu liniar normat poate fi organizat ca spaţiu metric. Reciproca nu este adevărată, deoarece în primul rând pentru definirea noţiunii de metrică nu se cere structură de spaţiu liniar. Dar chiar dacă X este spaţiu liniar, se pot defini metrici care să nu provină din norme. De exemplu, aplicaţia, definită prin $d(x,y) = \sum\limits_{i=1}^{p} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{|x_i - y_i|}{1+|x_i-y_i|}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^p$, $x = (x_1, \ldots, x_p)$, $y = (y_1, \ldots, y_p)$, este o metrică pe $\mathbb{R}^p (p \in \mathbb{N}^*)$, care nu provine dintr-o normă.

Exemplul 1.1.18. I) $(\mathbb{R}^p, \|\cdot\|)$, cu $p \in \mathbb{N}^*$, unde

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} {x_i}^2}, \forall x = (x_1, x_2, ..., x_p) \in \mathbb{R}^p (\textit{norma euclidiană}).$$

Distanţa indusă de această normă este distanţa euclidiană.
Dacă $p = 1$, atunci $\|x\| = |x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

II) Următoarele aplicaţii, definite prin:

$$\|x\|_1 = \max_{i=\overline{1,p}} |x_i|, \forall x \in \mathbb{R}^p, \quad \|x\|_2 = \sum_{i=1}^{p} |x_i|, \forall x \in \mathbb{R}^p,$$

sunt de asemenea norme pe $\mathbb{R}^p$.

III) Fie A o mulţime oarecare nevidă.

Funcţia $\|\cdot\| : \mathcal{M}(A) \to \mathbb{R}_+$, $\|f\| = \sup\limits_{x \in A} |f(x)|, \forall f \in \mathcal{M}(A)$, este o normă pe $\mathcal{M}(A)$, numită *norma uniformă*, norma convergenţei uniforme sau norma Cebîşev, care induce distanţa uniformă.

IV) Fie $p \in [1, +\infty)$şi $l^p = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} | \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}$. Funcţia $\|x\|_p = \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$, $\forall x = (x_n)_n \in l^p$, este o normă pe l^p.

Teorema 1.1.19. *Norma euclidiană pe* $\mathbb{R}^p (p \in \mathbb{N}^*)$ *are următoarele proprietăţi:*

(i) $|x_i| \le \|x\| \le |x_1| + |x_2| + ... + |x_p|, \forall i = \overline{1,p}$;

(ii) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2), \forall x, y \in \mathbb{R}^p$ *(identitatea paralelogramului).*

Definiţia 1.1.20. Numim *versor,* un vector $x \in \mathbb{R}^p$, cu $\|x\| = 1$.

Dacă $p = 2$, atunci versorii $i = (1, 0)$ şi $j = (0, 1)$ formează o bază în $\mathbb{R}^2$. Orice vector $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ se poate scrie în mod unic în funcţie de i şi j astfel:

$$x = x_1 i + x_2 j.$$

Pentru $p = 3$, versorii $i = (1, 0, 0), j = (0, 1, 0)$ şi $k = (0, 0, 1)$ formează o bază în $\mathbb{R}^3$. Orice vector $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ se exprimă în mod unic în funcţie de aceşti versori: $x = x_1 i + x_2 j + x_3 k$.

În general, în $\mathbb{R}^p$, versorii $e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots,$ $e_p = (0, 0, 0, \ldots, 0, 1)$ formează o bază în $\mathbb{R}^p$. Orice vector $x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ se exprimă în mod unic în funcţie de aceşti versori: $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_p e_p$.

Aşa cum am observat până acum, în $\mathbb{R}^p$ am putut deocamdată măsura distanţele, dar nu şi unghiurile, ceea ce limitează posibilitatea de interpretare geometrică. De aceea, în continuare, vom introduce produsul scalar al doi vectori, cu ajutorul căruia vom putea exprima lungimile vectorilor, dar şi măsurile unghiurilor pe care aceştia le formează.

Definiţia 1.1.21. *Produsul scalar în* $\mathbb{R}^p$ este, prin definiţie, aplicaţia $< \cdot, \cdot >: \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, dată prin: $< x, y >= x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_p y_p = \sum\limits_{i=1}^{p} x_i y_i, \forall x, y \in \mathbb{R}^p$, $x = (x_1, \ldots, x_p)$, $y = (y_1, \ldots, y_p)$.

Uneori vom nota produsul scalar prin $(\cdot, \cdot)$.

Teorema 1.1.22 (proprietăţile fundamentale ale produsului scalar)**.** (P_1) $< x, x >\geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^p; < x, x >= 0 \Leftrightarrow x = 0$ *(pozitivitatea);*

(P_2) $< x, y >=< y, x >, \forall x, y \in \mathbb{R}^p$ *(simetria);*

(P_3) $\lambda < x, y >=< \lambda x, y >, \forall x, y \in \mathbb{R}^p, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ *(omogenitatea în raport cu* (*prima*) *componentă);*

(P_4) $< x + y, z >=< x, z > + < y, z >, \forall x, y, z \in \mathbb{R}^p$ *(aditivitatea în raport cu* (*prima*) *componentă).*

Teorema 1.1.23. *Produsul scalar în* $\mathbb{R}^p$ *are în plus următoarele proprietăţi:*

(P_5) $< x, x >= \|x\|^2, \forall x \in \mathbb{R}^p$;

(P_6) $< x, y > | \leq \|x\| \cdot \|y\|, \forall x, y \in \mathbb{R}^p$ (*inegalitatea lui Cauchy*);

(P_7) $< x, y > | \leq \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2), \forall x, y \in \mathbb{R}^p$.

Observaţia 1.1.24. Din P_6, se obţine că $\left|\frac{<x,y>}{\|x\|\cdot\|y\|}\right| \leq 1, \forall x, y \in \mathbb{R}^p, x \neq 0, y \neq 0$. Există atunci şi este unic un unghi $\theta \in [0, \pi]$ astfel încât $\frac{<x,y>}{\|x\|\cdot\|y\|} = \cos\theta$, deci observăm că

$$< x, y >= \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos\theta, \forall x, y \in \mathbb{R}^p.$$

θ se numeşte *unghiul dintre vectorii x şi y*.

Definiţia 1.1.25. Spunem că *vectorii x* şi *y sunt perpendiculari* dacă $< x, y >= 0$. Notăm aceasta prin $x \perp y$.

Topologia unui spaţiu metric

Definiţia 1.1.26. Fie (X, d) un spaţiu metric şi fie $x_0 \in X$ şi $r \in (0, +\infty)$ arbitrare, fixate. Definim

$$S(x_0, r) = \{x \in X; d(x, x_0) < r\},$$

numită *sfera deschisă de centru x_0 şi rază r*,

$$T(x_0, r) = \{x \in X; d(x, x_0) \leq r\},$$

numită *sfera închisă de centru x_0 şi rază r*.

Exemplul 1.1.27. I) În $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ avem $S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}; |x - x_0| < r\} = (x_0 - r, x_0 + r)$, adică intervalul deschis centrat în x_0 şi de rază r, iar

$T(x_0, r) = [x_0 - r, x_0 + r]$, adică intervalul închis centrat în x_0 şi de rază r.

II) În $\mathbb{R}^2$ înzestrat cu metrica euclidiană, se obţine:

$$\begin{aligned} S(x_0, r) &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2} < r\} = \\ &= (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; (x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 < r^2\}, \end{aligned}$$

iar $T(x_0, r) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; (x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 \leq r^2\}$.

Aşadar, $S(x_0, r)$ reprezintă interiorul cercului $C((x_1^0, x_2^0), r)$ de centru (x_1^0, x_2^0) şi rază r, iar $T(x_0, r) = S(x_0, r) \cup C((x_1^0, x_2^0), r)$.

III) În $\mathbb{R}^3$, $S(x_0, r)$ devine chiar sfera centrată în x_0, ceea ce justifică denumirile date noţiunilor introduse.

IV) Dacă (X, d) este spaţiul metric discret, atunci $S(x_0, r) = \begin{cases} \{x_0\}, r \leq 1 \\ X, r > 1, \end{cases}$

iar $T(x_0, r) = \begin{cases} \{x_0\}, r < 1 \\ X, r \geq 1 \end{cases}$.

Definiţia 1.1.28. O mulţime $V \subset (X, d)$ se numeşte *vecinătate a punctului* $x_0 \in X$ dacă există $r > 0$ astfel încât $S(x_0, r) \subset V$.

Notăm prin $\mathcal{V}(x_0)$, *sistemul* (*familia*) tuturor *vecinătăţilor punctului* x_0.

Teorema 1.1.29 (Proprietăţi de bază ale sistemului de vecinătăţi)**.** (V_1) $x_0 \in V, \forall V \in \mathcal{V}(x_0)$;

(V_2) $\forall V \in \mathcal{V}(x_0), \forall U \supset V \Rightarrow U \in \mathcal{V}(x_0)$ *(orice supramulţime a unei vecinătăţi a unui punct este de asemenea vecinătate a punctului)*;

(V_3) $\forall V_1, V_2 \in \mathcal{V}(x_0) \Rightarrow V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}(x_0)$ *(intersecţia oricăror două vecinătăţi ale unui punct este de asemenea vecinătate a punctului)*;

$V_4)$ $\forall V \in \mathcal{V}(x_0), \exists W \in \mathcal{V}(x_0)$ *astfel încât* $\forall y \in W \Rightarrow W \in \mathcal{V}(y)$.

Observaţia 1.1.30. Din V_4 rezultă că $S(x_0, r) \in \mathcal{V}(y), \forall y \in S(x_0, r)$ (orice sferă deschisă centrată într-un punct este vecinătate pentru orice punct al său).

Teorema 1.1.31 (Proprietatea de separare Hausdorff)**.** $\forall x, y \in (X, d), x \neq y, \exists V_x \in \mathcal{V}(x), \exists V_y \in \mathcal{V}(y)$ *astfel încât* $V_x \cap V_y = \emptyset$ *(orice două puncte diferite din* (X, d) *pot fi separate prin vecinătăţi disjuncte ale lor).*

Definiţia 1.1.32. Dat fiind $x_0 \in (X, d)$, o familie $\mathcal{U}(x_0)$ de părţi din (X, d) se numeşte *sistem fundamental de vecinătăţi (*sau *bază locală) pentru* x_0 dacă:

1) $\mathcal{U}(x_0) \subset \mathcal{V}(x_0)$ şi

2) $\forall V \in \mathcal{V}(x_0), \exists U \in \mathcal{U}(x_0)$ astfel încât $U \subset V$.

Exemplul 1.1.33. I) $\mathcal{U}_1(x_0) = \{S(x_0, r)\}_{r>0}$ (mulţimea tuturor sferelor deschise cu centrul într-un punct $x_0 \in (X, d)$ formează un sistem fundamental de vecinătăţi pentru x_0).

Într-adevăr, $\forall S(x_0, r) \in \mathcal{V}(x_0)$, deci $\mathcal{U}_1(x_0) \subset \mathcal{V}(x_0)$. În plus, $\forall V \in \mathcal{V}(x_0)$, conform definiţiei, $\exists S(x_0, r) \in \mathcal{U}_1(x_0)$ astfel încât $S(x_0, r) \subset V$.

II) Fie $x_0 \in (X, d)$. Atunci familia $\mathcal{U}_2(x_0) = \{D \in \tau | x_0 \in D\}$ este un sistem fundamental de vecinătăţi pentru x_0.

Observaţia 1.1.34. *În* (X, d)*, orice punct* $x_0 \in X$ *posedă un sistem fundamental numărabil de vecinătăţi (se mai spune că satisface axioma I a numărabilităţii sau axioma* C_1*). Într-adevăr, familia* $\{S(x_0, \frac{1}{n}) | n \in \mathbb{N}^*\}$*, a tuturor sferelor deschise cu centrul* x_0 *şi de rază* $\frac{1}{n}$*, este un sistem fundamental numărabil de vecinătăţi pentru* x_0*.*

Definiţia 1.1.35. O *mulţime* $D \subset (X,d)$ se numeşte *deschisă* dacă fie este $\emptyset$, fie este vecinătate pentru orice punct al său.

Familia tuturor mulţimilor deschise din (X,d) se notează cu τ_d şi se numeşte *topologia indusă de metrica d.*

În particular, dacă $X = \mathbb{R}^k$ şi d este metrica euclidiană, atunci topologia indusă de d se numeşte *topologia uzuală (obişnuită) (naturală)* τ_0 pe $\mathbb{R}^k$.

Definiţia 1.1.36. O *mulţime* $F \subset (X,d)$ se numeşte *închisă* dacă cF este mulţime deschisă.

Exemplul 1.1.37. I) Într-un spaţiu metric, orice sferă deschisă este vecinătate pentru orice punct al său, deci este mulţime deschisă (ceea ce justifică terminologia).

II) Într-un spaţiu metric, fie $x_0 \in (X,d)$ şi $r > 0$ oarecare. Mulţimea $A = \{x \in X; d(x,x_0) > r\}$ este deschisă. Într-adevăr, $\forall x \in A$ (dacă $\exists$), $\exists r' = d(x,x_0) - r$ (> 0) astfel încât $S(x,r') \subseteq A : \forall z \in S(x,r'), d(z,x_0) \geq d(x,x_0) - d(x,z) > d(x,x_0) - r' = r.$

Observaţia 1.1.38. Într-un spaţiu metric pot exista mulţimi care nu sunt nici deschise, nici închise: în $X = \mathbb{R}, d-$ metrica euclidiană: $[a,b), a,b \in \mathbb{R}, a < b$.

Propoziţia 1.1.39 (proprietăţi ale mulţimilor deschise şi închise)**.** (i) *Orice reuniune (finită sau infinită) de mulţimi deschise este mulţime deschisă.*

(ii) *Orice intersecţie finită de mulţimi deschise este mulţime deschisă.*

(iii) *Orice reuniune finită de mulţimi închise este mulţime închisă.*

(iv) *Orice intersecţie (finită sau infinită) de mulţimi închise este mulţime închisă.*

(v) $X, \emptyset$ *sunt mulţimi şi deschise, şi închise.*

Propoziţia 1.1.40. *Orice mulţime deschisă nevidă D dintr-un spaţiu metric (X,d) se poate reprezenta ca o reuniune de mulţimi deschise.*

Observaţia 1.1.41. O intersecţie infinită de mulţimi deschise poate să nu fie deschisă: $X = \mathbb{R}, D_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ sunt deschise, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, dar $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} D_n = \{0\}$ nu este deschisă.

Exemplul 1.1.42. I) Orice mulţime finită dintr-un spaţiu metric este închisă. Într-adevăr, dacă $A = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, să arătăm că cA este deschisă. Pentru aceasta, demonstrăm că $\forall y \in cA, \exists S(y,r) \subset cA$. Fie $r \in (0, \min\limits_{i=\overline{1,n}} d(x_i,y))$. Atunci $\forall z \in S(y,r)$, avem $d(y,z) < r < d(x_i,y), \forall i = \overline{1,n}$, deci $z \neq x_i, \forall i = \overline{1,n}$, ceea ce înseamnă că $z \in cA$.

II) Orice sferă închisă dintr-un spaţiu metric este închisă (ceea ce justifică terminologia). Să arătăm deci că $cT(x_0, r)$ este deschisă, adică, $\forall y \in cT(x_0, r)$, $\exists S(y, r') \subset cT(x_0, r)$. Într-adevăr, fie $r' \in (0, d(x_0, y) - r)$. $\forall z \in S(y, r')$ satisface $d(x_0, z) \geq d(x_0, y) - d(y, z) > d(x_0, y) - r' = r$, de unde concluzia.

Definiţia 1.1.43. Fie X o mulţime oarecare nevidă.

I) O familie $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ se spune că este o *topologie* pe X dacă:

i) $\forall (D_i)_{i \in I} \subset \tau \Rightarrow D = \underset{i \in I}{\cup} D_i \in \tau$;

ii) $\forall D_1, D_2 \in \tau \Rightarrow D = D_1 \cap D_2 \in \tau$;

iii) $X, \emptyset \in \tau$.

II) Cuplul (X, τ) se numeşte *spaţiu topologic*.

Exemplul 1.1.44. I) Orice spaţiu metric (X, d) este spaţiu topologic (X, τ_d) (în raport cu topologia indusă de metrică).

II) Fie (X, d_0) spaţiul metric discret. Deoarece $\forall x \in X, S(x, 1) = \{x\}$, rezultă că $\forall A \subset X, A = \underset{x \in A}{\cup} \{x\} = \underset{x \in A}{\cup} S(x, 1)$, care este mulţime deschisă. Prin urmare, *orice submulţime a unui spaţiu metric discret este deschisă*, ceea ce antrenează $\mathcal{P}(X) \subset \tau_{d_0}$. Deoarece incluziunea inversă are loc întotdeauna, rezultă că $\tau_{d_0} = \mathcal{P}(X)$.

Pe de altă parte, rezultă imediat şi că *orice submulţime a unui spaţiu metric discret este închisă*.

III) Fie $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ (dreapta reală încheiată), $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ şi $V \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. V se numeşte vecinătate:

- pentru $x_0 \in \mathbb{R}$, dacă $\exists (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset V$;
- pentru $x_0 = -\infty$, dacă $\exists [-\infty, x_0) \subset V$;
- pentru $x_0 = +\infty$, dacă $\exists (x_0, +\infty] \subset V$.

Se notează cu $\mathcal{V}(x_0)$ familia tuturor vecinătăţilor lui x_0.

O mulţime $D \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ se numeşte *deschisă* dacă $D = \emptyset$ sau $D \neq \emptyset$ şi $D \in \mathcal{V}(x)$ pentru orice $x \in D$. Dacă se notează cu $\overline{\tau}_0$ familia tuturor mulţimilor deschise din $\overline{\mathbb{R}}$, atunci $\overline{\tau}_0$ este o topologie pe $\overline{\mathbb{R}}$, numită *topologia uzuală a lui* $\overline{\mathbb{R}}$. Ne punem problema dacă topologia $\overline{\tau_0}$ a lui $\overline{\mathbb{R}}$ poate fi interpretată ca o topologie indusă de o metrică. Dacă încercăm să procedăm ca în $\mathbb{R}$, observăm că nu putem defini o distanţă cu ajutorul modulului, deoarece $d(+\infty, +\infty) = |+\infty - (+\infty)| = |\infty - \infty|$ nu are sens.

Fie atunci $f : \overline{\mathbb{R}} \to [-1, 1]$, $f(x) = \begin{cases} 1, & x = \infty \\ -1, & x = -\infty \\ \frac{x}{1+|x|}, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$, numită *funcţia limitativă a lui Baire*.

Funcţia f este o bijecţie, iar aplicaţia $\overline{d} : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}_+$, definită prin $\overline{d}(x, y) = |f(x) - f(y)|$, $\forall x, y \in \overline{\mathbb{R}}$, este o metrică pe $\overline{\mathbb{R}}$.

Mai mult, topologia indusă de această metrică $\overline{d}$ pe $\overline{\mathbb{R}}$, $\tau_{\overline{d}}$, coincide cu $\overline{\tau}_0$.

Definiţia 1.1.45. Fie $\emptyset \neq A \subset (X, d)$, o mulţime oarecare.

(i) Un punct $x_0 \in A$ se numeşte *punct interior* mulţimii A dacă $A \in \mathcal{V}(x_0)$, adică există $r > 0$ astfel încât $S(x_0, r) \subseteq A$.

(ii) Totalitatea punctelor interioare mulţimii A se numeşte *interiorul* lui A şi se notează prin $intA$ sau $\overset{\circ}{A}$.

Exemplul 1.1.46. I) $\overset{\circ}{\widehat{[a, b]}} = \overset{\circ}{\widehat{[a, b)}} = \overset{\circ}{\widehat{(a, b]}} = \overset{\circ}{\widehat{(a, b)}} = (a, b), \forall a, b \in \mathbb{R}, a < b$;

II) $\overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \overset{\circ}{\widehat{\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}}} = \emptyset$;

III) Dacă $A = (0, 1]$, atunci $\frac{1}{2} \in \overset{\circ}{A}$, iar 0 şi $1 \notin \overset{\circ}{A}$;

IV) Fie $A = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 4, x > y\}$. Atunci $\overset{\circ}{A} = \{(x, y); x^2 + y^2 < 4, x > y\}$.

Propoziţia 1.1.47 (*proprietăţi* ale interiorului)**.** *Fie* $A, B \in \mathcal{P}(X)$.

- (*i*) $\overset{\circ}{A} \subseteq A, \forall A \subset (X, d)$;
- (*ii*) $\overset{\circ}{A} \subseteq \overset{\circ}{B}, \forall A, B \subset (X, d)$, *cu* $A \subseteq B$;
- (*iii*) $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}, \forall A, B \subset (X, d)$;
- (*iv*) $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subseteq \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}, \forall A, B \subset (X, d)$;
- (*v*) *A este mulţime deschisă dacă şi numai dacă* $A = \overset{\circ}{A}$;
- (*vi*) $\overset{\circ}{A} = \bigcup\limits_{D \in \tau_d, D \subset A} D$ *(interiorul unei mulţimi A este cea mai amplă mulţime (în sensul incluziunii) deschisă conţinută în A).*

Observaţia 1.1.48. Incluziunea din (iv) poate fi strictă: $A = [0, 1), B = [1, 2], \overset{\circ}{A} = (0, 1), \overset{\circ}{B} = (1, 2), \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}} = (0, 2)$.

Definiţia 1.1.49. Fie $\emptyset \neq A \subseteq (X, d)$.

(i) Un punct $x_0 \in (X, d)$ se numeşte *punct aderent* mulţimii A dacă $V \cap A \neq \emptyset, \forall V \in \mathcal{V}(x_0)$.

(ii) Totalitatea punctelor aderente mulţimii A se numeşte *aderenţa (sau închiderea)* lui A şi se notează prin $\overline{A}$ sau clA.

Definiţia 1.1.50. Spunem că:

(i) mulţimea A este *densă* în (X,d) dacă $\overline{A}=X$;

(ii) spaţiul (X,d) este *separabil* dacă există $A\subseteq X$ numărabilă densă în X.

Teorema 1.1.51 (de caracterizare cu sistem fundamental de vecinătăţi)**.** *$x_0\in\overline{A}$ dacă şi numai dacă $\forall\varepsilon>0, S(x_0,\varepsilon)\cap A\neq\emptyset$.*

Exemplul 1.1.52. I) $\overline{[a,b]}=\overline{(a,b]}=\overline{(a,b)}=\overline{[a,b)}=[a,b],\forall a,b\in\mathbb{R},a<b$;

II) $\overline{\mathbb{Q}}=\overline{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$ (deci $\mathbb{Q}$ şi $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ sunt dense în $\mathbb{R}$). De altfel, de exemplu, în general, şi $\overline{\mathbb{Q}^k}=\mathbb{R}^k$ (deci $\mathbb{Q}^k$ este densă în $\mathbb{R}^k$).

$\mathbb{R}^k$ este spaţiu separabil, $\forall k\geq 1$.

III) Dacă $A\subset\mathbb{R}$ este o mulţime nevidă, mărginită, atunci $\sup A,\inf A\in\overline{A}$.

IV) Fie $A=\{(x,y);x^2+y^2\leq 4,x>y\}$. Atunci $\overline{A}=\{(x,y);x^2+y^2\leq 4,x\geq y\}$.

Propoziţia 1.1.53. *În orice spaţiu normat, $\overline{S(x_0,r)}=T(x_0,r)$.*

Teorema 1.1.54. *(relaţiile (duale) de legătură între interior şi aderenţă).*

(i) $c(\overline{A})=\overset{\circ}{\widehat{cA}}$ (complementara aderenţei este interiorul complementarei);

(ii) $c(\overset{\circ}{A})=\overline{cA}$ (complementara interiorului este aderenţa complementarei).

Propoziţia 1.1.55 (proprietăţi ale aderenţei unei mulţimi)**.** *Fie $A,B\subseteq(X,d)$. Atunci au loc următoarele proprietăţi:*

(i) $A\subseteq\overline{A},\forall A\subset(X,d)$;

(ii) $\overline{A}\subseteq\overline{B},\forall A,B\subset(X,d)$, cu $A\subseteq B$;

(iii) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B},\forall A,B\subset(X,d)$;

(iv) $\overline{A}\cap\overline{B}\supseteq\overline{A\cap B},\forall A,B\subset(X,d)$;

(v) A este mulţime închisă dacă şi numai dacă $A=\overline{A}$;

(vi) $\overline{A}=\bigcap\limits_{cF\in\tau_d,F\supset A}F$ (aderenţa unei mulţimi A este cea mai mică mulţime (în sensul incluziunii) închisă care conţine A).

Definiţia 1.1.56. Fie $\emptyset\neq A\subset(X,d)$ o mulţime oarecare. Un punct $x_0\in(X,d)$ se numeşte *punct de acumulare* pentru A dacă $[V\backslash\{x_0\}]\cap A\neq\emptyset,\forall V\in\mathcal{V}(x_0)$.

Totalitatea punctelor de acumulare pentru mulţimea A se numeşte *mulţimea derivată* lui A şi se notează prin A'. Prin definiţie, $\emptyset'=\emptyset$.

Definiţia 1.1.57. Un punct $x_0\in A$ care nu este punct de acumulare se numeşte *punct izolat.*

Prin urmare, $x_0\in A$ este punct izolat dacă şi numai dacă există $V_0\in\mathcal{V}(x_0)$ aşa încât $V_0\cap A=\{x_0\}$.

Teorema 1.1.58 (de caracterizare cu sistem fundamental de vecinătăţi). *$x_0 \in A'$ dacă şi numai dacă $\forall \varepsilon > 0, [S(x_0, \varepsilon)\backslash\{x_0\}] \cap A \neq \emptyset$.*

Exemplul 1.1.59. I) $[a,b]' = (a,b]' = (a,b)' = [a,b)' = [a,b], \forall a, b \in \mathbb{R}, a < b$;

II) $\mathbb{Q}' = (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})' = \mathbb{R}$.

III) $\{\frac{1}{n}\}'_{n\geq 1} = \{0\}$.

IV) Fie $A = \{(x,y); x^2 + y^2 \leq 4, x > y\}$. Atunci $A' = \{(x,y); x^2 + y^2 \leq 4, x \geq y\}$.

Propoziţia 1.1.60 (proprietăţi ale mulţimii derivate). *Fie $A, B \in \mathcal{P}(X)$. Atunci au loc următoarele proprietăţi:*

(i) $A' \subseteq \overline{A}, \forall A \subset (X,d)$ (orice punct de acumulare este punct aderent);

(ii) $A' \subseteq B', \forall A, B \subset (X,d)$, cu $A \subseteq B$;

(iii) $(A \cup B)' = A' \cup B', \forall A, B \subset (X,d)$;

(iv) $\overline{A} = A \cup A', \forall A \subset (X,d)$;

(v) $A' = \overline{A\backslash\{x_0\}}$.

Observaţia 1.1.61. Într-un spaţiu metric oarecare, o mulţime finită nu poate avea puncte de acumulare (deci mulţimea derivată este vidă). Într-adevăr, fie $A = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ şi presupunem prin reducere la absurd că $A' \neq \emptyset$, deci $\exists \widetilde{x} \in A'$. Prin urmare, $\forall \varepsilon > 0, [S(\widetilde{x}, \varepsilon)\backslash\{\widetilde{x}\}] \cap A \neq \emptyset$, adică, $\forall \varepsilon > 0, \exists y_\varepsilon \in A, y_\varepsilon \neq \widetilde{x}$ astfel ca $d(\widetilde{x}, y_\varepsilon) < \varepsilon$. În particular, pentru $\varepsilon \in (0, \min\limits_{i=\overline{1,n}} d(\widetilde{x}, x_i)), \exists y_\varepsilon \in A, y_\varepsilon \neq \widetilde{x}$ astfel ca $d(\widetilde{x}, y_\varepsilon) < \varepsilon < d(\widetilde{x}, x_i), \forall i = \overline{1,n}$, contradicţie.

Definiţia 1.1.62. Fie $A \subset (X,d), A \neq \emptyset$. Mulţimea $FrA = \overline{A}\backslash\overset{\circ}{A}(= \overline{A} \cap \overline{cA})$ se numeşte *frontiera* lui A.

Teorema 1.1.63. *Fie $A \in \mathcal{P}(X)$.*

(i) $\overset{\circ}{A} = A\backslash FrA$;

(ii) $\overline{A} = A \cup FrA$.

(iii) FrA este mulţime închisă;

(iv) $FrA = Fr(cA)$.

Definiţia 1.1.64. Fie o mulţime nevidă $A \subseteq (X,d)$.

(i) Numim *diametru* al mulţimii $A, \delta(A) = \sup\{d(x,y); x \in A, y \in A\}$ $(\in [0, \infty])$.

(ii) Spunem că *mulţimea* A este *mărginită* dacă $\delta(A) < \infty$.

(iii) Spunem că *mulţimea* A este *nemărginită* dacă $\delta(A) = \infty$.

Teorema 1.1.65. *Fie* $A, B \subseteq \mathcal{P}(X)\backslash\{\emptyset\}$.

(*i*) *Dacă* $A \subseteq B$, *atunci* $\delta(A) \leq \delta(B)$;

(*ii*) $\delta(A) = 0 \Leftrightarrow card\, A = 1$;

(*iii*) $\delta(S(x_0, r)) \leq \delta(T(x_0, r)) \leq 2r$.

Teorema 1.1.66. *Fie o mulţime nevidă* $A \subset (X, d)$. *Atunci* A *este mărginită dacă şi numai dacă există o sferă deschisă care să o cuprindă, adică, există* $r \in (0, +\infty)$ *astfel încât* $A \subseteq S(x_0, r)$, $x_0 \in X$.

Teorema 1.1.67. *Fie* $(X, ||\cdot||)$ *un spaţiu normat. Atunci o mulţime nevidă* $A \subseteq X$ *este mărginită dacă şi numai dacă există o sferă deschisă centrată în origine care să o cuprindă, adică, există* $r \in (0, \infty)$ *astfel încât* $A \subseteq S(0, r)$.

Definiţia 1.1.68. Fie un spaţiu metric (X, d) şi $Y \subset X, Y \neq \emptyset$. Se observă imediat că $d_{/Y \times Y}$ este de asemenea metrică, numită *metrica indusă de* d *pe* Y. O vom nota tot prin d.

Spaţiul metric (Y, d) se numeşte *subspaţiu al spaţiului metric* (X, d).

Exemplul 1.1.69. Fie $\mathbb{R}$ înzestrat cu metrica euclidiană d. $\mathbb{Q}$ înzestrat cu metrica $d(x, y) = |x - y|, \forall x, y \in \mathbb{Q}$, este subspaţiu al spaţiului metric $(\mathbb{R}, d)$.

În schimb, $\mathbb{Q}$ înzestrat cu metrica discretă d_0 nu este subspaţiu al spaţiului metric $(\mathbb{R}, d)$: În $\mathbb{Q}$, $S_{\tau_u}(0, \frac{1}{2}) = \mathbb{Q} \cap (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \neq S_{\tau_0}(0, \frac{1}{2}) = \{0\}$.

Observaţia 1.1.70. Dacă A este o submulţime a subspaţiului Y al lui (X, d), trebuie precizat când A este deschisă / închisă în raport cu Y sau în raport cu X. De altfel, Y însuşi este mulţime simultan deschisă şi închisă în Y, fără a avea neapărat aceleaşi proprietăţi în X. Dar orice mulţime din Y care este deschisă / închisă în X, este de asemenea deschisă / închisă în Y.

Fie $x_0 \in Y$. Notăm cu $S_X(x_0, r)$ (respectiv $S_Y(x_0, r)$) sfera deschisă de centru x_0 şi rază r în raport cu X (respectiv cu Y). Aceste două sfere nu sunt neapărat egale. În general, $S_Y(x_0, r) = S_X(x_0, r) \cap Y$.

Teorema 1.1.71. *Fie* $Y \subseteq X$ *un subspaţiu al spaţiului metric* (X, d). *Fie* $E \subset Y$. *Atunci* E *este deschisă (respectiv închisă) în* Y *dacă şi numai dacă există o mulţime deschisă (respectiv închisă)* A *în* X *aşa ca* $E = A \cap Y$.

Prin urmare, orice mulţime din Y, care este deschisă (respectiv închisă) în X, este de asemenea deschisă (respectiv închisă) în Y.

Teorema 1.1.72. *Fie* $Y \subset X$ *un subspaţiu al spaţiului metric* (X, d) *şi fie* $x \in Y$. *O mulţime* $W \subset Y$ *este vecinătate a lui* x *în* Y *dacă şi numai dacă există o vecinătate* V *a lui* x *în* X *aşa ca* $W = V \cap Y$.

Spaţii metrice compacte

Definiţia 1.1.73. Fie $\emptyset \neq A \subseteq (X,d)$ o mulţime arbitrară. O familie $\mathcal{U} = \{A_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{P}(X)$ se numeşte *acoperire* a mulţimii A dacă $A \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} A_i$.

Dacă $A \subseteq \bigcup\limits_{i\in J\subset I} A_i$, atunci $\widetilde{\mathcal{U}} = \{A_i\}_{i\in J}$ se numeşte *subacoperire* a mulţimii A.

Exemplul 1.1.74. Familia $\mathcal{U} = \{(\frac{2}{n},1)\}_{n\geq 3}$ acoperă $(0,1)$: $(0,1) \subseteq \bigcup\limits_{n=3}^{\infty}(\frac{2}{n},1)$ deoarece $\forall x \in (0,1), \exists n_0 \geq 3$ aşa ca $x \in (\frac{2}{n_0},1)$.

Familia $\widetilde{\mathcal{U}} = \{(\frac{1}{n},1)\}_{n\geq 4}$ constituie o subacoperire.

Definiţia 1.1.75. (i) Spaţiul metric (X,d) se numeşte *compact* dacă din orice acoperire a sa cu deschişi se poate extrage o subacoperire finită: $X = \bigcup\limits_{i\in I} D_i, D_i \in \tau, \forall i \in I \Rightarrow \exists i_1,\ldots,i_p \in I$ aşa încât $X = \bigcup\limits_{j=1}^{p} D_{i_j}$.

(ii) O mulţime $A \subseteq (X,d)$ se numeşte *compactă* dacă subspaţiul (A,d) este compact.

Propoziţia 1.1.76. *Orice submulţime finită a unui spaţiu metric este compactă.*

Observaţia 1.1.77. Mulţimea $(0,1)$ nu este compactă. Într-adevăr, dacă am presupune prin reducere la absurd că $(0,1)$ este compactă, deoarece $(0,1) \subset \bigcup\limits_{i=2}^{\infty}(\frac{1}{i},1)$, ar rezulta că $(0,1) \subset \bigcup\limits_{i=2}^{p}(\frac{1}{i},1) = (\frac{1}{2},1)$, contradicţie.

Teorema 1.1.78. *Orice submulţime compactă a unui spaţiu metric este mărginită şi închisă.*

Observaţia 1.1.79. Reciproca Teoremei 1.1.78 nu este adevărată. De exemplu, să considerăm $\mathbb{R}$ înzestrat cu metrica discretă. Atunci $\delta(\mathbb{R}) \leq 1 < \infty$, deci $\mathbb{R}$ este mărginită, dar $\mathbb{R}$ nu este compactă. Într-adevăr, dacă am presupune prin reducere la absurd că este compactă, întrucât $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{x\in\mathbb{R}} S(x,1)$, ar rezulta că $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{i=1}^{p} S(x_i,1) = \bigcup\limits_{i=1}^{p}\{x_i\}$, ceea ce este fals.

Teorema 1.1.80. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^p$. Atunci A este compactă dacă şi numai dacă A este mărginită şi închisă.*

Teorema 1.1.81. *Orice submulţime închisă a unui spaţiu metric compact este compactă.*

Corolarul 1.1.82. *Într-un spaţiu metric compact, mulţimile închise coincid cu mulţimile compacte (în mod analog, într-un spaţiu metric complet, mulţimile închise coincid cu cele complete).*

Definiţia 1.1.83. O familie $\mathcal{F} = \{F_i\}_{i\in I}$ are *proprietatea intersecţiei finite* dacă orice intersecţie finită de mulţimi din $\mathcal{F}$ este nevidă.

Teorema 1.1.84. *Fie (X, d) un spaţiu metric. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) (X, d) este compact;

(ii) $\forall\{F_i\}_{i\in I}$ o familie de mulţimi închise cu proprietatea intersecţiei finite, avem $\underset{i\in I}{\cap} F_i \neq \emptyset$.

Teorema 1.1.85. *Dacă (X, d_1) şi (Y, d_2) sunt spaţii metrice compacte, atunci spaţiul metric produs $(X\times Y, d), d(x, y) = \sqrt{d_1^2(x_1, y_1) + d_2^2(x_2, y_2)}, x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in X \times Y$, este compact.*

Observaţia 1.1.86. Rezultatul anterior are loc pentru un produs cartezian finit de p spaţii metrice.

Definiţia 1.1.87. Un *interval închis în* $\mathbb{R}^p$ este de forma $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_p, b_p]$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}, a_i \le b_i, \forall i = \overline{1, p}$.

Propoziţia 1.1.88. *Orice interval închis din $\mathbb{R}^p$ este mulţime compactă.*

Definiţia 1.1.89. O mulţime $A \subseteq (X, d)$ se numeşte *precompactă* (sau *total mărginită*) dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in A$ astfel încât $A \subseteq \overset{p}{\underset{i=1}{\cup}} S(x_i, \varepsilon)$.

Observaţia 1.1.90. (i) Noţiunea de compacitate are caracter topologic, iar noţiunea de precompacitate are caracter metric.

(ii) Orice submulţime a unei mulţimi precompacte este de asemenea precompactă.

(iii) Noţiunile de compacitate şi precompacitate permit reducerea unor consideraţii la cazul finit. Exprimă intuitiv faptul că spaţiile cu una din aceste proprietăţi este aproximativ finit.

Exemplul 1.1.91. Mulţimea termenilor unui şir Cauchy este precompactă. Într-adevăr, dacă $A = \{x_1, ..., x_n, ...\}$, deoarece $(x_n)_n$ este şir Cauchy, atunci $\forall\varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ aşa ca $\forall n \ge n_0$, avem $d(x_n, x_{n_0}) < \varepsilon$, deci $A \subset \overset{n_0}{\underset{i=1}{\cup}} S(x_i, \varepsilon)$.

Teorema 1.1.92. *Orice mulţime total mărginită este mărginită.*

Observaţia 1.1.93. Reciproca nu este adevărată. Există mulţimi mărginite care nu sunt total mărginite: Fie $A = \{\{0, 0, ..., 0, 1, 0, ..., 0, ...\} = e_i\}_{i\geq 1} \subset l^2$ (mulţimea tuturor acestor şiruri). Observăm că A este mărginită deoarece $\forall i, j \geq 1$, dacă $i = j$ atunci $d(e_i, e_j) = 0$, iar dacă $i \neq j$ atunci $d(e_i, e_j) = \sqrt{2}$, deci $\delta(A) = \sqrt{2} < \infty$.

A nu este precompactă. Într-adevăr, dacă am presupune prin reducere la absurd că este, atunci pentru $\varepsilon = \frac{1}{2}$, am avea $A = \{e_i\}_i \subset \bigcup\limits_{j=1}^{p} S(e_j, \frac{1}{2})$, deci $\forall k, l \geq 1, k \neq l, \exists j_k, j_k = \overline{1, p}$ astfel ca $d(e_k, e_{j_k}) < \frac{1}{2}$ şi $d(e_l, e_{j_l}) < \frac{1}{2}$. Prin urmare, $d(e_k, e_l) = \sqrt{2} < 1 + d(e_{j_k}, e_{j_l})$, deci $j_k \neq j_l$, ceea ce este fals.

Teorema 1.1.94. *Orice mulţime compactă este precompactă.*

Observaţia 1.1.95. Reciproca nu este adevărată. În $X = [0, 2] \subset \mathbb{R}$, mulţimea $A = \{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ este precompactă, dar nu este compactă deoarece nu este închisă.

Definiţia 1.1.96. O mulţime $A \subseteq (X, d)$ se numeşte *relativ compactă* dacă $\overline{A}$ este compactă.

Exemplul 1.1.97. $[0, 1), (0, 1), (0, 1]$ sunt relativ compacte.

Teorema 1.1.98. *Dacă $A \subset (X, d)$ este relativ compactă, atunci A este precompactă.*

Observaţia 1.1.99. Reciproca nu este adevărată: mulţimea $A = \{\frac{1}{n}\}_{n\geq 1} \subset X = (0, 1]$ este precompactă, dar nu este relativ compactă.

Teorema 1.1.100. *Fie (X, d) un spaţiu metric complet şi $A \subseteq (X, d)$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*
(i) A este relativ compactă;
(ii) A este precompactă.

Teorema 1.1.101. *Fie $A \subset \mathbb{R}^p$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*
(i) A este precompactă;
(ii) A este relativ compactă;
(iii) A este mărginită.

Observaţia 1.1.102. Mulţimile compacte coincid cu mulţimile mărginite şi închise nu doar în $\mathbb{R}^p$, ci, mai general, în orice spaţiu metric în care orice sferă închisă este compactă.

Definiţia 1.1.103. Spunem că:

(i) un spaţiu metric (X, d) este *secvenţial compact (compact prin şiruri)* dacă orice şir de puncte din X conţine un subşir convergent la un punct din X.

(ii) o mulţime $A \subset (X, d)$ este *secvenţial compactă (compactă prin şiruri)* dacă subspaţiul A al lui (X, d) este secvenţial compact.

Exemplul 1.1.104. I) Intervalul $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ este mulţime secvenţial compactă deoarece orice şir $(x_n)_n \subset [0, 1]$ este mărginit, deci conform lemei lui Cesaro admite un subşir convergent la un punct din $[0, 1]$ ($[0, 1]$ este închis).

II) Intervalul $(0, 1] \subset \mathbb{R}$ nu este mulţime secvenţial compactă.

Teorema 1.1.105. *O mulţime A dintr-un spaţiu metric (X, d) este compactă dacă şi numai dacă este secvenţial compactă.*

Teorema 1.1.106 (Hausdorff)**.** *O mulţime A dintr-un spaţiu metric (X, d) este compactă dacă şi numai dacă este precompactă şi completă (deci pentru o mulţime completă, noţiunile de compacitate şi precompacitate coincid).*

Observaţia 1.1.107. Din teorema anterioară, orice spaţiu compact este complet. Reciproca nu este adevărată: $(\mathbb{R}, d_u)$ este complet, dar nu este compact (nu este mărginit).

Teorema 1.1.108. *O mulţime A dintr-un spaţiu metric (X, d) este precompactă dacă şi numai dacă orice şir din A conţine un subşir Cauchy.*

Mulţimi conexe

Definiţia 1.1.109. Un *spaţiu metric* (X, d) este:

(i) *conex* dacă $\nexists D_1, D_2$ mulţimi deschise, nevide şi disjuncte astfel ca $X = D_1 \cup D_2$.

(ii) *neconex* sau *disconex* dacă nu este conex.

Teorema 1.1.110. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) (X, d) este spaţiu metric conex;

(ii) $\nexists F_1, F_2$ mulţimi închise, nevide şi disjuncte astfel ca $X = F_1 \cup F_2$;

(iii) Singura mulţime nevidă din X simultan deschisă şi închisă este X.

Definiţia 1.1.111. $A \subset (X, d)$ este *mulţime*:

(i) *conexă* dacă privită ca subspaţiu al lui X nu este conex, adică, $\nexists D_1, D_2$ mulţimi nevide deschise în X astfel încât $D_1 \cap A \neq \emptyset, D_2 \cap A \neq \emptyset, A \subset D_1 \cup D_2, D_1 \cap D_2 \cap A = \emptyset$.

(ii) *neconexă* sau *disconexă* dacă nu este conexă.

Intuitiv, o mulţime conexă este o mulţime formată dintr-o singură bucată. De exemplu, o mulţime formată din două puncte sau din două mulţimi disjuncte nu este conexă:

Exemplul 1.1.112. I) Presupunem că există $a, b \in X, a \neq b$. Atunci mulţimea $A = \{a, b\}$ nu este conexă, deoarece $\exists D_1 = c\{a\}, D_2 = c\{b\}$ multimi nevide deschise astfel ca $D_1 \cap A \neq \emptyset, D_2 \cap A \neq \emptyset, A \subset D_1 \cup D_2, D_1 \cap D_2 \cap A = \emptyset$.

II) Fie $A = (-1, 0) \cup (1, 2) \subset X = \mathbb{R}$. Atunci A este neconexă deoarece $\exists D_1 = (-1, 0), D_2 = (1, 2)$ multimi nevide deschise astfel ca $D_1 \cap A = (-1, 0) \neq \emptyset, D_2 \cap A = (1, 2) \neq \emptyset, A = D_1 \cup D_2, D_1 \cap D_2 \cap A = \emptyset$.

Teorema 1.1.113. *Dacă $(A_i)_{i \in I}$ este o familie oarecare de mulţimi conexe din (X, d), cu $\bigcap\limits_{i \in I} A_i \neq \emptyset$, atunci $A = \bigcup\limits_{i \in I} A_i$ este de asemenea conexă.*

Teorema 1.1.114. *Dacă $A \subset (X, d)$ este conexă, atunci $\forall B$, cu $A \subset B \subset \overline{A}$ este conexă (deci în particular, $\overline{A}$ este conexă).*

Teorema 1.1.115. *Dacă $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ este funcţie continuă pe X, iar $A \subset (X, d)$ este mulţime conexă, atunci $f(A)$ este de asemenea conexă.*

(orice funcţie continuă duce (transformă) mulţimi conexe dintr-un spaţiu metric tot în mulţimi conexe).

Definiţia 1.1.116. Spunem că o funcţie $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ are *proprietatea lui Darboux* pe X dacă transformă orice mulţime conexă din X într-o mulţime conexă din Y.

Corolarul 1.1.117. *Orice funcţie continuă are proprietatea lui Darboux.*

Teorema 1.1.118. *O mulţime nevidă din $\mathbb{R}$ este conexă dacă şi numai dacă este interval.*

Corolarul 1.1.119 (teorema valorilor intermediare)**.** *Dacă $f : (X, d_1) \to (\mathbb{R}, d_u)$ este funcţie continuă pe X, iar $A \subset (X, d)$ este mulţime conexă, atunci $f(A)$ este interval (adică $\forall a, b \in A$, cu $f(a) < f(b)$ şi $\forall \lambda \in (f(a), f(b))$, rezultă că $\lambda \in f(A)$, adică $\exists c \in A$, cu $f(c) = \lambda$).*

Corolarul 1.1.120. *O funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are proprietatea lui Darboux dacă şi numai dacă duce intervale în intervale.*

Corolarul 1.1.121. *Dacă $f : I_{interval} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este continuă pe I, atunci are proprietatea lui Darboux pe I, adică $\forall a, b \in I$, cu $f(a) < f(b)$ şi $\forall \lambda \in (f(a), f(b))$, $\exists c \in I$, cu $f(c) = \lambda$.*

Definiţia 1.1.122. (i) Un spaţiu (X, d) se numeşte *conex prin arce* dacă orice două elemente ale sale pot fi unite în mod continuu printr-un drum (arc) conţinut în X, adică,

$\forall x_1, x_2 \in X$, $\exists \varphi : [a, b] \subset \mathbb{R} \to X$ continuă pe $[a, b]$ astfel încât $\varphi(a) = x_1, \varphi(b) = x_2$ şi $\varphi(t) \in X, \forall t \in [a, b]$.

(ii) O mulţime $A \subset (X, d)$ se numeşte *conexă prin arce* dacă privită ca subspaţiu este conex.

Teorema 1.1.123. *Orice spaţiu metric conex prin arce* (X, d) *este conex.*

Teorema 1.1.124 (invarianţa conexiunii prin arce)**.** *Imaginea printr-o funcţie continuă a unei mulţimi conexe prin arce este de asemenea o mulţime conexă prin arce (altfel spus, funcţiile continue duc mulţimi conexe prin arce în mulţimi conexe prin arce).*

Definiţia 1.1.125. O mulţime $A \subset \mathbb{R}^p$ se numeşte *convexă* dacă orice două elemente din mulţimea A pot fi unite în mod continuu printr-un *segment închis* conţinut în A :

$$\forall x_1, x_2 \in A \Rightarrow [x_1, x_2] \subseteq A,$$

unde $[x_1, x_2] = \{x \in \mathbb{R}^k; x = (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2, \lambda \in [0, 1](\subset \mathbb{R})\}$.

Observaţia 1.1.126. *I) Evident, orice mulţime convexă este conexă prin arce, deci şi conexă.*

II) În particular, orice segment este mulţime convexă.

III) Există mulţimi conexe prin arce care nu sunt convexe, cum ar fi, de exemplu, cercurile din $\mathbb{R}^2$.

Propoziţia 1.1.127. *Orice sferă deschisă (sau închisă) din* $\mathbb{R}^k$ *este mulţime convexă.*

Propoziţia 1.1.128. *Orice paralelipiped închis* $P = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times ... \times [a_k, b_k]$ *este mulţime convexă.*

Observaţia 1.1.129. Imaginea printr-o funcţie continuă a unei mulţimi convexe poate să nu fie convexă, după cum se remarcă din următorul contraexemplu:

Funcţia continuă $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2, f(t) = (\cos t, \sin t), \forall t \in [0, \pi]$ duce mulţimea convexă $[0, \pi]$ într-un semicerc, care nu este mulţime convexă.

Teorema 1.1.130. *Orice submulţime nevidă, deschisă a lui* $\mathbb{R}^k$ *este conexă dacă şi numai dacă este conexă prin arce.*

1.2 Probleme rezolvate

1.2.1. Determinaţi domeniile de definiţie ale funcţiilor următoare şi figuraţi-le:

i) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\arcsin(\ln x)+2\sqrt{1-\ln^2 x}$;
ii) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, f(x,y)=\sqrt{(x^2+y^2-1)(4-x^2-y^2)}$;
iii) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, f(x,y)=\sqrt{y-x}$;
iv) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, f(x,y)=\sqrt{x^2-y^2}$;
v) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, f(x,y)=\arcsin\frac{x}{y^2}+\arcsin(1-y)$;
vi) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, f(x,y)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}$.

Soluţie 1.2.1. (i) $\begin{cases}\ln x>0\\ -1\le \ln x\le 1\\ 1-\ln^2 x\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>1\\ x\in[\frac{1}{e},e]\end{cases} \Leftrightarrow x\in(1,e]$, deci $D_f=(1,e]$.

ii) $(x^2+y^2-1)(4-x^2-y^2)\ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+y^2-1\ge 0\\ 4-x^2-y^2\ge 0\end{cases}$ sau $\begin{cases}x^2+y^2-1\le 0\\ 4-x^2-y^2\le 0\end{cases} \Leftrightarrow$ $1\le x^2+y^2\le 4$, deci $D_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; 1\le x^2+y^2\le 4\}$.

iii) $y-x\ge 0\Leftrightarrow y\ge x$, deci $D_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; y\ge x\}$.

iv) $x^2-y^2\ge 0\Leftrightarrow (x-y)(x+y)\ge 0\Leftrightarrow \begin{cases}x-y\ge 0\\ x+y\ge 0\end{cases}$ sau $\begin{cases}x-y\le 0\\ x+y\le 0\end{cases} \Leftrightarrow$ $-x\le y\le x$ sau $x\le y\le -x$, deci $D_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; -x\le y\le x\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; x\le y\le -x\}$.

v) $\begin{cases}-1\le\frac{x}{y^2}\le 1\\ -1\le 1-y\le 1\\ y\ne 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y\in(0,2]\\ -y^2\le x\le y^2\end{cases}$, deci $D_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; -y^2\le x\le y^2, y\in(0,2]\}$.

vi) $\begin{cases}1-x^2\ge 0\\ 1-x^2\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\in[-1,1]\\ y\in[-1,1]\end{cases}$, deci $D_f=[-1,1]X[-1,1]$.

1.2.2. Figuraţi următoarele mulţimi:

i) $A=\{(x,y); x^2+y^2<4, y\ne x+1\}$;
ii) $A=\{(x,y); 0<y<x+1\}$;
iii) $A=\{(x,y); x^2+y^2\le 4, x^2+\frac{1}{4}y^2\ge 1, x\ge 0\}$;
iv) $A=\{(x,y); 1\le xy\le 3, 1\le\frac{y}{x}\le 4, x>0\}$;
v) $A=\{(x,y); 1\le x\le e, 0\le y\le\ln x\}$;
vi) $A=\{(x,y); 0\le x\le 1, x^2\le y\le\sqrt{x}\}$;
vii) $A=\{(x,y); x^2+y^2\le 2, x\ge 0\}$;

viii) $A=\{(x,y); x^2+y^2\le 2, x\le y^2, x\ge -y^2, y\le 0\}$;
ix) $A=\{(x,y); 1\le x\le 2, 2-x\le y\le \sqrt{2x-x^2}\}$;
x) $A=\{(x,y); x^2+y\ge 1, x+y\le \sqrt{2}, x-y\le \sqrt{2}, x\ge \frac{1}{\sqrt{2}}\}$;
xi) $A=\{(x,y,z); x^2+y^2+z^2\le 1\}$;
xii) $A=\{(x_1,x_2); \max\{|x_1|,|x_2|\}<1\}$;
xiii) $A=\{(x_1,x_2); |x_1|+|x_2|<1\}$;
xiv) $A=\{(x,y); xy\ne 0, xy\ge -1\}$;
xv) $A=\{(x,y,z); x+y+z<1, x>0, y>0, z\ge 0\}$;
xvi) $A=\{(x,y,z); x+y+z<1\}$.

Soluţie 1.2.2. ————

1.2.3. Fie A o mulţime oarecare nevidă. Arătaţi următoarele:

1) Dacă T este un spaţiu liniar peste corpul K, atunci $\mathcal{F}(A,T)$ este de asemenea un spaţiu liniar peste K.

2) $\mathcal{M}(A)$ este un spaţiu liniar al lui $\mathcal{F}(A)$.

3) Dacă $\emptyset\ne A\subseteq\mathbb{R}$, atunci $C(A)$ şi $C^1(A)$ sunt subspaţii liniare ale lui $\mathcal{F}(A)$.

4) $\mathbb{R}^\infty$, c şi c_0 sunt subspaţii liniare ale lui s.

Soluţie 1.2.3. 1) Se verifică axiomele Definiţiei 1.1.1.

2) Se observă că dacă $f,g:A\to\mathbb{R}$ sunt mărginite, atunci şi funcţia $\alpha f+\beta g$ este mărginită, oricare ar fi $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Conform Teoremei 1.1.3, $\mathcal{M}(A)$ este subspaţiu liniar al lui $\mathcal{F}(A)$.

La punctele 3) şi 4) se procedează ca la 2).

1.2.4. Fie $x,y\in\mathbb{R}$, $x=(1,2,3), y=(-1,0,1)$. Calculaţi $d(x,y), \|x\|, \|y\|, <x,x>, <x,y>, <3x,-2y>, \|x+y\|$.

Soluţie 1.2.4. Calcul imediat folosind şi proprietăţile normei/produsului scalar.

1.2.5. Stabiliţi prin două metode identitatea paralelogramului: $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2)$. Interpretare geometrică.

Soluţie 1.2.5. *Metoda I.* Folosind faptul ca $\|x\|^2=<x,x>$, obţinem

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 &= <x+y,x+y>+<x-y,x-y>= \\
&= <x,x>+<y,x>+<x,y>+<y,y>+ \\
+ &< x,x>-<y,x>-<x,y>+<y,y>= \\
&= 2<x,x>+2<y,y>=2(\|x\|^2+\|y\|^2).
\end{aligned}$$

Metoda II. Prin calcul direct: dacă $x = (x_1, \ldots, x_k), y = (y_1, \ldots, y_k)$, atunci

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= (x_1+y_1)^2 + ... + (x_p+y_p)^2 + (x_1-y_1)^2 + ... + (x_p-y_p)^2 = \\ &= 2(x_1^2 + ... + x_p^2 + y_1^2 + ... + y_p^2) = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \end{aligned}$$

1.2.6. Fie $x, y \in \mathbb{R}^p$ oarecare. Verificaţi următoarele echivalenţe:
(i) $< x, y >= 0 \Leftrightarrow \|x+y\| = \|x-y\|$;
(ii) $< x, y >= 0 \Leftrightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$;
(iii) $< x+y, x-y >= 0 \Leftrightarrow \|x\| = \|y\|$;
(iv) $< x, y >= 0 \Leftrightarrow \|x+ty\| \geq \|x\|, \forall t \in \mathbb{R}$.

Soluţie 1.2.6. (i)

$$\begin{aligned} \|x+y\| &= \|x-y\| \Leftrightarrow \|x+y\|^2 = \|x-y\|^2 \Leftrightarrow < x+y, x+y >=< x-y, x-y > \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 < x, y >= \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2 < x, y > \Leftrightarrow < x, y >= 0. \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 \Leftrightarrow \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 < x, y >= \|x\|^2 + \|y\|^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow < x, y >= 0. \end{aligned}$$

(iii)

$$< x+y, x-y >= 0 \Leftrightarrow \|x\|^2 - \|y\|^2 = 0 \Leftrightarrow \|x\| = \|y\|.$$

(iv) $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \|x+ty\| &\geq \|x\| \Leftrightarrow \|x+ty\|^2 \geq \|x\|^2 \Leftrightarrow \|x\|^2 + t^2\|y\|^2 + 2t < x, y > \geq \|x\|^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow t^2\|y\|^2 + 2t < x, y > \geq 0 \Leftrightarrow \Delta' =< x, y >^2 \leq 0 \Leftrightarrow < x, y >= 0. \end{aligned}$$

1.2.7. Fie $x, y \in \mathbb{R}^p$. Arătaţi că $< x, y >= \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x-y\|^2)$.

Soluţie 1.2.7. Evident, $\forall x, y \in \mathbb{R}^p$, $\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x-y\|^2 = 2 < x, y >$, de unde concluzia.

1.2.8. Arătaţi că $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x-y\|, \forall x, y \in \mathbb{R}^p$.

Soluţie 1.2.8.

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^p, \|x\| = \|(x-y) + y\| \leq \|x-y\| + \|y\|,$$

de unde $\|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|$ (1).

Raţionând analog sau schimbând între ele rolurile lui x şi y, obţinem şi $\|y\| - \|x\| \leq \|x-y\|$ (2).

(1) şi (2) antrenează $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x-y\|, \forall x, y \in \mathbb{R}^p$.

1.2.9. Fie $e_i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^p$, unde cifra 1 este plasată pe locul $i, \forall i = \overline{1, p}$ ($e_1, e_2, \dots, e_p$ sunt versorii bazei canonice în $\mathbb{R}^p$). Arătaţi că:

(i) $x = \sum\limits_{i=1}^{p} < x, e_i > e_i, \forall x \in \mathbb{R}^p$;

(ii) $\|x\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{p} < x, e_i >^2, \forall x \in \mathbb{R}^p$ (egalitatea lui Parseval);

(iii) $< x, y >= \sum\limits_{i=1}^{p} < x, e_i >< y, e_i >, \forall x, y \in \mathbb{R}^p$.

Soluţie 1.2.9. (i) $\forall x \in \mathbb{R}^p$,

$$\begin{aligned} x &= (x_1, \dots, x_p) = x_1 \cdot (1, 0, \dots, 0) + x_2 \cdot (0, 1, 0, \dots, 0) + ... + x_p \cdot (0, \dots, 0, 1) = \\ &= \sum_{i=1}^{p} x_i e_i = \sum_{i=1}^{p} < x, e_i > e_i. \end{aligned}$$

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}^p$, $\|x\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{p} x_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{p} < x, e_i >^2$.

(iii) $\forall x, y \in \mathbb{R}^p, < x, y >= \sum\limits_{i=1}^{p} x_i y_i = \sum\limits_{i=1}^{p} < x, e_i > \cdot < y, e_i >$.

1.2.10. Arătaţi că $|d(x, y) - d(t, z)| \le d(x, t) + d(y, z), \forall x, y, z, t \in \mathbb{R}^p$ (inegalitatea patrulaterului). Interpretare geometrică.

Soluţie 1.2.10. $\forall x, y, z, t \in \mathbb{R}^p$, are loc $d(x, y) \le d(x, t) + d(t, z) + d(z, y)$, de unde $d(x, y) - d(t, z) \le d(x, t) + d(y, z)$ (1).

Procedând analog sau schimbând între ele rolurile lui x, y şi t, z, obţinem $d(t, z) - d(x, y) \le d(x, t) + d(y, z)$ (2).

Din (1) şi (2), rezultă $|d(x, y) - d(t, z)| \le d(x, t) + d(y, z), \forall x, y, z, t \in \mathbb{R}^p$.

1.2.11. Arătaţi că dacă $x \perp y$, atunci $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ (generalizarea la $\mathbb{R}^p$ a Teoremei lui Pitagora).

Soluţie 1.2.11. ———

1.2.12. Aflaţi interiorul, aderenţa, mulţimea derivată şi frontiera următoarelor mulţimi. Specificaţi pentru fiecare mulţime în parte dacă este deschisă, închisă, mărginită, compactă:

(i) $A = [a, b], (a, b), [a, b), (a, b]$;
(ii) $A = \mathbb{Q}, A = \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$;
(iii) $A = [2, 3) \cup \{4\} \cup (5, 7)$;
(iv) $A = (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}) \cap [0, 1); A = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$;

(v) $A = \{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}^*}$;
(vi) $A = \{(x,y); x^2 + y^2 \le 1\}$;
(vii) $A = \{(x,y); 0 < y < x+1\}$;
(viii) $A = \{(x,y); x^2 + y^2 \ge 3\}$;
(ix) $A = \{(x,y); x^2 + y^2 \le 4, x \ge 0\}$;
(x) $A = \{(x,y); x^2 + y^2 \le 2, x \ge y\}$;
(xi) $A = \{(x,y); 0 \le y \le x+1, x \le 2\}$;
(xii) $A = \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})\}_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Soluţie 1.2.12. (ii) $int\mathbb{Q} = \emptyset$: dacă presupunem prin reducere la absurd că $int\mathbb{Q} \neq 0$, rezultă că există $x_0 \in int\mathbb{Q}$, deci există $\varepsilon_0 > 0$ astfel încât $(x_0 - \varepsilon_0, x_0 + \varepsilon_0) \subset \mathbb{Q}$, ceea ce este absurd, întrucât orice interval conţine şi numere iraţionale.

Analog, $int(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) = \emptyset$: dacă presupunem prin reducere la absurd că $int(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \neq 0$, rezultă că există $x_0 \in int(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$, deci există $\varepsilon_0 > 0$ astfel încât $(x_0 - \varepsilon_0, x_0 + \varepsilon_0) \subset (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$, ceea ce este absurd, întrucât orice interval conţine şi numere raţionale.

$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$: evident, $\overline{\mathbb{Q}} \subseteq \mathbb{R}$ şi $\mathbb{R} \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$ (deoarece $\forall x_0 \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, (x_0 - \varepsilon_0, x_0 + \varepsilon_0) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$ - orice interval conţine numere raţionale).

$\overline{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$: evident, $\overline{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}} \subseteq \mathbb{R}$ şi $\mathbb{R} \subseteq \overline{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}}$ (deoarece $\forall x_0 \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, \forall \varepsilon > 0, (x_0 - \varepsilon_0, x_0 + \varepsilon_0) \cap (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \neq \emptyset$ - orice interval conţine numere iraţionale).

$\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$: evident, $\mathbb{Q}' \subseteq \mathbb{R}$ şi $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{Q}'$ (deoarece $\forall x_0 \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, (x_0 - \varepsilon_0, x_0 + \varepsilon_0)\backslash\{x_0\} \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$ - orice interval conţine numere raţionale).

$(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})' = \mathbb{R}$: evident, $(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})' \subseteq \mathbb{R}$ şi $\mathbb{R} \subseteq (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})'$ (deoarece $\forall x_0 \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, \forall \varepsilon > 0, (x_0 - \varepsilon_0, x_0 + \varepsilon_0)\backslash\{x_0\} \cap (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \neq \emptyset$ - orice interval conţine numere iraţionale).

$Fr\mathbb{Q} = \overline{\mathbb{Q}}\backslash int\mathbb{Q} = \mathbb{R}, Fr(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) = \overline{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}}\backslash int(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$.

(iii) Folosind definiţiile şi proprietăţile aderenţei şi mulţimii derivate, obţinem că $intA = (2,3) \cup (5,7), \overline{A} = [2,3] \cup \{4\} \cup [5,7], A' = [2,3] \cup [5,7]$, deci $FrA = \{2,3,4,5,7\}$.

$\overline{A} \neq A$, deci mulţimea nu este închisă (şi în consecinţă nici compactă). Este mărginită (de exemplu, $A \subset S(0,8) = (-8,8)$).

$intA \neq A$, deci mulţimea nu este deschisă.

(v) $A = \{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathbb{Q}$, deci $intA \subseteq int\mathbb{Q} = \emptyset$, de unde $intA = \emptyset$.

Folosind caracterizarea punctelor de acumulare cu ajutorul şirurilor, observăm că $A' = \{0\}$, ceea ce implică $\overline{A} = A \cup A' = \{\frac{1}{n}, 0\}_{n\in\mathbb{N}^*}$. Prin urmare, $FrA = \overline{A}\backslash intA = \{\frac{1}{n}, 0\}_{n\in\mathbb{N}^*}$.

$\overline{A} \neq A$, deci mulţimea nu este închisă (şi în consecinţă nici compactă). Este mărginită (de exemplu, $A \subset S(0,2) = (-2,2)$).

$intA \neq A$, deci mulţimea nu este deschisă.

(vi) Folosind definiţiile (sau caracterizarea cu ε) se observă că $intA = \{(x,y); x^2+y^2<1\}, \overline{A} = \{(x,y); x^2+y^2 \leq 1\}, A' = \{(x,y); x^2+y^2 \leq 1\}$. Rezultă că $FrA = \overline{A} \backslash intA = \{(x,y); x^2+y^2=1\}$.

$\overline{A} = A$, deci mulţimea A este închisă. Este mărginită (de exemplu, $A \subset S(0,2)$). Prin urmare, este compactă. Nu este deschisă ($A \neq intA$).

(vii) $intA = \{(x,y); 0 < y < x+1\}, \overline{A} = \{(x,y); 0 \leq y \leq x+1\}$, $A' = \{(x,y); 0 \leq y \leq x+1\}, FrA = \overline{A} \backslash intA = \{(x,y); y=0, x \in [-1,0]\} \cup \{(x,y); y = x+1, y > 0\}$.

$\overline{A} \neq A$, deci mulţimea A nu este închisă, deci nici compactă. Nu este mărginită (nu există nici o sferă care să o cuprindă). Este deschisă ($A = intA$).

(viii) $A = \{(x,y); x^2+y^2 \geq 3\}$;

(ix) $intA = \{(x,y); x^2+y^2<4, x>0\}, \overline{A} = \{(x,y); x^2+y^2 \leq 4, x \geq 0\}$, $A' = \{(x,y); x^2+y^2 \leq 4, x \geq 0\}, FrA = \overline{A} \backslash intA = \{(x,y); x^2+y^2=4, x > 0\} \cup \{(x,y); x=0, y \in (-2,2)\}$.

$\overline{A} \neq A$, deci mulţimea A nu este închisă, deci nici compactă. Este mărginită (de exemplu, $A \subset S(0,2)$). Nu este deschisă ($A \neq intA$).

(x) $intA = \{(x,y); x^2+y^2<2, x>y\}, \overline{A} = \{(x,y); x^2+y^2 \leq 2, x \geq y\}, A' = \{(x,y); x^2+y^2 \leq 2, x \geq y\}$

$\overline{A} \neq A$, deci mulţimea A nu este închisă, prin urmare nici compactă. Este mărginită (de exemplu, $A \subset S(0, \sqrt{2})$). Nu este deschisă ($A \neq intA$).

(xi) $A = \{(x,y); 0 \leq y \leq x+1, x \leq 2\}$.

(xii) Vom arăta că $intA = \emptyset$:

Metoda I. Folosim faptul că $int(AXB) = (intA)X(intB)$, de unde $intA \subseteq (int\mathbb{Q})X(int\mathbb{Q}) = \emptyset$, deci $intA = \emptyset$.

Metoda II. Presupunem prin reducere la absurd că $intA \neq \emptyset$, adică există $x_0 \in intA$, ceea ce înseamnă că există $\varepsilon_0 > 0$ aşa ca $S(x_0, \varepsilon) \subset A = \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})\}_n$. Prin urmare, $\forall y \in S(x_0, \varepsilon)$, rezultă că există $n_0 \in \mathbb{N}$ aşa ca $y = (\frac{1}{n_0}, \frac{1}{n_0})$, evident fals. Prin urmare, $intA = \emptyset$.

Folosind caracterizarea punctelor de acumulare cu ajutorul şirurilor, observăm că $A' = \{(0,0)\}$, ceea ce implică $\overline{A} = A \cup A' = \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}), (0,0)\}_{n \in \mathbb{N}^*}$. Prin urmare, $FrA = \overline{A} \backslash intA = \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}), (0,0)\}_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Mulţimea A nu este deschisă ($A \neq intA$), nici închisă ($A \neq \overline{A}$), deci nici compactă. Este mărginită ($A \subset S((0,0), 2)$.

1.2.13. Fie $A = (x_n)_n \subset \mathbb{R}^k, A \neq \emptyset$. Arătaţi că $\overset{\circ}{A} = \emptyset$.

Soluţie 1.2.13.

1.2.14. (i) Arătaţi că mulţimile $A_\varepsilon = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \max(|x|, |y|) < \varepsilon\}, \varepsilon > 0$ formează un sistem fundamental de vecinătăţi ale originii în $\mathbb{R}^2$.

(ii) Aceeaşi problemă pentru mulţimile $B_\varepsilon = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x| + |y| < \varepsilon\}, \varepsilon > 0$.

Soluţie 1.2.14. (i) Arătăm mai întâi că $\forall\varepsilon > 0, A_\varepsilon \in \mathcal{V}(0, 0)$, ceea ce este evident deoarece $\forall\varepsilon > 0, \exists r_\varepsilon = \varepsilon > 0$ astfel încât $S((0, 0), r_\varepsilon) \subset A_\varepsilon$ ($\sqrt{x^2 + y^2} < \varepsilon$ antrenează $\max(|x|, |y|) < \varepsilon$).

Arătăm acum că $\forall V \in \mathcal{V}(0, 0), \exists\varepsilon_V > 0$ aşa ca $A_{\varepsilon_V} \subset V$. Fie deci $V \in \mathcal{V}(0, 0)$ oarecare. Prin urmare, există $r_V > 0$ astfel încât $S((0, 0), r_V) \subset V$. Observăm că există $\varepsilon_V = \frac{r_V}{\sqrt{2}} > 0$ aşa ca $A_{\varepsilon_V} \subset S((0, 0), r_V) \subset V$ ($\max(|x|, |y|) < \frac{r_V}{\sqrt{2}}$ antrenează $\sqrt{x^2 + y^2} < r_V$).

(ii) Arătăm mai întâi că $\forall\varepsilon > 0, B_\varepsilon \in \mathcal{V}(0, 0)$, ceea ce este evident deoarece $\forall\varepsilon > 0, \exists r_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} > 0$ astfel încât $S((0, 0), r_\varepsilon) \subset A_\varepsilon$ ($\sqrt{x^2 + y^2} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ antrenează $(|x| + |y|)^2 \leq 2(x^2 + y^2) < \varepsilon^2$, deci $|x| + |y| < \varepsilon$).

Arătăm acum că $\forall V \in \mathcal{V}(0, 0), \exists\varepsilon_V > 0$ aşa ca $B_{\varepsilon_V} \subset V$. Fie deci $V \in \mathcal{V}(0, 0)$ oarecare. Prin urmare, există $r_V > 0$ astfel încât $S((0, 0), r_V) \subset V$. Observăm că există $\varepsilon_V = r_V > 0$ aşa ca $B_{\varepsilon_V} \subset S((0, 0), r_V) \subset V$ ($|x|+|y| < r_V$ antrenează $\sqrt{x^2 + y^2} \leq |x| + |y| < r_V$).

1.2.15. Arătaţi că în $\mathbb{R}^k$, $\overline{S(x_0, r)} = T(x_0, r)$.

Soluţie 1.2.15. Arătăm mai întâi că $\overline{S(x_0, r)} \subseteq T(x_0, r)$. Într-adevăr, fie $x \in \overline{S(x_0, r)}$ oarecare. Prin urmare, $\forall\varepsilon > 0, S(x, \varepsilon) \cap S(x_0, r) \neq \emptyset$, deci $\forall\varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon$ aşa ca $d(x_\varepsilon, x) < \varepsilon$ şi $d(x_\varepsilon, x_0) < r$, de unde $d(x_0, x) < r + \varepsilon, \forall\varepsilon > 0$. Aceasta implică $d(x_0, x) \leq r$, adică $x \in T(x_0, r)$.

Arătăm acum că $T(x_0, r) \subseteq \overline{S(x_0, r)}$. Pentru aceasta, fie $x \in T(x_0, r)$ oarecare. Vom arăta că $\forall\varepsilon > 0, S(x, \varepsilon) \cap S(x_0, r) \neq \emptyset$. Fie $y = \lambda x_0 + (1-\lambda)x$, cu $\lambda \in (0, \min\{1, \frac{\varepsilon}{r}\})$. Atunci

$$d(x, y) = \|x - y\| = |\lambda| \cdot \|x - x_0\| < \varepsilon,$$

deci $y \in S(x, \varepsilon)$ şi

$$d(x_0, y) = \|x_0 - y\| = |1 - \lambda| \cdot \|x - x_0\| \leq r(1 - \lambda) < r,$$

deci $y \in S(x_0, r)$. Prin urmare, într-adevăr, $\forall\varepsilon > 0, S(x, \varepsilon) \cap S(x_0, r) \neq \emptyset$, deci $\forall\varepsilon > 0, S(x, \varepsilon) \cap S(x_0, r) \neq \emptyset$, ceea ce spune că $x \in \overline{S(x_0, r)}$.

1.2.16. Fie $\alpha, \beta : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $\alpha(A) = \operatorname{int} \overline{A}$, $\beta(A) = \overline{\operatorname{int} A}$. Arătaţi că:

a) dacă A este deschisă, atunci $A \subset \alpha(A)$;

b) dacă A este închisă, atunci $\beta(A) \subset A$;

c) $\forall A \subset \mathbb{R}$, $\alpha(\alpha(A)) = \alpha(A)$ şi $\beta(\beta(A)) = \beta(A)$.

Daţi exemplu de mulţimi A pentru care mulţimile A, $\operatorname{int} A, \overline{A}, \alpha(A)$, $\beta(A), \alpha(\operatorname{int} A), \beta(\overline{A})$ sunt toate diferite între ele.

Soluţie 1.2.16. a) Dacă A este deschisă, atunci $\operatorname{int} A = A \subset \overline{A}$, deci $\operatorname{int} A \subset \operatorname{int} \overline{A} = \alpha(A)$.

b) Dacă A este închisă, atunci $A = \overline{A}$, deci $\beta(A) = \overline{\operatorname{int} A} \subset \operatorname{int} A \subset A$.

c) Deoarece $\alpha(A)$ este deschisă, $\alpha(A) \subset \alpha(\alpha(A))$. Dar $\overline{A}$ este închisă, deci $\beta(\overline{A}) \subset \overline{A}$, de unde rezultă $\operatorname{int}(\beta(\overline{A})) \subset \alpha(A)$, adică $\alpha(\alpha(A)) \subset \alpha(A)$. Are loc egalitatea. Pentru cealaltă egalitate se procedează analog.

Fie $A = [0, 1) \cup (1, 2] \cup \{3\} \cup [\mathbb{Q} \cap (4, 5)]$. Această mulţime verifică proprietăţile cerute.

1.2.17. Arataţi că $A \subset \mathbb{R}^p$ este deschisă dacă şi numai dacă $A \cap \operatorname{Fr} A = \emptyset$ iar A este închisă dacă şi numai dacă $\operatorname{Fr} A \subset A$.

Soluţie 1.2.17. Avem echivalenţele:

$A \cap \operatorname{Fr} A = \emptyset \Leftrightarrow A \cap (\overline{A} \backslash \overset{\circ}{A}) = \emptyset \Leftrightarrow A \cap (\overline{A} \cap (\mathbb{R}^p \backslash \overset{\circ}{A})) = \emptyset \Leftrightarrow (A \cap \overline{A}) \cap (\mathbb{R}^p \backslash \overset{\circ}{A}) = \emptyset \Leftrightarrow A \cap (\mathbb{R}^p \backslash \overset{\circ}{A}) = \emptyset \Leftrightarrow A \subset \overset{\circ}{A} \Leftrightarrow A$ deschisă

şi

A este închisă $\Leftrightarrow$ $\mathbb{R}^p \backslash A$ este deschisă $\Leftrightarrow$ $\mathbb{R}^p \backslash A \cap \operatorname{Fr}(\mathbb{R}^p \backslash A) = \emptyset \Leftrightarrow \operatorname{Fr}(\mathbb{R}^p \backslash A) \subset A \Leftrightarrow \operatorname{Fr} A \subset A$.

1.2.18. Fie $A \subset \mathbb{R}^p$, $B \subset \mathbb{R}^q$ submulţimi nevide. Arătaţi că $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$, $\operatorname{int}(A \times B) = \operatorname{int} A \times \operatorname{int} B$, $\operatorname{Fr}(A \times B) = (\operatorname{Fr} A \times \overline{B}) \cup (\overline{A} \times \operatorname{Fr} B)$, $(A \times B)' = (A' \times \overline{B}) \cup (\overline{A} \times B')$.

Soluţie 1.2.18. Arătăm că $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$. Demonstrăm dubla incluziune. Fie $(x, y) \in \overline{A \times B}, x \in \mathbb{R}^p, y \in \mathbb{R}^q$. Există un şir de puncte din $A \times B$, $(x_n, y_n) \to (x, y)$ cu $(x_n) \subset A$, $(y_n) \subset B$. Convergenţa în spaţiul produs este echivalentă cu convergenţa pe coordonate, deci $x_n \to x$ şi $y_n \to y$. Rezultă că $x \in \overline{A}$ şi $y \in \overline{B}$, deci $\overline{A \times B} \subset \overline{A} \times \overline{B}$. Pentru incluziunea inversă procedăm similar.

Fie $(x, y) \in \operatorname{int}(A \times B)$. Există $V \subset A \times B$, $V \in \mathcal{V}((x, y))$. Conform propoziţiei 4.6 există $V_1 \in \mathcal{V}(x), V_2 \in \mathcal{V}(y)$ astfel încât $V_1 \times V_2 \subset V \subset A \times B$, adică $V_1 \subset A$ şi $V_2 \subset B$. Deci $x \in \operatorname{int} A$ şi $y \in \operatorname{int} B$. Prin urmare $\operatorname{int}(A \times B) \subset \operatorname{int} A \times \operatorname{int} B$. Incluziunea inversă este imediată.

Fie A, B, C, D mulţimi arbitrare; se poate arăta prin dubla incluziune următoarea egalitate

$$(C \times D) \backslash (A \times B) = ((C \backslash A) \times D) \cup (C \times (D \backslash B)).$$

Obţinem

$$\begin{aligned}\operatorname{Fr}(A\times B) &= \overline{A\times B}\setminus \operatorname{int}(A\times B) = (\overline{A}\times\overline{B})\setminus(\operatorname{int}A\times\operatorname{int}B) = \\ &= ((\overline{A}\setminus\operatorname{int}A)\times\overline{B})\cup(\overline{A}\times(\overline{B}\setminus\operatorname{int}B)) = \\ &= (\operatorname{Fr}A\times\overline{B})\cup(\overline{A}\times\operatorname{Fr}B).\end{aligned}$$

Pentru ultima egalitate de demonstrat folosim tot un raţionament cu şiruri care reia, cu mici diferenţe, raţionamentul din cazul primei egalităţi demonstrate.

1.2.19. Fie $a\in\mathbb{R}$. Arătaţi că mulţimile de forma $(a-2\varepsilon, a+\varepsilon)$, $\varepsilon>0$ formează un sistem fundamental de vecinătăţi pentru punctul a. Aceeaşi problemă pentru mulţimile $(a-\frac{3}{n}, a+\frac{1}{n+1}), n\in\mathbb{N}^*$.

Soluţie 1.2.19. *Vom verifica cele două proprietăţi ale sistemelor fundamentale de vecinătăţi. Astfel pentru orice* $\varepsilon>0$, $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)\subset(a-2\varepsilon,a+\varepsilon)$ *şi prin urmare* $(a-2\varepsilon,a+\varepsilon)\in\mathcal{V}(a)$. *Fie acum* $V\in\mathcal{V}(a)$; *conform definiţiei, există* $\varepsilon>0$ *astfel încât* $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)\subset V$. *Atunci intervalul* $(a-\varepsilon,a+\frac{\varepsilon}{2})$ *are forma căutată şi este inclus în* V. *Prin urmare, familia* $(a-2\varepsilon,a+\varepsilon)$, $\varepsilon>0$ *formează un sistem fundamental de vecinătăţi pentru punctul* a.

Evident, $(a-\frac{1}{n+1},a+\frac{1}{n+1})\subset(a-\frac{3}{n},a+\frac{1}{n+1}),\forall n\in\mathbb{N}^*$, *deci* $(a-\frac{3}{n},a+\frac{1}{n+1})\in\mathcal{V}(a)$. *Fie* $V\in\mathcal{V}(a)$; *există* $\varepsilon>0$ *astfel încât* $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)\subset V$. *Căutăm un număr natural* n *astfel încât* $(a-\frac{3}{n},a+\frac{1}{n+1})\subset(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$. *Este de ajuns să găsim* n *cu proprietatea* $\frac{3}{n}\le\varepsilon$. *Un astfel de număr este* $n=[\frac{3}{\varepsilon}]+1$. *Obţinem concluzia.*

1.2.20. Să se arate că dacă $D\subset\mathbb{R}$ este o mulţime deschisă, iar $A\subset\mathbb{R}$ este o mulţime arbitrară, atunci mulţimea $A+D=\{a+d\mid a\in A, d\in D\}$ este deschisă.

Soluţie 1.2.20. Putem scrie $A+D=\bigcup\limits_{a\in A}(a+D)$ unde $a+D=\{a+d\mid d\in D\}$. Având în vedere că orice reuniune de mulţimi deschise este mulţime deschisă, este suficient să arătăm că $a+D$ este deschisă pentru orice $a\in A$. Fie $a+d\in a+D$ (i.e. $d\in D$). Cum D este deschisă, există $\varepsilon>0$ astfel încât $(d-\varepsilon,d+\varepsilon)\subset D$. Dar $a+(d-\varepsilon,d+\varepsilon)=(a+d-\varepsilon,a+d+\varepsilon)$; într-adevăr dacă $y\in a+(d-\varepsilon,d+\varepsilon)$, atunci $y-a\in(d-\varepsilon,d+\varepsilon)$, deci $|y-a-d|<\varepsilon$, adică $y\in(a+d-\varepsilon,a+d+\varepsilon)$. Invers, dacă $y\in(a+d-\varepsilon,a+d+\varepsilon)$, atunci $|y-a-d|<\varepsilon$, deci $y-a\in(d-\varepsilon,d+\varepsilon)$, adică $y\in a+(d-\varepsilon,d+\varepsilon)$. Cum $a+(d-\varepsilon,d+\varepsilon)\subset a+D$, obţinem că această mulţime este deschisă, adică ceea ce doream să arătăm.

1.2.21. Fie A, D două submulţimi ale lui $\mathbb{R}$. Să se arate că dacă D este deschisă, atunci $D \cap \overline{A} \subset \overline{D \cap A}$. Să se arate că ipoteza asupra submulţimii D este esenţială.

Soluţie 1.2.21. Fie $x \in D \cap \overline{A}$, adică $x \in D$ şi $x \in \overline{A}$. Fie $V \in \mathcal{V}(x)$. Atunci, cum D este deschisă, $D \in \mathcal{V}(x)$, deci $D \cap V \in \mathcal{V}(x)$. Prin urmare $A \cap (D \cap V) \neq \emptyset$, deci $(A \cap D) \cap V \neq \emptyset$. Cum vecinătatea V a fost aleasă arbitrar, obţinem $x \in \overline{D \cap A}$. Dacă D nu este deschisă incluziunea nu se păstrează. Fie de exemplu $D = (0, 1]$ şi $A = (1, 2)$. $D \cap \overline{A} = \{1\}$ şi $\overline{D \cap A} = \emptyset$.

1.2.22. Fie A, D două submulţimi ale lui $\mathbb{R}$. Să se arate că dacă D este deschisă, atunci $D \cap \overline{A} \neq \emptyset$ dacă şi numai dacă $D \cap A \neq \emptyset$. Să se arate că ipoteza asupra submulţimii D este esenţială.

Soluţie 1.2.22. Presupunem că $D \cap \overline{A} \neq \emptyset$, adică există $x \in D \cap \overline{A}$. Cum D este deschisă, $D \in \mathcal{V}(x)$ iar din $x \in \overline{A}$ obţinem $D \cap A \neq \emptyset$. Presupunem acum că $D \cap A \neq \emptyset$. Cum $D \cap A \subset D \cap \overline{A}$, rezultă că $D \cap \overline{A} \neq \emptyset$. Dacă D nu este deschisă proprietatea nu mai este adevărată. Putem considera acelaşi exemplu ca la exerciţiul precedent.

1.2.23. Dacă $A \subset (X, d)$ este o mulţime mărginită, atunci $\delta(A) = \delta(\overline{A})$.

Soluţie 1.2.23. Evident, $\delta(A) \leq \delta(\overline{A})$. Pentru inegalitatea inversă, fie $x, y \in \overline{A}$, oarecare. Atunci $\forall \varepsilon > 0, \exists z'_\varepsilon, z''_\varepsilon \in A$, încât $z'_\varepsilon \in S(x, \varepsilon)$ şi $z''_\varepsilon \in S(y, \varepsilon)$. Prin urmare, $\forall \varepsilon > 0$, $d(x, y) < 2\varepsilon + d(z'_\varepsilon, z''_\varepsilon) \leq 2\varepsilon + \delta(A)$, deci $\forall x, y \in \overline{A}$, avem $d(x, y) \leq \delta(A)$, de unde $\delta(\overline{A}) \leq \delta(A)$.

1.2.24. Fie (X, d) un spaţiu metric oarecare. Arătaţi că:

(i) orice reuniune finită de mulţimi compacte (respectiv, relativ compacte) este compactă (respectiv, relativ compactă);

(ii) orice intersecţie de mulţimi compacte (respectiv, relativ compacte) este compactă (respectiv, relativ compactă);

(iii) reuniunea dintre o mulţime compactă şi o mulţime finită este mulţime compactă;

(iv) diferenţa a două mulţimi relativ compacte este mulţime relativ compactă;

(v) interiorul unei mulţimi relativ compacte este mulţime relativ compactă;

(vi) frontiera unei mulţimi compacte (respectiv, relativ compactă) este compactă (respectiv, relativ compactă).

Soluţie 1.2.24. —

1.2.25. Fie (X, d_0). Arătaţi că A este compactă dacă şi numai dacă este finită. Ce relaţie este în spaţii metrice discrete între clasa mulţimilor compacte şi clasa mulţimilor mărginite şi închise?

Soluţie 1.2.25. —

1.2.26. Arătaţi că dacă $(x_n)_n \subset (X, d)$, $x_n \to x$, atunci mulţimea termenilor şirului poate să nu fie compactă, dar mulţimea $A = \{x_n\} \cup \{x\}$ este întotdeauna compactă.

Soluţie 1.2.26. —

1.2.27. Arătaţi că orice mulţime finită dintr-un spaţiu metric este precompactă.

Soluţie 1.2.27. —

1.2.28. Arătaţi că orice mulţime dintr-un spaţiu metric discret este precompactă dacă şi numai dacă este finită.

Soluţie 1.2.28. —

1.2.29. Arătaţi că o reuniune infinită de mulţimi compacte nu este neapărat compactă.

Soluţie 1.2.29. —

1.2.30. Arătaţi că mulţimea $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ este precompactă în $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, dar nu este compactă.

Soluţie 1.2.30. —

1.2.31. Fie $A \subset \mathbb{R}^p$, $B \subset \mathbb{R}^q$ mulţimi compacte, nevide şi $D \subset \mathbb{R}^{p+q}$ deschisă astfel încât $A \times B \subset D$. Arătaţi că există $D_1 \subset \mathbb{R}^p$, $D_2 \subset \mathbb{R}^q$ deschise astfel încât $A \times B \subset D_1 \times D_2 \subset D$.

Soluţie 1.2.31. Fie $x \in A$ fixat; pentru orice $y \in B$, $D \in \mathcal{V}((x, y))$, deci (propoziţia 4.6) există $U_y \in \mathcal{V}(x), V_y \in \mathcal{V}(y)$ astfel încât $U_y \times V_y \subset D$. Familia de mulţimi $(V_y)_{y \in B}$ formează o acoperire deschisă a mulţimii B care este compactă. Putem extrage o subacoperire finită: există $n \in \mathbb{N}^*$ şi $y_1, y_2, ..., y_n$ astfel încât $B \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} V_{y_i}$. Fie $E_x = \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_{y_i}$. E_x este mulţime deschisă care conţine pe x şi $\{x\} \times B \subset E_x \times F_x \subset D$, unde am notat $F_x = \bigcup\limits_{i=1}^{n} V_{y_1}$. Mulţimile $(E_x)_{x \in A}$ formează o acoperire deschisă a mulţimii

A care este compactă. Putem extrage o subacoperire finită: există $m \in \mathbb{N}^*$ şi $x_1, x_2, ..., x_m$ astfel încât $A \subset \bigcup_{j=1}^{m} E_{x_j}$ Fie $D_1 = \bigcup_{j=1}^{m} E_{x_j}$ şi $D_2 = \bigcap_{j=1}^{m} F_{x_j}$. Mulţimile D_1 şi D_2 sunt deschise şi $A \times B \subset D_1 \times D_2 \subset A \times B$.

1.2.32. Fie A o submulţime convexă a lui $\mathbb{R}^p$ cu interiorul nevid. Să se arate ca $\operatorname{int} A$ este mulţime convexă şi $\overline{\operatorname{int} A} = \overline{A}$.

Soluţie 1.2.32. Fie $a, b \in \operatorname{int} A$, $\alpha \in [0,1]$ şi $x = \alpha a + (1-\alpha)b$. Există $\varepsilon > 0$ astfel încât $B(a, \varepsilon) \subset A$. Arătăm că $B(x, \alpha\varepsilon) \subset A$. Fie $y \in B(x, \alpha\varepsilon)$, adică $\|y - x\| \leq \alpha\varepsilon$; deci $\|y - \alpha a - (1-\alpha)b\| \leq \alpha\varepsilon$. Prin urmare $\left\|\alpha^{-1}(y - (1-\alpha)b) - a\right\| \leq \varepsilon$, deci $\alpha^{-1}(y - (1-\alpha)b) \in B(a, \varepsilon) \subset A$. Există $u \in B(a, \varepsilon)$ astfel încât $\alpha^{-1}(y - (1-\alpha)b) = u$, adică $y = \alpha u + (1-\alpha)b \in A$. Am demonstrat că $B(x, \alpha\varepsilon) \subset A$, deci $x \in \operatorname{int} A$ care este o mulţime convexă. În demostraţie am folosit doar că $b \in A$.

Incluziunea $\overline{\operatorname{int} A} \subset \overline{A}$ este evidentă. Fie $x \in \overline{A}$. Există $(x_n) \subset A$, $x_n \to x$. Fie $u \in \operatorname{int} A$ (am presupus că $\operatorname{int} A$ este nevid). Ca mai sus rezultă că $\frac{1}{n}u + (1 - \frac{1}{n})x_n \in \operatorname{int} A$. Trecând la limită pentru $n \to \infty$, obţinem $x \in \overline{\operatorname{int} A}$.

1.3 Probleme propuse

1.3.1. Fie $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$. Arătaţi că:

1) $C^n(A)$, $n \in \mathbb{N}^*$, $C^\infty(A)$ sunt subspaţii liniare ale lui $\mathcal{F}(A)$.

2) $C^\infty(A) \subsetneq C^{n+1}(A) \subsetneq C^n(A) \subsetneq \ldots \subsetneq C^1(A) \subsetneq C(A) \subsetneq \mathcal{F}(A)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ şi incluziunile sunt stricte.

3) Dacă A este compactă, atunci $C(A) \subsetneq M(A)$ şi incluziunea este strictă.

4) m şi l^p, $p \in [1, +\infty)$, sunt subspaţii liniare ale lui s.

5) $\mathbb{R}^\infty \subsetneq l^p \subsetneq l^q \subsetneq l^1 \subsetneq c_0 \subsetneq c \subsetneq m \subsetneq s$, pentru orice $p, q \in [1, +\infty)$, $p > q$ şi incluziunile sunt stricte.

1.3.2. Determinaţi toate normele pe $\mathbb{R}$.

1.3.3. Arătaţi că există spaţii metrice în care are loc una dintre următoarele situaţii:

(i) orice sferă deschisă este mulţime închisă.

(ii) nici o sferă deschisă nu este mulţime închisă.

1.3.4. Arătaţi că mulţimile $A_\varepsilon = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \max(|x|,|y|) < \varepsilon\}, \varepsilon > 0$ formează un sistem fundamental de vecinătăţi ale originii în $\mathbb{R}^2$.
Aceeaşi problemă pentru mulţimile $B_\varepsilon = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; |x| + |y| < \varepsilon\}, \varepsilon > 0$.

1.3.5. Fie $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, d(x, y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$. Arătaţi că d este o metrică pe $\mathbb{R}$ care nu provine dintr-o normă.

1.3.6. Fie (X, d) un spaţiu metric. Arătaţi că $d_1 : X \times X \to \mathbb{R}_+, d_1(x, y) = \ln(1 + d(x, y)), \forall x, y \in X$, este o metrică pe X.

1.3.7. Fie $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, d(x, y) = |arctgx - arctgy|, \forall x, y \in \mathbb{R}$. Arătaţi că:

(i) d este metrică pe $\mathbb{R}$;

(ii) $d(n + p, n) < \frac{1}{n}, \forall n, p \in \mathbb{N}^*$.

1.3.8. Fie $(X, ||\cdot||)$ un spaţiu normat. Arătaţi că $T(x', r') \subseteq T(x, r) \Leftrightarrow ||x - x'|| \leq r - r'$. Este adevărată afirmaţia în cazul spaţiilor metrice arbitrare?

1.3.9. Fie $X = \mathcal{C}^1([a, b]) = \{f : [a, b] \to \mathbb{R}, f, f'$ continue pe $[a, b]\}$. Arătaţi că $d : X \times X \to \mathbb{R}_+, d(f, g) = \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)| + \max\limits_{x\in[a,b]} |f'(x) - g'(x)|, \forall f, g \in X$, este o metrică pe X.

1.3.10. Calculaţi distanţa în $\mathcal{C}^1([a, b])$ pentru $f(x) = x^2, g(x) = x^3, x \in [0, 1]$.

1.3.11. Este aplicaţia $|| \cdot || : X \to \mathbb{R}_+, ||f|| = \sup\limits_{t\in[0,1]} |f(t) + f'(t)|$ o normă pe X, unde $X = \mathcal{C}^1([0, 1])$?

1.3.12. Calculaţi distanţa în l^∞ dintre şirurile $x = (x_n = \frac{1}{n})_{n\geq1}$ şi $y = (y_n = \frac{1+(-1)^{n+1}}{n})_{n\geq1}$.

1.3.13. Fie l^p $(p \geq 1)$ mulţimea şirurilor $x = (x_n)_{n\geq1}$ cu proprietatea că $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$. Arătaţi că $|| \cdot ||_p : l^p \to \mathbb{R}_+, ||x||_p = (\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}, \forall x = (x_n)_{n\geq1} \in l^p$, este o normă pe l^p.

1.3.14. Fie l^∞, spaţiul şirurilor mărginite. Arătaţi că aplicaţia $|| \cdot ||_\infty : l^\infty \to \mathbb{R}_+, ||x||_p = \sup\limits_{n} |x_n|, \forall x = (x_n)_{n\geq1} \in l^\infty$, este o normă pe l^∞.

1.3.15. Fie $X = \mathcal{C}([a, b]) = \{f : [a, b] \to \mathbb{R}, f$ continuă pe $[a, b]\}$. Arătaţi că aplicaţia $|| \cdot || : \mathcal{C}([a, b]) \to \mathbb{R}_+, ||f|| = \sqrt{\int\limits_a^b f^2(x)dx}$ este o normă pe $\mathcal{C}([a, b])$.

1.3.16. Fie (X, d) un spaţiu metric şi $A \subset (X, d)$. Arătaţi că A este închisă dacă şi numai dacă $A' \subseteq A$.

1.3.17. Arătaţi că în spaţiul metric discret există $r > 0$ aşa ca $\overline{S(x,r)} \neq T(x,r)$.

1.3.18. Fie $(\mathbb{R}, d_0)$, d_0 metrica discretă. Aflaţi $\overline{A}$ pentru $A = (0,1)$ în topologia discretă τ_0. Comparaţi cu $\overline{A}$ în topologia uzuală τ_u.

1.3.19. Fie (X,d) un spaţiu metric şi $A \subset X$. Definim funcţia $d(x,A) = \inf\limits_{y \in A} d(x,y), \forall x \in X$ (distanţa de la punctul x la mulţimea A). Arătaţi că:

(i) $|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y), \forall x, y \in X$;

(ii) $d(x,A) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{A}$ (deci $\overline{A} = \{x \in X; d(x,A) = 0\}$).

1.3.20. Fie $A \subset (X,d), A \neq \emptyset$. Arătaţi că:

(i) A este deschisă $\Leftrightarrow A \cap FrA = \emptyset$.

(ii) A este închisă $\Leftrightarrow FrA \subseteq A$.

1.3.21. Fie $A \subset (X,d), A \neq \emptyset$. Arătaţi că mulţimea A' este închisă.

1.3.22. Fie $A \subset (X,d), A \neq \emptyset, S(A,r) = \{x \in X; d(x,A) < r\}, T(A,r) = \{x \in X; d(x,A) \leq r\}, r > 0$. Arătaţi că $\overline{A} = \bigcap\limits_{r>0} S(A,r)$.

1.3.23. Arătaţi că într-un spaţiu metric au loc:

(i) orice mulţime închisă este G_δ (intersecţie numărabilă de mulţimi deschise);

(ii) orice mulţime deschisă este F_σ(reuniune numărabilă de mulţimi închise).

1.3.24. Arătaţi că dacă $A, D \subset (X, ||\cdot||)$ şi mulţimea D este deschisă, atunci şi mulţimea $A + D = \{a + d; a \in A, d \in D\}$ (suma mulţimilor A şi D) este deschisă.

1.3.25. Fie $A, D \subset (X, ||\cdot||)$. Arătaţi că dacă mulţimea D este deschisă, atunci $D + A = D + \overline{A}$. Arătaţi că ipoteza asupra mulţimii D este esenţială.

1.3.26. Fie $X = \mathcal{C}([a,b])$. Arătaţi că $d : X \times X \to \mathbb{R}_+, d(f,g) = \max\limits_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|, \forall f, g \in X$, este o metrică pe X. Calculaţi $d(f,g)$ pentru $f(x) = x, g(x) = \ln x, x \in [\frac{1}{e}, e]$.

1.3.27. Calculaţi distanţa în l^2 dintre şirurile $x = (x_n = \frac{1}{n})_{n \geq 1}$ şi $y = (y_n = \frac{1}{n(n+1)})_{n \geq 1}$.

1.3.28. Fie $A \subset (X,d)$. Arătaţi că dacă A este compactă, atunci A' este compactă.

1.3.29. Cercetaţi dacă un spaţiu liniar normat $X \neq \{0\}$ poate fi compact.

1.3.30. Fie $\emptyset \neq A,\ B \subseteq (X, \|\cdot\|)$ şi $A + B = \{a + b | a \in A, b \in B\}$. Araătaţi că:

(i) Dacă A şi B sunt închise şi cel puţin una din ele este compactă, atunci $A + B$ este închisă.

(ii) Dacă A şi B sunt închise, $A + B$ este închisă?

(iii) Dacă A şi B sunt compacte, atunci $A + B$ este compactă.

Soluţii

$\boxed{\textbf{1.3.1.}}$ ———-

$\boxed{\textbf{1.3.2.}}$ $||\cdot|| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, f(x) = ||x||, \forall x \in \mathbb{R}$.

Trebuie să avem $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||, \forall x \in \mathbb{R}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$, deci $f(\lambda x) = |\lambda| f(x), \forall x \in \mathbb{R}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Pentru $x = 1$, avem $f(\lambda) = |\lambda| f(1), \forall \lambda \in \mathbb{R}$, ceea ce înseamnă că $f(x) = |x| f(1), \forall x \in \mathbb{R}$.

Trebuie îndeplinită şi condiţia $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, de unde $f(1) \geq 0$.

Mai mult, $f(x) = |x| f(1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, deci $f(1) > 0$.

Prin urmare, $f(x) = |x| f(1), \forall x \in \mathbb{R}$, cu $f(1) > 0$, şi se verifică inegalitatea triunghiulară.

$\boxed{\textbf{1.3.3.}}$ (i) Fie (X, d_0). Atunci $S(x_0, r) = \begin{cases} \{x_0\}, & 0 < r \leq 1 \\ X, & r > 1 \end{cases}$, care sunt mulţimi închise.

(ii) Fie $(\mathbb{R}, d_u)$. Atunci $S(x_0, r) = (x_0 - r, x_0 + r)$ nu este mulţime închisă, deoarece $c(x_0 - r, x_0 + r)$ nu este deschisă.

$\boxed{\textbf{1.3.4.}}$ ———-

$\boxed{\textbf{1.3.5.}}$ ———-

$\boxed{\textbf{1.3.6.}}$ d este bine definită. Apoi,

$d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in X$ şi $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

$d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X$;

Deoarece $1 + d(x, z) \leq 1 + d(x, y) + d(y, z) \leq [1 + d(x, y)][1 + d(y, z)]$, obţinem că $\ln(1 + d(x, z)) \leq \ln(1 + d(x, y)) + \ln(1 + d(y, z))$.

1.3.7. i) evident.

ii) Deoarece $arctgx \leq x, \forall x \geq 0$, cu egalitate dacă şi numai dacă $x = 0$, avem:

$$\begin{aligned} d(n, n+p) &= |arctg(n+p) - arctgn| = |arctg\frac{n+p-n}{1+n(n+p)}| = arctg\frac{p}{1+n(n+p)} < \\ &< \frac{p}{1+n(n+p)} < \frac{1}{n}, \forall n, p \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

1.3.8. ———-

1.3.9. Evident, $d(f, g) \geq 0, \forall f, g \in X$ şi $d(f, g) = 0 \Leftrightarrow f = g$ pe $[a, b]$;

$d(f, g) = d(g, f), \forall f, g \in X$;

Întrucât $\forall f, g, h \in X$,

$$\begin{aligned} &|f(x) - g(x)| + |f'(x) - g'(x)| \leq |f(x) - h(x)| + |f'(x) - h'(x)| + |h(x) - g(x)| + \\ &+ |h'(x) - g'(x)| \leq \\ &\leq \max_{x\in[a,b]}|f(x) - h(x)| + \max_{x\in[a,b]}|f'(x) - h'(x)| + \\ &+ \max_{x\in[a,b]}|h(x) - g(x)| + \max_{x\in[a,b]}|h'(x) - g'(x)| = \\ &= d(f, h) + d(h, g), \end{aligned}$$

considerând maximul expresiei din stânga, obţinem că $d(f, g) \leq d(f, h) + d(h, g), \forall f, g, h \in X$.

1.3.10. ———-

1.3.11. ———-

1.3.12. $d(x, y) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*}|x_n - y_n| = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n} = 1.$

1.3.13. ———-

1.3.14. Evident, aplicaţia $||\cdot||_\infty : l^\infty \to \mathbb{R}_+, ||x||_\infty = \sup\limits_n|x_n|, \forall x \in l^\infty$ este bine definită, iar condiţiile N_1 şi N_2 sunt satisfăcute.

$$N_3 : ||x + y||_\infty = \sup_n|x_n + y_n| \leq \sup_n|x_n| + \sup_n|y_n| = ||x||_\infty + ||y||_\infty,$$

$\forall x, y \in l^\infty$.

$\boxed{\textbf{1.3.15.}}$ ———-

$\boxed{\textbf{1.3.16.}}$ ———-

$\boxed{\textbf{1.3.17.}}$ ———-

$\boxed{\textbf{1.3.18.}}$ ———-

$\boxed{\textbf{1.3.19.}}$ $d(x, A) = \inf\limits_{y \in A}\{d(x, y)\} = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists y_\varepsilon \in A$ astfel ca $d(x, y_\varepsilon) < \varepsilon \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists y_\varepsilon \in A \cap S(x, \varepsilon) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, A \cap S(x, \varepsilon) \neq \emptyset \Leftrightarrow x \in \overline{A}$.

$\boxed{\textbf{1.3.20.}}$ ———-

$\boxed{\textbf{1.3.21.}}$ ———-

$\boxed{\textbf{1.3.22.}}$ ———-

$\boxed{\textbf{1.3.23.}}$ ———-

$\boxed{\textbf{1.3.24.}}$ ———-

$\boxed{\textbf{1.3.25.}}$ ———-

$\boxed{\textbf{1.3.26.}}$ $d(f, g) = \max\limits_{x \in [\frac{1}{e}, e]} |x - \ln x| = e - 1$:

Fie $h : (0, \infty) \to \mathbb{R}, h(x) = x - \ln x, \forall x > 0$.

x	$\frac{1}{e}$		1			e
$h'(x)$	$-$	$-$	0	$+$		$+$
$h(x)$	$\frac{1}{e} + 1$	$\searrow$	1	$\nearrow$		$e - 1 > \frac{1}{e} + 1$.

$\boxed{\textbf{1.3.27.}}$

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (x_n - y_n)^2} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n} - \frac{1}{n(n+1)})^2} =$$

$$= \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}} = \sqrt{\frac{\pi^2}{6} - 1}.$$

$\boxed{\textbf{1.3.28.}}$ ———-

$\boxed{\textbf{1.3.29.}}$ ———-

$\boxed{\textbf{1.3.30.}}$ ———-

Capitolul 2

Şiruri în spaţii metrice. Serii în spaţii normate

2.1 Consideraţii teoretice

Şiruri în spaţii metrice

Considerăm în cele ce urmează un spaţiu metric (X, d).

Definiţia 2.1.1. Se numeşte şir în X o funcţie $f : A \to X$, unde $A = \{n_0, n_0+1, n_0+2, \ldots\}$, $n_0 \in \mathbb{N}$. Dacă, pentru orice $n \in A$, notăm $f(n) = x_n$, atunci şirul se va nota prin $(x_n)_{n \geq n_0}$, $(x_n)_n$ sau simplu (x_n).

x_n se numeşte *termenul general al şirului.* Faptul că (x_n) este un şir din X se va nota prin $(x_n) \subset X$.

Observaţia 2.1.2. Fie şirul $(x_n)_{n \geq n_0} \subset \mathbb{R}^p$ $(p \in \mathbb{N}^*)$. Atunci, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, termenul general al şirului este de forma $x_n = (x_n^1, x_n^2, \ldots, x_n^p)$. Deci:
$x_1 = (x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^p)$,
$x_2 = (x_2^1, x_2^2, \ldots, x_2^p)$,
...,
$x_n = (x_n^1, x_n^2, \ldots, x_n^p)$,
....
$(x_n^i)_n \subset \mathbb{R}, i = \overline{1, p}$ se numesc *şirurile de coordonate ale şirului* (x_n).

Exemplul 2.1.3. Pentru şirul $(x_n)_n \subset \mathbb{R}^3, x_n = (\frac{\ln(n+2)}{\ln(n+1)}, n \sin \frac{1}{n}, \frac{\sin^3 n}{\ln n}), \forall n \geq 2$, şirurile de coordonate sunt (x_n^1), (x_n^2), (x_n^3), unde:

$$x_n^1 = \frac{\ln(n+2)}{\ln(n+1)}, \quad x_n^2 = n \sin \frac{1}{n}, \quad x_n^3 = \frac{\sin^3 n}{\ln n}, n \geq 2.$$

Pentru comoditate, vom nota uneori şirurile de coordonate prin (a_n), (b_n), $(c_n), \ldots, (y_n), (z_n), (t_n)$ etc.

Definiţia 2.1.4. Spunem că şirul $(x_n)_n \subset (X, d)$ este *mărginit* dacă mulţimea termenilor săi este mărginită.

Teorema 2.1.5 (caracterizarea mărginirii în $\mathbb{R}^p$))**.** *Un şir $(x_n)_n \subset \mathbb{R}^p$ este mărginit în $\mathbb{R}^p$ dacă şi numai dacă $(x_n^i)_n$ este mărginit în $\mathbb{R}, \forall i = \overline{1,p}$.*

Definiţia 2.1.6. (i) *(definiţia cu vecinătăţi)* Spunem că un şir $(x_n)_n \subset (X, d)$ *converge* (sau *este convergent*) la un element $a \in X$ dacă orice vecinătate a lui a conţine toţi termenii şirului de la un loc încolo, adică, $\forall V \in \mathcal{V}(a), \exists n_V \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n_V, x_n \in V$.

Notăm aceasta prin $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ sau $x_n \to a$.

(ii) Spunem că şirul $(x_n)_n \subset (X, d)$ *diverge* (sau *este divergent*) dacă nu este convergent.

Teorema 2.1.7 (de caracterizare)**.** *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ (definiţia cu vecinătăţi);

(ii) (definiţia cu sisteme fundamentale de vecinătăţi) $\forall U \in \mathcal{U}(a), \exists n_U \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n_U, x_n \in U$;

(iii) (definiţia cu sfere) $\forall S(a, \varepsilon), \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n_\varepsilon, x_n \in S(a, \varepsilon)$;

(iv) (definiţia analitică) $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n_\varepsilon, d(x_n, a) < \varepsilon$, adică, echivalent, $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, a) = 0$.

Exemplul 2.1.8. Orice şir constant este convergent.

Teorema 2.1.9. *Prin adăugarea sau eliminarea unui număr finit de termeni,*

(i) un şir convergent rămâne convergent la aceeaşi limită;

(ii) un şir divergent rămâne divergent.

Definiţia 2.1.10. Fie $(x_n)_n \subset (X, d)$. Un şir $(y_n)_n \subset (X, d)$ se numeşte *subşir al şirului* $(x_n)_n$ dacă există un şir strict crescător de numere naturale $(n_k)_k$ astfel încât $y_k = x_{n_k}, \forall k \in \mathbb{N}$.

Observaţia 2.1.11. $\forall k \in \mathbb{N}, n_k \geq k$.

În continuare vom trece în revistă câteva proprietăţi ale şirurilor convergente.

Teorema 2.1.12. *(unicitatea limitei) Limita oricărui şir convergent dintr-un spaţiu metric (X, d) este unică.*

Teorema 2.1.13. *Orice subşir* $(x_{n_k})_k$ *al unui şir convergent* $(x_n)_n$ *din* (X,d) *este convergent şi are aceeaşi limită ca* $(x_n)_n$.

Observaţia 2.1.14. Dacă un şir (x_n) are două subşiruri cu limite diferite, atunci (x_n) este divergent (nu are limită).

Teorema 2.1.15. *Orice şir convergent din* (X,d) *este mărginit.*

Observaţia 2.1.16. Reciproca Teoremei 2.1.15 nu este adevărată: există şiruri mărginite, care nu sunt convergente. Într-adevăr, fie şirul $(x_n) \subset (\mathbb{R}, |\cdot|)$, de termen general $x_n = (-1)^n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Atunci (x_n) este mărginit, dar nu este convergent, deoarece are două subşiruri cu limite diferite: $x_{2k+1} = -1$, $x_{2k} = 1$, $\forall k \in \mathbb{N}$ şi $\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k+1} = -1 \neq 1 = \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k}$.

Teorema 2.1.17. *Fie* $(x_n) \subset (X, \|\cdot\|)$. *Dacă* $x_n \xrightarrow{X} a$, *atunci* $\|x_n\| \xrightarrow{\mathbb{R}} \|a\|$.

Observaţia 2.1.18. Reciproca Teoremei 2.1.17 nu este adevărată. Astfel, în Problema 2.2.5, vom observa că există şiruri divergente, pentru care şirul normelor converge.

Teorema 2.1.19 (caracterizarea convergenţei în $\mathbb{R}^p$)**.** *Un şir* $(x_n)_n \subset \mathbb{R}^p$ *este convergent (în* $\mathbb{R}^p$*) la* $a = (a_1, a_2, \ldots, a_k) \in \mathbb{R}^p$ *dacă şi numai dacă* $x_n^i \to a_i$ *(în* $\mathbb{R}$*)*, $\forall i = \overline{1,p}$.

Exemplul 2.1.20. Şirul $(x_n)_n \subset \mathbb{R}^3$, de termen general $x_n = (\frac{\ln(n+2)}{\ln(n+1)}, n \sin\frac{1}{n}, \frac{\sin^3 n}{\ln n}), \forall n \geq 2$, este convergent în $\mathbb{R}^3$, având ca limită vectorul $(1,1,0)$.

Teorema 2.1.21 (Cesaro)**.** *Orice şir mărginit din* $\mathbb{R}^p$ *are subşiruri convergente.*

Deoarece, aşa cum s-a văzut, orice punct dintr-un spaţiu metric admite un sistem fundamental numărabil de vecinătăţi, vom da în cele ce urmează caracterizări cu ajutorul şirurilor, ale punctelor aderente, punctelor de acumulare, respectiv ale mulţimilor închise.

Teorema 2.1.22 (de caracterizare a punctelor aderente)**.** *Fie* $\emptyset \neq A \subseteq (X,d)$ *şi* $a \in X$. *Atunci* $a \in \overline{A}$ *dacă şi numai dacă există* $(x_n)_n \subset A$ *astfel încât* $x_n \to a$.

Teorema 2.1.23 (caracterizare a punctelor de acumulare)**.** *Fie* $\emptyset \neq A \subseteq (X,d)$ *şi* $a \in X$. *Atunci* $a \in A'$ *dacă şi numai dacă există* $(x_n)_n \subset A \backslash \{a\}$ *astfel încât* $x_n \to a$.

Teorema 2.1.24 (caracterizare a mulţimilor închise)**.** *Fie* $\emptyset \neq A \subseteq (X, d)$*. Atunci A este închisă dacă şi numai dacă oricare ar fi* $(x_n)_n \subset A$*, cu* $x_n \to A \in X$*, rezultă că* $a \in A$*.*

Serii în spaţii normate

Fie $(a_n)_{n \geq n_0}$ un şir de elemente dintr-un spaţiu normat $(X, \|\cdot\|)$. Construim *şirul sumelor parţiale* $(s_n)_{n \geq n_0}$: $s_{n_0} = a_{n_0}, s_{n_0+1} = a_{n_0+1} + a_{n_0+2}$, $s_{n_0+3} = a_{n_0+1} + a_{n_0+2} + a_{n_0+3}, \ldots, s_n = a_{n_0} + a_{n_0+1} + ... + a_n, ...$

Definiţia 2.1.25. Numim *serie* de termen general a_n, cuplul $((a_n)_n, (s_n)_n)$.

Se notează prin $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ sau $\sum\limits_{n \geq n_0} a_n$.

Definiţia 2.1.26. O *serie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ de elemente din $(X, \|\cdot\|)$ se spune că este *convergentă* (respectiv *divergentă*) dacă şirul $(s_n)_n$ al sumelor parţiale este convergent (respectiv divergent) în $(X, \|\cdot\|)$.

În caz de convergenţă, $s = \lim\limits_{n \to \infty} s_n$ se numeşte *suma seriei* şi se notează tot prin $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$.

Teorema 2.1.27 (caracterizarea de tip Cauchy)**.** *O serie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *de elemente din* $(X, \|\cdot\|)$ *este convergentă dacă şi numai dacă* $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *astfel încât* $\forall n \geq n_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}, \|a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{n+p}\| < \varepsilon$*.*

Teorema 2.1.28 (legătura cu seriile de coordonate)**.** *O serie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *de elemente din* $\mathbb{R}^p$ *este convergentă dacă şi numai dacă fiecare din cele p serii de coordonate este convergentă (în* $\mathbb{R}$*). În acest caz, suma seriei date este vectorul ale cărui componente sunt sumele seriilor de coordonate.*

Exemplul 2.1.29. Seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{n!}, \frac{1}{(n+1)(n+2)})$ din $\mathbb{R}^2$ este convergentă şi are ca sumă vectorul $(e, 1)$.

2.2 Probleme rezolvate

2.2.1. Stabiliţi dacă următoarele şiruri sunt convergente:
(i) $x_n = (\frac{\sin n}{n}, n \sin \frac{1}{n}, \sqrt[n]{n+1}) \in \mathbb{R}^3, \forall n \geq 2$;

(ii) $x_n = (\frac{1}{1^3+2} + \frac{1}{2^3+2} + ... + \frac{1}{n^3+2}, \frac{1}{2} + \frac{-1}{3} + ... + \frac{(-1)^{n+1}}{n}, (\frac{1}{-3})^n, n(\frac{1}{4})^n) \in \mathbb{R}^4, \forall n \geq 1$.

(iii) $x_n = (\sqrt[3]{n^2}(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n-1}), \frac{2^n+3^n}{3^n+4^n}) \in \mathbb{R}^2, \forall n \geq 1$.

Soluţie 2.2.1. (i) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(n+2)}{\ln(n+1)} = 1$ $(\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(x+2)}{\ln(x+1)} \overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x+2}}{\frac{1}{x+1}} = 1)$, deci şirul $(x_n^1)_n$ de termen general $x_n^1 = \frac{\ln(n+2)}{\ln(n+1)}$, este convergent la 1.

$\lim\limits_{n\to\infty} n \sin\frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$, deci şirul $(x_n^2)_n$ de termen general $x_n^2 = n\sin\frac{1}{n}$, este convergent la 1.

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin^3 n}{\ln n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sin^3 n \cdot \frac{1}{\ln n} = 0$ $(\sin^3 n \in (-1,1), \frac{1}{\ln n} \to 0)$, deci şirul $(x_n^3)_n$ de termen general $x_n^3 = \frac{\sin^3 n}{\ln n}$, este convergent la 0.

În consecinţă, şirul $(x_n)_n \subset \mathbb{R}^3$ este convergent şi are limita vectorul $(1,1,0)$.

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{n^2}(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n-1}) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[3]{(n+1)^2} + \sqrt[3]{n^2-1} + \sqrt[3]{(n-1)^2}} = \frac{2}{3}$,

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n+3^n}{3^n+4^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{4^n[(\frac{2}{4})^n + (\frac{3}{4})^n]}{(\frac{3}{4})^n+1} = 0$. Prin urmare, şirul $(x_n)_n \subset \mathbb{R}^2$ este convergent şi are limita vectorul $(\frac{2}{3}, 0)$.

2.2.2. Fie şirul $(x_n)_n \subset \mathbb{R}^3, x_n = ((1+\frac{1}{n})^n, \sqrt[n]{n}, \frac{1}{n}\sin n), \forall n \geq 2$. Determinaţi $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ să fie la distanţă minimă în $\mathbb{R}^3$ faţă de punctul $a = (1, e^{-\lambda}, \pi)$.

Soluţie 2.2.2. Evident, şirul $(x_n)_n \subset \mathbb{R}^3$ este convergent la $x = (e, 1, 0)$.

$d(x,a) = \sqrt{(e-1)^2 + (e^{-\lambda} - 1)^2 + \pi^2}$ este minimă dacă şi numai dacă $e^{-\lambda} - 1 = 0$, adică, echivalent, $\lambda = 0$.

2.2.3. Studiaţi convergenţa şi în caz afirmativ calculaţi limita şirului $(x_n)_n \subset \mathbb{R}^4, x_n = ((\cos\frac{a}{n^2})^{n^2}, \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}), \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}, n(2^{\arcsin\frac{\pi}{3n}} - 1)), \forall n \geq 2, a \in \mathbb{R}$ fiind arbitrar, fixat.

Soluţie 2.2.3.

$$\lim_{n\to\infty} (\cos\frac{a}{n^2})^{n^2} \overset{[1^\infty]}{=} \lim_{n\to\infty} [(1 + (\cos\frac{a}{n^2} - 1))^{\frac{1}{\cos\frac{a}{n^2} - 1}}]^{n^2 \cdot (\cos\frac{a}{n^2} - 1)} =$$
$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty} n^2 \cdot (\cos\frac{a}{n^2} - 1)} =$$
$$= e^{-\lim\limits_{n\to\infty} 2n^2 \sin^2\frac{a}{2n^2}} = e^{-(\frac{\sin\frac{a}{2n^2}}{\frac{a}{2n^2}})^2 \cdot \frac{a^2}{2n^2}} = 1,$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = 1$,

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} \overset{\text{crit. DĂlembert}}{=} \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}}=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e,$
$\lim\limits_{n\to\infty}n(2^{\arcsin\frac{\pi}{3n}}-1)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{\arcsin\frac{\pi}{3n}}-1}{\arcsin\frac{\pi}{3n}}\cdot\frac{\arcsin\frac{\pi}{3n}}{\frac{\pi}{3n}}\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}\ln 2,$
deci şirul $(x_n)_n\subset\mathbb{R}^4$ este convergent la vectorul $(1,e,\frac{\pi}{3}\ln 2)$.

2.2.4. Fie şirul $(x_n)_n\subset\mathbb{R}^2, x_n=(2n\sin\frac{1}{n},\frac{\ln n}{n}),\forall n\geq 2$. Arătaţi că sfera $S((0,0),1)\subset\mathbb{R}^2$ poate conţine doar un număr finit de termeni ai şirului.

Soluţie 2.2.4. $\lim\limits_{n\to\infty}2n\sin\frac{1}{n}=2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=2,\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0$ $(\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{\underset{l}{=}}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0)$, deci şirul $(x_n)_n\subset\mathbb{R}^2$ este convergent la $(2,0)$. Evident, există $\varepsilon_0>0$ astfel ca $S((0,0),1)\cap S((2,0),\varepsilon_0)=\emptyset$.

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=(2,0)$, există $n_0\in\mathbb{N}$ aşa ca $x_n\in S((2,0),\varepsilon_0),\forall n\geq n_0$. Prin urmare, sfera $S((0,0),1)$ poate conţine doar un număr finit de termeni ai şirului.

2.2.5. Fie şirul $(x_n)_n\subset\mathbb{R}^2, x_n=(\frac{1+(-1)^{n+1}}{2},\frac{1+(-1)^n}{2}),\forall n\geq 1$. Arătaţi că şirul este divergent, dar şirul $(\|x_n\|)_n$ este convergent.

Soluţie 2.2.5. $x^1_{2n}=0\to 0, x^1_{2n+1}=1\to 1$, deci şirul $(x^1_n)_n$ este divergent, ceea ce antrenează divergenţa şirului $(x_n)_n\subset\mathbb{R}^2$.

Pe de altă parte, oricare ar fi $n\geq 1$, $\|x_n\|=\sqrt{(\frac{1+(-1)^{n+1}}{2})^2+(\frac{1+(-1)^n}{2})^2}=\sqrt{2}\to\sqrt{2}$, deci şirul $(\|x_n\|)_n$ este convergent (ca şir constant).

Observaţie. Acest exerciţiu pune în evidenţă faptul că reciproca afirmaţiei conform căreia dacă un şir este convergent, atunci şi şirul normelor este convergent, este falsă.

2.2.6. Fie şirul $(x_n)_n\subset\mathbb{R}^3, x_n=((-1)^n\frac{n+1}{n+2},3^n(2^{\frac{1}{n}}-1),\cos\frac{n\pi}{2}),\forall n\geq 1$. Precizaţi dacă şirul este convergent. Studiaţi apoi mărginirea şirului.

Soluţie 2.2.6. $x^1_{2n}=1\to 1, x^1_{2n+1}=-1\to -1$, *deci şirul* $(x^1_n)_n$ *este divergent, ceea ce antrenează divergenţa şirului* $(x_n)_n\subset\mathbb{R}^3$.

$\lim\limits_{n\to\infty}3^n(2^{\frac{1}{n}}-1)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n}{n}\cdot\frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=\infty\cdot\ln 2=\infty$, *deci şirul* $(x^2_n)_n$ *nu este mărginit, ceea ce antrenează nemărginirea şirului* $(x_n)_n\subset\mathbb{R}^3$.

2.2.7. Fie mulţimea $A=\{(x,y);x^2+y^2\leq 9, y\geq x+1\}$. Arătaţi, cu ajutorul caracterizării cu şiruri, că mulţimea A este închisă. Este mulţimea $B=\{(x,y);x^2+y^2\leq 9,y>x+1\}$ închisă?

Soluţie 2.2.7. ———

2.2.8. [Teorema lui Cauchy-Bolzano] Arătaţi că orice mulţime mărginită şi infinită din $\mathbb{R}^p$ are cel puţin un punct de acumulare.

Soluţie 2.2.8. Deoarece mulţimea A este infinită, găsim un şir $(x_n)_n$ de elemente din A, toate distincte două câte două. În plus, şirul $(x_n)_n$ este mărginit (fiind conţinut în mulţimea mărginită A). Există atunci un subşir $(x_{n_k})_k$ al său care converge la un element $x \in \overline{A}$. În plus, întrucât toate elementele şirului sunt distincte între ele, există un subşir $(x_{n_{k_j}})_j$ cu proprietatea că $x_{n_{k_j}} \neq x, \forall j \in \mathbb{N}$. Prin urmare, există $(x_{n_{k_j}})_j \subset A \backslash \{x\}, x_{n_{k_j}} \to x$, de unde rezultă că $x \in A'$.

2.2.9. Fie $A \subset \mathbb{R}^p$ o mulţime oarecare nevidă. Arătaţi că un punct $x \in \overset{\circ}{A}$ dacă şi numai dacă $\forall (x_n)_n, x_n \to x, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n_0, x_n \in A$.

Deduceţi de aici că o mulţime nevidă D este deschisă dacă şi numai dacă $\forall x \in D$ şi $\forall (x_n)_n, x_n \to x, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n_0, x_n \in D$.

Soluţie 2.2.9. (i) Presupunem mai întâi că $x \in intA$. Prin urmare, $A \in \mathcal{V}(x)$. Fie $(x_n)_n \subset A, x_n \to x$, oarecare. Deoarece $A \in \mathcal{V}(x)$, conform definiţiei cu vecinătăţi a limitei unui şir, există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel ca $x_n \in A$, $\forall n \geq n_0$.

Reciproc, să presupunem că $\forall (x_n)_n, x_n \to x$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ astfel ca $x_n \in A$, $\forall n \geq n_0$. Să presupunem prin reducere la absurd că $x \notin intA$. Rezultă atunci că $\forall n \in \mathbb{N}^*, S(x, \frac{1}{n}) \nsubseteq A$. Prin urmare, există $(y_n)_n \subset S(x, \frac{1}{n})$ şi $y_n \notin A, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Deoarece $(y_n)_n \subset S(x, \frac{1}{n})$, avem $d(y_n, x) < \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$, de unde $y_n \to x$. Conform ipotezei, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ astfel ca $y_n \in A$, $\forall n \geq n_0$, ceea ce este fals. Prin urmare, $x \in intA$.

(ii) Afirmaţia este imediată ţinând seama de i) şi faptul că $D \in \tau$ dacă şi numai dacă $D \subseteq intD$.

2.2.10. Studiaţi natura seriilor următoare:

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n, (x_n)_n \subset \mathbb{R}^2, x_n = (\frac{(n!)^3 e^{3n}}{(3n)!}, \frac{\ln n}{n}), \forall n \geq 1.$

(ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n, (x_n)_n \subset \mathbb{R}^3, x_n = (\frac{\sin n}{n}, (-1)^n \frac{n+1}{2n^3+4}, \ln(1 + \frac{1}{n^2+1})), \forall n \geq 1.$

(iii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n, (x_n)_n \subset \mathbb{R}^2, x_n = (\frac{(2n)!}{(n!)^2 4^n}, \frac{\sqrt{n+1}(7n+5)}{\sqrt[3]{2n^2+4}(n\sqrt{n}+1)}), \forall n \geq 1.$

Soluţie 2.2.10. —————-

2.2.11. Fie (x_n) un şir de puncte din $\mathbb{R}$. Arătaţi că mulţimea punctelor limită ale şirului (x_n), definită (ca în Capitolul 2) prin

$$L((x_n)) = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \lim x_{n_k}, (x_{n_k}) \text{ subşir al lui } (x_n)\}$$

este închisă.

Soluţie 2.2.11. Fie $x \in \mathbb{R} \setminus L((x_n))$. Există $\varepsilon > 0$ astfel încât $B(x, \varepsilon)$ nu conţine nici un element al şirului (x_n). Arătăm că $B(x, \frac{\varepsilon}{2}) \subset \mathbb{R} \setminus L((x_n))$; din această incluziune rezultă că $\mathbb{R} \setminus L((x_n))$ este deschisă, deci $L((x_n))$ este închisă. Într-adevăr, dacă există $y \in B(x, \frac{\varepsilon}{2}) \cap L((x_n))$, atunci $B(y, \frac{\varepsilon}{2})$ ar conţine o infinitate de termeni ai şirului; cum $B(y, \frac{\varepsilon}{2}) \subset B(x, \varepsilon)$, aceasta reprezintă o contradicţie.

2.2.12. Fie $(x_n) \subset \mathbb{R}$ un şir şi $A_n = \{x_m \mid m \geq n\}$. Arătaţi că (x_n) este convergent dacă şi numai dacă $\operatorname{diam} A_n \to 0$.

Soluţie 2.2.12. Remarcăm că dacă $n \leq p$, atunci $A_p \subset A_n$, deci $\operatorname{diam} A_p \leq \operatorname{diam} A_n$.

Presupunem că (x_n) este convergent; atunci (x_n) este şir fundamental: pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, încât pentru orice $n, m \geq n_\varepsilon$, $|x_n - x_m| < \varepsilon$. Aceasta înseamnă că $\sup_{m,n \geq n_\varepsilon} |x_n - x_m| \leq \varepsilon$, adică $\operatorname{diam} A_{n_\varepsilon} \leq \varepsilon$. Cum pentru orice $n \geq n_\varepsilon$, $\operatorname{diam} A_n \leq \operatorname{diam} A_{n_\varepsilon} \leq \varepsilon$, rezultă că $\operatorname{diam} A_n \to 0$.

Invers, presupunem că $\operatorname{diam} A_n \to 0$. Pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, încât pentru orice $n \geq n_\varepsilon$, $\operatorname{diam} A_n < \varepsilon$, adică pentru orice $m, p \geq n_\varepsilon$, $|x_m - x_p| < \varepsilon$. Prin urmare şirul (x_n) este fundamental, deci convergent.

2.2.13. Fie A, D două submulţimi ale lui $\mathbb{R}$. Să se arate că dacă D este deschisă, atunci $D \cap \overline{A} \subset \overline{D \cap A}$. Să se arate că ipoteza asupra submulţimii D este esenţială.

Soluţie 2.2.13. Fie $x \in D \cap \overline{A}$, adică $x \in D$ şi $x \in \overline{A}$. Fie $V \in \mathcal{V}(x)$. Atunci, cum D este deschisă, $D \in \mathcal{V}(x)$, deci $D \cap V \in \mathcal{V}(x)$. Prin urmare, $A \cap (D \cap V) \neq \emptyset$, deci $(A \cap D) \cap V \neq \emptyset$. Cum vecinătatea V a fost aleasă arbitrar, obţinem $x \in \overline{D \cap A}$. Dacă D nu este deschisă, incluziunea nu se păstrează. Fie de exemplu $D = (0, 1]$ şi $A = (1, 2)$. $D \cap \overline{A} = \{1\}$ şi $\overline{D \cap A} = \emptyset$.

2.2.14. Fie A, B două submulţimi compacte ale lui $\mathbb{R}$. Să se arate că $A + B$ este compactă. Demonstraţi în trei moduri: cu definiţia, cu şiruri şi cu acoperiri deschise.

Soluţie 2.2.14. Demonstraţia este imediată.

2.2.15. Arătaţi că orice reuniune finită de mulţimi compacte este compactă şi orice intersecţie de mulţimi compacte este mulţime compactă. Este orice reuniune de mulţimi compacte o mulţime compactă?

Soluţie 2.2.15. Fie $A_1, A_2, ..., A_n$ mulţimi compacte şi $(x_n) \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$. Având în vedere că mulţimea termenilor şirului este numărabilă şi că avem un număr finit de mulţimi, există o mulţime A_i care să conţină un număr infinit de termeni ai şirului. Atunci (x_n) are un subşir inclus în A_i. Deoarece A_i este compactă, există un subşir al acestui subşir (deci un subşir al şirului (x_n)) convergent la un punct $x \in A_i \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$. Aşadar orice şir din $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ are un subşir convergent la un punct din $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$, adică $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ este compactă. O soluţie chiar mai simplă poate fi dată arătând că $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ este mărginită şi închisă. O reuniune arbitrară de mulţimi compacte nu este compactă: de exemplu, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [-n, n] = \mathbb{R}$. Fie acum $(A_i)_{i \in I}$ o familie arbitrară de mulţimi compacte. Evident $\bigcap\limits_{i \in I} A_i$ este închisă (intersecţie de mulţimi închise) şi mărginită (este inclusă în orice mulţime $A_i, i \in I$). Rezultă că $\bigcap\limits_{i \in I} A_i$ este compactă.

2.2.16. Fie $(x_n) \subset \mathbb{R}$ un şir convergent şi $A = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\lim x_n\}$. Să se arate că A este compactă.

Soluţie 2.2.16. Orice şir de elemente din A este convergent la $\lim x_n \in A$, deci A este compactă. Remarcăm că pentru un şir (x_n) convergent, mulţimea termenilor săi nu este neapărat compactă, nefiind închisă. De exemplu $x_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$.

2.2.17. Arătaţi că dacă $A \subset \mathbb{R}$ este mulţime mărginită, atunci $\overline{A}$ şi A' sunt compacte.

Soluţie 2.2.17. Dacă A este mărginită, există $M > 0$ astfel încât $A \subset D(0, M)$. Atunci $A' \subset \overline{A} \subset D(0, M)$ ($D(0, M)$ este mulţime închisă), deci A' şi $\overline{A}$ sunt mărginite. Evident $\overline{A}$ este închisă, deci este compactă. Fie $x \notin A'$. Dacă $x \in A$, atunci x este punct izolat al mulţimii A, deci există $\varepsilon > 0$ astfel încât $B(x, \varepsilon) \cap A = \{x\}$. Fie $y \in B(x, \frac{\varepsilon}{2})$. Cum $B(y, \frac{\varepsilon}{2}) \subset B(x, \varepsilon)$, rezultă că $B(y, \frac{\varepsilon}{2}) \cap A = \begin{cases} \emptyset, \text{ dacă } y \neq x \\ \{x\}, \text{ dacă } y = x \end{cases}$, adică $y \notin A'$. Dacă $x \notin A$, atunci există $\varepsilon > 0$ astfel încât $B(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset$. Fie $y \in B(x, \frac{\varepsilon}{2})$. Cum $B(y, \frac{\varepsilon}{2}) \subset B(x, \varepsilon)$, rezultă că $B(y, \frac{\varepsilon}{2}) \cap A = \emptyset$. Prin urmare, complementara lui A' este deschisă, deci A' este închisă. Obţinem că A' este compactă.

2.2.18. Fie $A, B \subset \mathbb{R}$ mulţimi nevide, disjuncte. Să se arate că dacă A este închisă şi B compactă, atunci $d(A, B) > 0$. Rămâne adevărată proprietatea dacă B este doar închisă?

Soluţie 2.2.18. Fie A, B mulţimi compacte nevide. Presupunem prin reducere la absurd că $\inf_{a\in A, b\in B} |a - b| = 0$. Din caracterizarea marginii inferioare, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, există $a_n \in A$, $b_n \in B$ astfel încât $|a_n - b_n| < \frac{1}{n}$, deci $a_n - b_n \to 0$. Deoarece B este compactă, şirul (b_n) admite un subşir $(b_{n_k})_k$ convergent la un punct $x \in B$. Atunci $(a_{n_k})_k \to x \in \overline{A}$. Cum A este închisă, rezultă că $x \in A$, adică $x \in A \cap B$, contradicţie.

Dacă mulţimile sunt închise, proprietatea nu se păstrează. De exemplu $A = \{\sqrt{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$ şi $B = \{\sqrt{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Mulţimile sunt închise şi nemărginite, iar $\inf_{a\in A, b\in B} |a - b| \leq (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \to 0$, deci $d(A, B) = 0$.

2.2.19. Arătaţi că pentru orice submulţime A a lui $\mathbb{R}$ există o submulţime B a lui $\mathbb{R}$ cel mult numărabilă astfel încât $B \subset A \subset \overline{B}$.

Soluţie 2.2.19. Dacă $A = \emptyset$, luăm $B = \emptyset$ şi proprietatea este verificată. Presupunem că $A \neq \emptyset$. Mulţimea numerelor raţionale este numărabilă şi o putem pune în forma $\mathbb{Q} = \{r_1, r_2, ..., r_n ...\}$. Evident $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. Fie mulţimile $B_{n,q} = B(r_n, q), q \in \mathbb{Q}^*$. Atunci $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*, q\in\mathbb{Q}} B_{n,q}$; evident,

$$A = A \cap \mathbb{R} = A \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*, q\in\mathbb{Q}} B_{n,q} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*, q\in\mathbb{Q}} (A \cap B_{n,q}).$$

Fie $I = \{(n, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Q} \mid A \cap B_{n,q} \neq \emptyset\}$; pentru fiecare $i \in I$, alegem $x_i \in A \cap B_{n,q}$ şi luăm $B = \{x_i \mid i \in I\}$. Evident, B este cel mult numărabilă şi $B \subset A$. Fie $a \in A$; cum $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $r_n \in \mathbb{Q}$ astfel încât $|a - r_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Fie $q \in \mathbb{Q}$ astfel încât $|a - r_n| < q < \frac{\varepsilon}{2}$. Rezultă că $a \in B_{n,q}$. Fie y elementul x_i din $A \cap B_{n,q}$; atunci $|a - y| \leq |a - r_n| + |r_n - y| < \varepsilon$. Rezultă că putem construi un şir de puncte din B cu limită a, adică $A \subset \overline{B}$.

2.2.20. Arătaţi că pentru orice mulţime închisă $A \subset \mathbb{R}$ există un şir de puncte (x_n) astfel încât $L((x_n)) = A$ (reciproca Problemei ...)

Soluţie 2.2.20. Folosind Problema 2.2.19, există o mulţime cel mult numărabilă B astfel încât $A = \overline{B}$. Putem exprima mulţimea B în forma $B = \{b_n \mid n = 1, 2, \ldots\}$. Fie şirul

$$(x_n) = (b_1, b_1, b_2, b_1, b_2, b_3, b_1, b_2, b_3, b_4, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, \ldots).$$

Pentru acest şir, mulţimea punctelor limită coincide cu A.

2.2.21. Să se arate că pentru orice submulţime a lui $\mathbb{R}$, mulţimea punctelor izolate este cel mult numărabilă.

Soluţie 2.2.21. Fie $A \subset \mathbb{R}$. Conform Problemei 2.2.19, există B astfel încât $B \subset A \subset \overline{B}$. Fie a un punct izolat al mulţimii A; atunci există $V \in \mathcal{V}(x)$ astfel încât $V \cap A = \{a\}$. Dar $x \in \overline{B}$, deci $B \cap V \neq \emptyset$. Dar $B \cap V \subset V \cap A = \{a\}$, ceea ce înseamnă că $a \in B$. Aşadar mulţimea punctelor izolate ale lui A este inclusă în B, deci este cel mult numărabilă.

2.2.22. Fie $A \subset \mathbb{R}$ nevidă, cel mult numărabilă. Să se arate că $(\mathbb{R} \setminus A)' = \mathbb{R}$.

Soluţie 2.2.22. Presupunem prin reducere la absurd că există $x \in \mathbb{R} \setminus (\mathbb{R} \setminus A)'$. Atunci există $\varepsilon > 0$ astfel încât $[B(x, \varepsilon) \setminus \{x\}] \cap (\mathbb{R} \setminus A) = \emptyset$, ceea ce înseamnă că $B(x, \varepsilon) \setminus \{x\} \subset A$. Cum $B(x, \varepsilon) \setminus \{x\}$ este nenumărabilă, am ajuns la o contradicţie.

2.2.23. Fie $A \subset \mathbb{R}$ nenumărabilă. Să se arate că $A' \neq \emptyset$.

Soluţie 2.2.23. Presupunem prin reducere la absurd ca $A' = \emptyset$. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ definim

$$A_n = \left\{ x \in A \mid d(x, A \setminus \{x\}) \geq \frac{1}{n} \right\}.$$

Arătăm că $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = A$: contrar, există $x \in A \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, adică pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $d(x, A \setminus \{x\} < \frac{1}{n}$, deci există $x_n \neq x$, $x_n \in A$, cu $|x_n - x| < \frac{1}{n}$. Aceasta implică faptul că $x_n \to x$, deci $x \in A'$, contradicţie. Fie acum $x \in A_n$. Atunci $B(x, \frac{1}{2n}) \cap A = \{x\}$, iar dacă $y \in A, y \neq x$, $B(x, \frac{1}{2n}) \cap B(y, \frac{1}{2n}) = \emptyset$. Cum $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ putem alege $q_x \in \mathbb{Q} \cap B(x, \frac{1}{2n})$. Dacă $x \neq y$, $q_x \neq q_y$. Definim funcţia injectivă $f_n : A_n \to \mathbb{Q}$, $f(x) = q_x$. Cum $\mathbb{Q}$ este numărabilă, rezultă că A_n este cel mult numărabilă. Prin urmare, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ este cel mult numărabilă, deci A este cel mult numărabilă. Am ajuns la o contradicţie, deci problema este rezolvată.

2.2.24. Fie $A \subset \mathbb{R}$ nevidă, cel mult numărabilă. Să se arate că $\operatorname{int} A = \emptyset$.

Soluţie 2.2.24. Dacă interiorul mulţimii A ar fi nevid, atunci A ar trebui să conţină o bilă deschisă; cum orice bilă deschisă este nenumărabilă, rezultă că nu poate fi conţinută în A.

Capitolul 3

Limite de funcţii în spaţii metrice

3.1 Consideraţii teoretice

Fie (X, d_1) şi (Y, d_2) spaţii metrice şi $\emptyset \neq D \subseteq X$.

Definiţia 3.1.1. *(cu vecinătăţi)* Spunem că *funcţia* $f : D \to Y$ *are limita* $l \in Y$ *în punctul* $a \in D'$ dacă $\forall V \in \mathcal{V}(l), \exists U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $\forall x \in U \cap D \backslash \{a\}, f(x) \in V$ (sau, echivalent, $f(U \cap D\backslash\{a\}) \subseteq V$).

Notăm aceasta prin $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.

Teorema 3.1.2 (unicitatea limitei)**.** *Dacă există, limita unei funcţii într-un punct este unică.*

Teorema 3.1.3 (de caracterizare a noţiunii de limită)**.** *Fie* $f : D \to Y$, $a \in D'$ *şi* $\ell \in Y$.

Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ *(definiţia cu vecinătăţi)*;

(i') *(definiţia cu sisteme fundamentale de vecinătăţi)* $\forall V \in \mathcal{U}(l), \exists U \in \mathcal{U}(a)$ *astfel încât* $\forall x \in U \cap D\backslash\{a\}, f(x) \in V$;

(ii) *(definiţia cu sfere)* $\forall S_Y(l, \varepsilon), \exists S_X(a, \delta)$ *astfel încât* $\forall x \in S_X(a, \delta) \cap D\backslash\{a\}, f(x) \in S_Y(l, \varepsilon)$;

(iii) *(caracterizarea analitică cu* $\varepsilon - \delta$*)* $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ *astfel încât* $\forall x \in D\backslash\{a\}$, *cu* $d_1(x, a) < \delta$, *avem* $d_2(f(x), l) < \varepsilon$;

(iv) *(caracterizarea cu şiruri)* $\forall (x_n)_n \subset D\backslash\{a\}, x_n \xrightarrow{X} a \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{Y} l$.

Teorema 3.1.4. În general, pentru a arăta că o funcţie nu are limită într-un punct, se construiesc două şiruri care converg la punctul respectiv, pentru care şirurile imaginilor au limite diferite.

Exemplul 3.1.5. Fie $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{0,0\} \to \mathbb{R}, f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}, \forall (x,y) \neq (0,0)$.

Observăm că $(\mathbb{R}^2 \backslash \{0,0\})' = \mathbb{R}^2$, deci are sens să ne punem problema existenţei limitei funcţiei în orice punct din $\mathbb{R}^2$.

Vom arăta că nu există $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Conform procedeului indicat mai sus, construim:

$((x_n, y_n))_n, ((x'_n, y'_n))_n \subset \mathbb{R}^2 \backslash \{0,0\}, (x_n, y_n) = (\frac{1}{n}, 0), (x'_n, y'_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}), \forall n.$

Observăm că $(x_n, y_n) \to (0,0), (x'_n, y'_n) \to (0,0)$, dar $f(x_n, y_n) = \frac{\frac{1}{n}\cdot 0}{\frac{1}{n^2}+0} = 0 \to 0, f(x'_n, y'_n) = \frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}$ şi $0 \neq \frac{1}{2}$. Prin urmare, nu există $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Pe de altă parte, remarcăm că există $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y), \forall (x_0, y_0) \neq (0,0)$.

Teorema 3.1.6 (caracterizare de tip Cauchy a limitei)**.** *Fie $f : D \to Y$, $a \in D', (Y, d_2)$ spaţiu metric complet. Atunci f are limită în punctul a dacă şi numai dacă*

$(*)$ $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ *astfel încât* $\forall x, y \in D \backslash \{a\}$, *cu* $d_1(x,a) < \delta$ *şi* $d_1(y,a) < \delta$ *avem* $d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Observaţia 3.1.7. Teorema lui Cauchy 4.1.6 permite demonstrarea existenţei limitei unei funcţii într-un punct fără a cunoaşte efectiv limita.

Teorema 3.1.8. *O funcţie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, $(p, q \in \mathbb{N}^*)$ are limita $l \in \mathbb{R}^q$ într-un punct $x_0 = (x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^p) \in D'$ dacă şi numai dacă $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$ astfel încât $\forall x = (x^1, x^2, \ldots, x^p) \in D, x \neq x_0$, cu $|x^1 - x_0^1| < \delta, |x^2 - x_0^2| < \delta, \ldots, |x^p - x_0^p| < \delta$, avem $\|f(x) - l\|_q < \varepsilon$.*

Teorema 3.1.9 (caracterizarea pe componente)**.** *O funcţie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q (p, q \in \mathbb{N}^*)$, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_q)$ are limita $l = (l_1, l_2, \ldots, l_q) \in \mathbb{R}^q$ în punctul $x_0 \in D'$ dacă şi numai dacă fiecare componentă f_i are limita l_i în punctul x_0 :*

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l = (l_1, l_2, \ldots, l_q) \Leftrightarrow \forall i = \overline{1,q}, \lim\limits_{x\to x_0} f_i(x) = l_i.$

Observaţia 3.1.10. Pentru funcţiile de 2 variabile (sau, mai general, de n variabile) se pot considera de asemenea aşa-numitele *limite iterate*:

$\lim\limits_{x\to x_0} \lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ şi $\lim\limits_{y\to y_0} \lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$.

I) Se poate întâmpla ca limitele iterate să existe şi să fie egale, dar limita globală să nu existe.

II) Se poate întâmpla ca limitele iterate să nu existe (sau să nu existe una dintre ele), dar limita globală să existe.

Propoziţia 3.1.11. *Fie $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x_0, y_0) \in D'$. Presupunem că există limita globală $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = l$. Dacă pentru orice x astfel încât $(x, y) \in D$, există $h(x) = \lim\limits_{y\to y_0} f(x, y)$, atunci există $\lim\limits_{x\to x_0}[\lim\limits_{y\to y_0} f(x, y)] = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$.*

Analog pentru $\lim\limits_{x\to x_0} f(x, y)$.

Teorema 3.1.12. Dacă există ambele limite iterate şi sunt diferite, atunci nu există limita globală $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$.

Exemplul 3.1.13. Ne propunem să studiem limitele iterate şi limita globală (în ansamblul variabilelor) în $(0, 0)$ pentru funcţia $f(x, y) = \frac{x-y+x^2+y^2}{x+y}, \forall(x, y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(x, y); x + y = 0\}$. Avem:

$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x, y) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x+x^2}{x} = 1, \lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x, y) = \lim\limits_{y\to 0} \frac{-y+y^2}{y} = -1$, deci $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$.

De altfel, acelaşi rezultat se obţine şi astfel: $f((\frac{1}{n}, 0)) = \frac{n+1}{n} \to 1$, iar $f((\frac{1}{n}, \frac{1}{n})) = \frac{1}{n} \to 0 \neq 1$.

Teorema 3.1.14. *Presupunem că $(Y, \|\cdot\|)$ este spaţiu normat.*

Fie $f, g : D \subseteq X \to Y$, $x_0 \in D'$, $l_1, l_2 \in Y$ şi $\lambda \in \mathbb{R}$. Presupunem că există limitele $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l_1$ şi $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l_2$. Atunci există şi limitele funcţiilor $f + g$, λf şi avem: $\lim\limits_{x\to x_0}(f + g)(x) = l_1 + l_2$, $\lim\limits_{x\to x_0}(\lambda f)(x) = \lambda l_1$.

Teorema 3.1.15. *Fie $(Y, \|\cdot\|)$ un spaţiu normat, $f : D \subset X \to \mathbb{R}$, $g : D \subset X \to Y$, $x_0 \in D'$ şi $l_1 \in \mathbb{R}$, $l_2 \in Y$.*

Dacă există limitele $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l_1$ şi $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l_2$, atunci există şi limita funcţiei fg şi $\lim\limits_{x\to x_0}(fg)(x) = l_1 l_2$.

Teorema 3.1.16. *Fie $(Y, \|\cdot\|)$ un spaţiu normat, $f : D \subset X \to \mathbb{R}^*$, $g : D \subset X \to Y$, $x_0 \in D'$, $l_1 \in \mathbb{R}^*$, $l_2 \in Y$.*

Dacă există limitele $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l_1$ şi $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l_2$, atunci există şi limita funcţiei $\frac{g}{f}$ şi avem $\lim\limits_{x\to x_0}(\frac{g}{f})(x) = \frac{l_2}{l_1}$.

Teorema 3.1.17. *Fie* $(Y, \|\cdot\|)$ *un spaţiu normat,* $f : D \subseteq X \to Y$, $x_0 \in D'$ *şi* $l \in Y$. *Dacă există* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, *atunci există şi limita funcţiei* $\|f\|$ *şi avem* $\lim\limits_{x \to x_0} \|f(x)\| = \|l\|$.

Teorema 3.1.18. *Fie* $f : D \subseteq X \to \mathbb{R}, x_0 \in D'$ *şi* $l \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$. *Presupunem că există* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$. *Atunci* f *are local semnul lui* l *adică, există* $U_0 \in \mathcal{V}(x_0)$ *astfel încât* $sgnf(x) = sgnl$, *pentru orice* $x \in (U_0 \backslash \{x_0\}) \cap D$.

Teorema 3.1.19 (Criteriul majorării)**.** *Fie* $\emptyset \neq D \subseteq (X, d_1)$, $f, g : D \to (Y, d_2)$, $a \in D'$, $l \in Y$ *şi* $\alpha : D \to [0, +\infty)$, *cu* $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$ *astfel încât:*

(i) $d_2(f(x), g(x)) \leq \alpha(x)$, $\forall x \in D$;

(ii) $\lim\limits_{x \to a} g(x) = l$.

Atunci $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.

3.2 Probleme rezolvate

3.2.1. Fie $f(x, y) = arctg \frac{y}{x^2}$.

(i) Aflaţi mulţimea de definiţie $D \subseteq \mathbb{R}^2$ a funcţiei f.

(ii) Determinaţi D';

(iii) Cercetaţi dacă există limita funcţiei f în punctele din D'.

Soluţie 3.2.1. (i) $D = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, y); y \in \mathbb{R}\}$;

(ii) Folosind definiţia noţiunii de punct de acumulare, se obţine că $D' = \mathbb{R}^2$;

(iii) Dacă $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, y); y \in \mathbb{R}\}$, atunci există $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

Dacă $x_0 = 0$, deosebim două subcazuri:

(a) Dacă $y_0 \neq 0$, atunci există $\lim\limits_{(x,y) \to (0, y_0)} f(x, y) = \lim\limits_{(x,y) \to (0, y_0)} arctg \frac{y}{x^2} = arctg \infty = \frac{\pi}{2}$.

(b) Dacă $y_0 = 0$, atunci nu există $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y)$: $\lim\limits_{n \to \infty} f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \frac{\pi}{2} \neq \frac{\pi}{4} = \lim\limits_{n \to \infty} f(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{n})$.

3.2.2. Cercetaţi existenţa limitelor următoare şi, în caz afirmativ, calculaţi limita corespunzătoare:

(i) $\lim\limits_{(x,y) \to (1,2)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$, $\lim\limits_{(x,y) \to (1,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$, $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$;

(ii) $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x + y}{x - y}$; (iii) $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$; (iv) $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$;

(v) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$; (vi) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$;

(vii) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$; (viii) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$; (ix) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\arcsin(x^2+y^2)}{|x|+|y|}$;

(x) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2^{\arcsin(x^4+y^4)}-1}{x^2+y^2}$;

(xi) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$; (xii) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2+2x}{y^2-2x}$; (xiii) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} y\sin\frac{1}{x}$;

(xiv) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^3}{x^4+y^4}$;

(xv) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{(x-y)^2+x^2y^2}$; (xvi) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{x^4+y^2}$; (xvii) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (\frac{1}{x^2+y^2})^{x^2y}$;

(xviii) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-y^4}{\sqrt{x^2+y^2-xy}}$.

Soluţie 3.2.2. (i) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{2}{5}$; $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = 0$;

Pentru limita în $(0,0)$; există şirurile: $((\frac{1}{n},\frac{1}{n}))_n \subset \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}, (\frac{1}{n},\frac{1}{n}) \xrightarrow{\mathbb{R}^2} (0,0), ((\frac{1}{n},0))_n \subset \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$,

$(\frac{1}{n},0) \xrightarrow{\mathbb{R}^2} (0,0), \lim\limits_{n\to\infty} f(\frac{1}{n},\frac{1}{n}) = \frac{1}{2} \neq 0 = \lim\limits_{n\to\infty} f(\frac{1}{n},0)$.

(ii) Fie şirurile $(\frac{2}{n},\frac{1}{n}) \xrightarrow{\mathbb{R}^2} (0,0), (\frac{1}{n},0) \xrightarrow{\mathbb{R}^2} (0,0), \lim\limits_{n\to\infty} f(\frac{2}{n},\frac{1}{n}) = 2 \neq 1 = \lim\limits_{n\to\infty} f(\frac{1}{n},0)$. Deci nu există limita.

(iii) Fie şirurile $(\frac{1}{n},\frac{1}{n^2}) \to (0,0), (\frac{1}{n},0) \to (0,0), \lim\limits_{n\to\infty} f(\frac{1}{n},\frac{1}{n^2}) = \frac{1}{2} \neq 0 = \lim\limits_{n\to\infty} f(\frac{1}{n},0)$. Deci limita nu există.

(iv) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} y = 0$ ($|\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}| \leq 1, y \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$).

(v) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2} y = 0$ ($\frac{x^2}{x^2+y^2} \in [0,1], y \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$).

(vi) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} \nexists$: $(\frac{2}{n},\frac{1}{n}) \to (0,0), (\frac{1}{n},0) \to (0,0), \lim\limits_{n\to\infty} f(\frac{2}{n},\frac{1}{n}) = \frac{5}{3} \neq 1 = \lim\limits_{n\to\infty} f(\frac{1}{n},0)$.

(vii) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \underset{x^2+y^2=t}{=} \lim\limits_{t} \frac{\sin t}{t} = 1$;

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$:

Metoda I. Întrucât $|\sin t| \leq |t|, \forall t \in \mathbb{R}$, rezultă că

$|\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}| \leq |\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}| \leq \frac{|x^3|}{x^2+y^2} + \frac{|y^3|}{x^2+y^2} = \frac{x^2}{x^2+y^2} \cdot |x| + \frac{y^2}{x^2+y^2} \cdot |y| \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$,

deci $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2} = 0$.

Metoda II. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2} \underset{x^3+y^3\neq 0}{=} \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^3+y^3} \cdot \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = 0$:

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^3+y^3} \underset{x^3+y^3=t}{=} \lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$,

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} [\frac{x^2}{x^2+y^2} \cdot x + \frac{y^2}{x^2+y^2} \cdot y] = 0$;

Pentru $x^3 + y^3 = 0$, se obţine $y = -x$, rezultând şi în această situaţie $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{0}{x^2+y^2} = 0$.

În consecinţă, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^3+y^3} = 0$.

(ix) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\arcsin(x^2+y^2)}{|x|+|y|} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\arcsin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \cdot \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|} = 0$:

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\arcsin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \underset{x^2+y^2=t}{=} \lim\limits_{t\to 0} \frac{\arcsin t}{t} = 1$,

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} [\frac{|x|}{|x|+|y|} \cdot |x| + \frac{|y|}{|x|+|y|} \cdot |y|] = 0$.

(x) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} [x^2 \cdot \frac{x^2}{x^2+y^2} + y^2 \cdot \frac{y^2}{x^2+y^2}] = 0$.

(xi) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2^{\arcsin(x^4+y^4)}-1}{x^2+y^2} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2^{\arcsin(x^4+y^4)}-1}{\arcsin(x^4+y^4)} \cdot \frac{\arcsin(x^4+y^4)}{x^4+y^4} \cdot \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} =$ 0 întrucât

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2^{\arcsin(x^4+y^4)}-1}{\arcsin(x^4+y^4)} \underset{x^4+y^4=t}{=} \lim\limits_{t\to 0} \frac{2^t-1}{t} = \ln 2$,

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\arcsin(x^4+y^4)}{x^4+y^4} \underset{x^4+y^4=t}{=} \lim\limits_{t\to 0} \frac{\arcsin t}{t} = 1$,

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} = 0$.

(xii) Fie şirurile $(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}) \xrightarrow{\mathbb{R}^2} (0,0), (\frac{1}{n}, 0) \xrightarrow{\mathbb{R}^2} (0,0)$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}) = -3 \neq -1 = \lim\limits_{n\to\infty} f(\frac{1}{n}, 0)$. Deci limita nu există.

(xiii) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} y \sin\frac{1}{x} = 0$ ($\sin\frac{1}{x} \in [-1,1]$ şi $y \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$).

(xiv) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^3}{x^4+y^4} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^4+y^4} \cdot y = 0$ ($\frac{x^2y^2}{x^4+y^4} \in [0, \frac{1}{2}], y \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$).

(xv) Se consideră şirurile $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \xrightarrow{\mathbb{R}^2} (0,0), (\frac{1}{n}, 0) \xrightarrow{\mathbb{R}^2} (0,0)$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = 1 \neq 0 = \lim\limits_{n\to\infty} f(\frac{1}{n}, 0)$. Prin urmare, limita nu există.

(xvi) Fie şirurile $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}) \stackrel{\mathbb{R}^2}{\longrightarrow} (0,0), (\frac{1}{n}, 0) \stackrel{\mathbb{R}^2}{\longrightarrow} (0,0)$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}) = \frac{1}{2} \neq 1 = \lim\limits_{n\to\infty} f(\frac{1}{n}, 0)$. Deci nu există limita.

(xvii) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (\frac{1}{x^2+y^2})^{x^2y} \stackrel{[\infty^0]}{=}$

$e^{-\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x^2y\ln(x^2+y^2)} = e^{-\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}[(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)]} = e^0 = 1$:

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2} \cdot y = 0$ $(\frac{x^2}{x^2+y^2} \in [0,1], y \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0)$,

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2) \underset{x^2+y^2=t}{=} \lim\limits_{t\to 0} t\ln t \stackrel{[\infty\cdot 0]}{=} \lim\limits_{t\to 0} \frac{\ln t}{\frac{1}{t}} \stackrel{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \lim\limits_{t\to 0} \frac{\frac{1}{t}}{-\frac{1}{t^2}} = 0.$

(xviii) Scriem $x^2 + y^2 - xy = (x - \frac{y}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}y}{2})^2$.

Efectuăm schimbarea de variabilă $\begin{cases} x - \frac{y}{2} = u \\ \frac{\sqrt{3}y}{2} = v. \end{cases}$, ceea ce antrenează $\begin{cases} x = u + \frac{1}{\sqrt{3}}v \\ y = \frac{2}{\sqrt{3}}v \end{cases}$.

Întrucât $(x, y) \to (0, 0) \Leftrightarrow (u, v) \to (0, 0)$, limita iniţială devine

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{(u + \frac{1}{\sqrt{3}}v)^3 - (\frac{2}{\sqrt{3}}v)^4}{\sqrt{u^2+v^2}}$$

$$= \lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{u^3 + \sqrt{3}u^2v + uv^2 + \frac{1}{3\sqrt{3}}v^3 - \frac{16}{27}v^4}{\sqrt{u^2+v^2}} =$$

$$= \lim_{(u,v)\to(0,0)} (\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}} \cdot u^2 + \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}} \cdot \sqrt{3}u^2 +$$

$$+ \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}} \cdot v^2 + \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}} \cdot \frac{v^2}{3} - \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}} \cdot \frac{16}{27}v^3) = 0.$$

3.2.3. Folosind definiţia cu $\varepsilon - \delta$, arătaţi că:

(i) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,3)} (x^2 + xy) = 4$;

(ii) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|} = 0$;

(iii) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+1}{y^2} = \frac{1}{2}$;

(iv) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x-y}{x+y} = \frac{-1}{3}$.

Soluţie 3.2.3. (i) Observăm că $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(x, y); |x| + |y| = 0\}$, $\frac{x^2+y^2}{|x|+|y|} \leq |x| + |y| \leq 2\sqrt{x^2+y^2}$.

Prin urmare, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2} > 0$ astfel încât $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y); |x| + |y| = 0\}$, cu $\|(x,y) - (0,0)\| = \sqrt{x^2+y^2} < \delta$, avem $|f(x,y) - 0| = \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|} < 2\delta = \varepsilon$, ceea ce înseamnă că $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|} = 0$.

(ii) Vom arăta că $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$ astfel încât $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, cu $|x-1| < \delta$ şi $|y-3| < \delta$, avem $|f(x,y) - 4| < \varepsilon$.

$$|f(x,y)-4| = |x^2+xy-4| = |(x-1)(y-3)+(x-1)^2+5(x-1)+(y-3)| < 2\delta^2+6\delta.$$

Impunând $\delta \in (0,1)$, va rezulta $|f(x,y) - 4| < 2\delta + 6\delta = 8\delta$.

Aşadar, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon \in (0, \min(1, \frac{\varepsilon}{8})) > 0$ astfel încât $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, cu $|x-1| < \delta$ şi $|y-3| < \delta$, avem $|f(x,y) - 4| < \varepsilon$, deci $\lim\limits_{(x,y)\to(1,3)} (x^2+xy) = 4$.

(iii) Vom arăta că $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$ astfel încât $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, cu $|x| < \delta$ şi $|y| < \delta$, avem $|f(x,y) - \frac{1}{2}| < \varepsilon$.

$$\begin{aligned} |f(x,y) - \frac{1}{2}| &= |\frac{x+1}{y^2+2} - \frac{1}{2}| = |\frac{2x-y^2}{2(y^2+2)}| \le \frac{|2x-y^2|}{4} \le \frac{|x|}{2} + \frac{y^2}{4} < \\ &< \frac{\delta}{2} + \frac{\delta^2}{4}. \end{aligned}$$

Impunând $\delta \in (0,1)$, va rezulta $|f(x,y) - \frac{1}{2}| < \frac{3\delta}{4}$.

Aşadar, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon \in (0, \min(1, \frac{4\varepsilon}{3})) > 0$ astfel încât $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, cu $|x| < \delta$ şi $|y| < \delta$, avem $|f(x,y) - \frac{1}{2}| < \varepsilon$, deci $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+1}{y^2+2} = \frac{1}{2}$.

(iv) Vom arăta că $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$ astfel încât $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, cu $|x-1| < \delta$ şi $|y-2| < \delta$, avem $|f(x,y) + \frac{1}{3}| < \varepsilon$.

$$\begin{aligned} |f(x,y) + \frac{1}{3}| &= |\frac{x-y}{x+y} + \frac{1}{3}| = \frac{|4x-2y|}{3|x+y|} = \frac{2}{3} \cdot \frac{|2x-y|}{|x+y|} \le \frac{2}{3} \cdot \frac{2|x-1| + |y-2|}{|x+y|} < \\ &< \frac{2}{3} \cdot \frac{3\delta}{|x+y|} = \frac{2\delta}{|x+y|}. \end{aligned}$$

Impunând $\delta \in (0,1)$, va rezulta $|x-1| < 1$ şi $|y-2| < 1$, de unde $x > 0$ şi $y > 1$, deci $x + y > 1$. Prin urmare, $|f(x,y) + \frac{1}{3}| < \frac{2\delta}{|x+y|} = \frac{2\delta}{x+y} < 2\delta$.

Aşadar, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon \in (0, \min(1, \frac{\varepsilon}{2})) > 0$ astfel încât $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, cu $|x-1| < \delta$ şi $|y-2| < \delta$, avem $|f(x,y) + \frac{1}{3}| < \varepsilon$, deci $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x-y}{x+y} = \frac{-1}{3}$.

3.2.4. Cercetaţi limitele iterate şi limita globală în $(0,0)$ pentru:

(i) $f(x,y)=\frac{x-y+x^2+y^2}{x+y}, \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\backslash\{(x,y); x+y=0\}$.

(ii) $f(x,y)=x\sin\frac{1}{y}, \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\backslash\{(x,y); y=0\}$.

(iii) $f(x,y)=(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}, \forall (x,y)\in\{(x,y); x\neq 0, y\neq 0\}$.

(iv) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, (x,y)\neq(0,)\\ 0, (x,y)=(0,0).\end{cases}$

Soluţie 3.2.4. (i) $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0}\frac{x-y+x^2+y^2}{x+y})=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+x^2}{x}=1$,

$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=\lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-y+x^2+y^2}{x+y})=\lim\limits_{y\to 0}\frac{-y+y^2}{y}=-1$, deci $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} fx,y)$.

(ii) $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=\lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{y})=\lim\limits_{y\to 0} 0=0$,

Nu există $\lim\limits_{y\to 0}\sin\frac{1}{y}$, deci nu există $\lim\limits_{y\to 0}(x\sin\frac{1}{y})$, aşadar nu există nici limita $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$, dar limita globală există: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x\sin\frac{1}{y}=0$ ($\sin\frac{1}{y}\in[-1,1], x\underset{(x,y)\to(0,0)}{\to}0$).

(iii)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) &= \lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y})=\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0}[x\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}])=\\ &= \lim_{x\to 0}(x\sin\frac{1}{x}\lim_{y\to 0}\sin\frac{1}{y}+\sin\frac{1}{x}\lim_{y\to 0} y\sin\frac{1}{y})=\lim_{x\to 0}(x\sin\frac{1}{x}\lim_{y\to 0}\sin\frac{1}{y}+\sin\frac{1}{x}\cdot 0)\\ &= \lim_{x\to 0}(x\sin\frac{1}{x}\lim_{y\to 0}\sin\frac{1}{y}).\end{aligned}$$

Deoarece nu există $\lim\limits_{y\to 0}\sin\frac{1}{y}$, rezultă că nu există $x\sin\frac{1}{x}\lim\limits_{y\to 0}\sin\frac{1}{y}$, deci nu există $\lim\limits_{x\to 0}(x\sin\frac{1}{x}\lim\limits_{y\to 0}\sin\frac{1}{y})$, de unde rezultă că nu există $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$.

Analog (sau inversând între ele rolurile lui x şi y) obţinem că nu există $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$.

Cu toate acestea, limita globală există: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}=0$ ($\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\in[-1,1], x+y\underset{(x,y)\to(0,0)}{\to}0$).

(iv) $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2})=\lim\limits_{x\to 0} 0=0, \lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=0$.

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} f(0,\frac{1}{n})=0\neq\frac{1}{2}=\lim\limits_{n\to\infty} f(\frac{1}{n},\frac{1}{n})$, limita globală nu există.

3.2.5. Fie $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2+\sin(x^3+y^5)}{x^2+y^4}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$

Arătaţi că deşi f are limite iterate în $(0,0)$, nu are limită în $(0,0)$ în ansamblul variabilelor.

Soluţie 3.2.5. ——

Capitolul 4

Spaţii metrice complete

4.1 Consideraţii teoretice

Definiţia 4.1.1. Spunem că un şir $(x_n)_n \subset (X, d)$ este *Cauchy* (sau *fundamental*) dacă $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n, m \geq n_\varepsilon, d(x_n, x_m) < \varepsilon$, sau, echivalent, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}^*, d(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon$.

Teorema 4.1.2. *Orice şir convergent $(x_n)_n$ este Cauchy.*

Teorema 4.1.3. *Orice şir Cauchy $(x_n)_n$ este mărginit.*

Observaţia 4.1.4. Reciproca Teoremei 3.1.2 nu este adevărată: există şiruri Cauchy care nu sunt convergente. De exemplu, fie $Y = [0, 3)$, privit ca subspaţiu al lui $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ şi $x_n = \frac{3n-1}{n}$, $n \geq 1$. Se observă că şirul (x_n) este Cauchy în Y (fiind convergent în $\mathbb{R}$), dar nu converge în Y deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n-1}{n} = 3 \notin Y$.

Definiţia 4.1.5. Un *spaţiu metric* (X, d) se spune că este *complet* dacă orice şir Cauchy este convergent (altfel spus, noţiunile de şir Cauchy şi şir convergent coincid).

Exemplul 4.1.6. $\mathbb{R}^p$, $(p \in \mathbb{N}^*)$ (cu metrica euclidiană) este spaţiu metric complet.

Teorema 4.1.7 (Cantor, de caracterizare a spaţiilor metrice complete)**.** *Un spaţiu metric (X, d) este complet dacă şi numai dacă $\forall (F_n)_n$ un şir descendent de mulţimi nevide, închise, cu $\lim\limits_{n\to\infty} \delta(F_n) = 0$, avem $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$.*

Definiţia 4.1.8. Spunem că un spaţiu normat $(X, ||\cdot||)$ este *spaţiu Banach* dacă este spaţiu metric complet în raport cu metrica indusă de normă.

Exemplul 4.1.9. I) $\mathcal{M}(A)$ este spaţiu Banach în raport cu metrica $d(f,g) = \sup\limits_{x\in A}|f(x) - g(x)|, \forall f, g \in \mathcal{M}(A)$, distanţa indusă de norma uniformă $||f|| = \sup\limits_{x\in A}|f(x)|, \forall f \in \mathcal{M}(A)$.

II) l^p, cu $p \in [1, +\infty)$, este spaţiu Banach în raport cu norma $||x|| = (\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_n|^p)^{\frac{1}{p}}, \forall x = (x_n)_n \in l^p$.

Teorema 4.1.10. *Într-un spaţiu metric complet (X, d), subspaţiile închise coincid cu cele complete.*

Exemplul 4.1.11. I) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}, \mathbb{Q}^p \subset \mathbb{R}^p$ ($p \in \mathbb{N}^*$) nu este complet (deoarece nu este închis).

II) $[a, b] \subset \mathbb{R}$ este complet.

Teorema 4.1.12. *Pentru orice spaţiu metric, există un spaţiu metric complet care să îl conţină ca subspaţiu.*

Definiţia 4.1.13. O funcţie $f : (X, d) \to (X, d)$ se numeşte *contracţie* dacă există $\lambda \in (0, 1)$ astfel ca $d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y), \forall x, y \in X$ (cu alte cuvinte, prin aplicarea unei contracţii unei perechi de puncte, distanţa dintre ele se contractă).

Teorema 4.1.14 (Teorema lui Banach de punct fix sau Principiul contracţiei)**.** *Orice contracţie a unui spaţiu metric în el însuşi admite un singur punct fix.*

Exemplul 4.1.15. Fie spaţiul Banach $(l^2, \|\cdot\|)$ dat în Exemplul ....

Funcţia $f : l^2 \to l^2, f(x) = (\frac{x_n}{2})_n, \forall x = (x_n)_n \in l^2$, este contracţie a lui l^2 în el însuşi şi are ca unic punct fix şirul nul $0 = (0) \in l^2$.

Teorema 4.1.16. *Un spaţiu metric (X, d) este complet dacă şi numai dacă orice contracţie definită pe o submulţime închisă a lui X are un punct fix.*

4.2 Probleme rezolvate

4.2.1. Arătaţi că:

(i) orice spaţiu metric finit este complet;

(ii) orice spaţiu metric discret este complet.

Soluţie 4.2.1. ———

4.2.2. Arătaţi că dacă un şir Cauchy $(x_n)_n \subset (X, d)$ conţine un subşir convergent la un punct $x \in X$, atunci $x_n \to x$.

Soluţie 4.2.2. —

4.2.3. Fie $d : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+, d(m,n) = \begin{cases} 0, & m = n \\ 1 + \frac{1}{m+n}, & m \neq n \end{cases}, \forall m,n \in \mathbb{N}.$

Arătaţi că $(\mathbb{N}, d)$ este spaţiu metric complet.

Soluţie 4.2.3. —

4.2.4. Pe $\mathbb{R}_+$ se introduce metrica $d(x,y) = \begin{cases} x+y, & x \neq y \\ 0, & x = y. \end{cases}$

Arătaţi că $(\mathbb{R}_+, d)$ este spaţiu metric complet.

Soluţie 4.2.4. —

4.2.5. Fie $f : (0, \frac{1}{3}] \to (0, \frac{1}{3}], f(x) = x^2$. Arătaţi că f este o contracţie dar f nu are nici un punct fix în spaţiul metric $((0, \frac{1}{3}], d_u)$. Explicaţi rezultatul.

Soluţie 4.2.5. —

4.2.6. Fie spaţiul $X = [0, \infty)$ înzestrat cu distanţa euclidiană şi funcţia $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Arătaţi că f este o contracţie pe X şi aflaţi punctul său fix.

Soluţie 4.2.6. —

4.2.7. Precizaţi dacă funcţiile următoare sunt contracţii:

(i) $(\mathbb{R}, d), d(x,y) = |x-y|, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{5} arctgx;$

(ii) $(\mathbb{R}_+, d), d(x,y) = |x-y|, f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, f(x) = \sqrt{x+1};$

(iii) $([\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}], d), d(x,y) = |x-y|, f : [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}] \to [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}], f(x) = \sqrt{\sin x};$

(iv) $([1,9], d), d(x,y) = |x-y|, f : [1,9] \to [1,9], f(x) = 1 + \sqrt[3]{x+2}.$

Soluţie 4.2.7. —

4.3 Probleme propuse

4.3.1. Fie $A \neq \emptyset$ şi $\mathcal{M}(A)$ spaţiul dat în Exemplul .... Arătaţi că:

(i) dacă $(f_n)_n \subset \mathcal{M}(A)$, $f \in \mathcal{M}(A)$, atunci $f_n \xrightarrow{\mathcal{M}(A)} f$ dacă şi numai dacă $f_n \xrightarrow[A]{u} f$.

(ii) $(\mathcal{M}(A), \|\cdot\|)$ este spaţiu Banach.

4.3.2. Fie $C_{[a,b]} = \{f | f : [a,b] \to \mathbb{R}$ este continuă pe $[a,b]\}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Arătaţi că:

(i) $C_{[a,b]}$ este subspaţiu complet al spaţiului $(\mathcal{M}(A), \|\cdot\|)$;

(ii) $\|\cdot\|_1$ şi $\|\cdot\|_2$ sunt norme pe $C_{[a,b]}$, unde $\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|dx$, $\|f\|_2 = (\int_a^b f^2(x)dx)^{1/2}$, $\forall f \in C_{[a,b]}$.

(iii) $(C_{[a,b]}, \|\cdot\|_1)$ şi $(C_{[a,b]}, \|\cdot\|_2)$ nu sunt spaţii Banach.

Soluţii

$\boxed{\textbf{4.3.1.}}$ ———

$\boxed{\textbf{4.3.2.}}$ ———

Capitolul 5

Funcţii continue în spaţii metrice

5.1 Consideraţii teoretice

Fie (X, d_1) şi (Y, d_2) spaţii metrice şi $\emptyset \neq D \subseteq X$.

Definiţia 5.1.1. Fie $f : D \to Y$ şi $a \in D$ (prin urmare, a poate fi punct izolat sau punct de acumulare pentru D).

(i) *(cu vecinătăţi)* Spunem că funcţia f este *continuă în punctul* a dacă $\forall V \in \mathcal{V}(f(a)), \exists U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $\forall x \in U \cap D, f(x) \in V$ (sau, echivalent, $f(U \cap D) \subset V$);

(ii) O funcţie care nu este continuă într-un punct se spune că este *discontinuă* în punctul respectiv, iar a se numeşte *punct de discontinuitate pentru* f.

(iii) Funcţia f se numeşte *continuă (global) pe mulţimea* D dacă este continuă în fiecare punct din D.

Observaţia 5.1.2. Dacă $a \in D$ este punct izolat pentru D, atunci f este continuă în a. Într-adevăr, a fiind punct izolat, $\exists U_0 \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $U_0 \cap D = \{a\}$. Prin urmare, $\forall V \in \mathcal{V}(f(a)), \exists U_0 \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $f(U_0 \cap D) = f(\{a\}) \subset V$, deci f este continuă în a.

Teorema 5.1.3. *Fie $f : D \subset (X, d_1) \to (Y, d_2)$ şi $a \in D \cap D'$. Atunci f este continuă în a dacă şi numai dacă $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.*

Corolarul 5.1.4. *Fie* $f : D \subset (X, d_1) \to (Y, d_2)$ *şi* $a \in D$. *Atunci* f *este continuă în* a *dacă şi numai dacă ori* a *este punct izolat, ori* $a \in D \cap D'$ *şi* $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Teorema 5.1.5 (de caracterizare a continuităţii punctuale)**.** *Fie* $f : D \subset (X, d_1) \to (Y, d_2)$ *şi* $a \in D$. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) f *este continuă în punctul* a *(definiţia cu vecinătăţi)*;

(ii) (definiţia cu sisteme fundamentale de vecinătăţi) $\forall V \in \mathcal{U}(f(a)), \exists U \in \mathcal{U}(a)$ *astfel încât* $\forall x \in U \cap D, f(x) \in V$;

(iii) (definiţia cu sfere) $\forall S_Y(f(a), \varepsilon), \exists S_X(a, \delta)$ *astfel încât* $\forall x \in S_X(a, \delta) \cap D, f(x) \in S_Y(f(a), \varepsilon)$;

(iv) (caracterizarea analitică cu $\varepsilon - \delta$*)* $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ *astfel încât* $\forall x \in D$, *cu* $d_1(x, a) < \delta$, *avem* $d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon$;

(v) (caracterizarea cu şiruri) $\forall (x_n)_n \subset D, x_n \xrightarrow{X} a \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{Y} f(a)$.

Teorema 5.1.6 (caracterizarea pe componente pentru funcţii din $\mathbb{R}^k$)**.** *Funcţia* $f = (f_1, f_2, ..., f_q) : D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ *este continuă în punctul* x_0 *dacă şi numai dacă toate componentele sale* f_i, $i = \overline{1, q}$, *sunt funcţii continue în* x_0.

Teorema 5.1.7 (continuitatea compunerii)**.** *Dacă* $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ *este continuă în* $a \in X$ *şi* $g : (Y, d_2) \to (Z, d_3)$ *este continuă în* $b = f(a) \in Y$, *atunci* $g \circ f : (X, d_1) \to (Z, d_3)$ *este continuă în* a.

Teorema 5.1.8 (de caracterizare a continuităţii globale)**.** *Fie* $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) f *este continuă pe* X;

(ii) $\forall D \in \tau_Y \Rightarrow f^{-1}(D) \in \tau_X$ *(altfel spus,* f *întoarce mulţimi deschise în mulţimi deschise);*

(iii) $\forall F_{\hat{\imath}nchis\check{a}} \subseteq Y \Longrightarrow f^{-1}(F)$ *este închisă în* X *(altfel spus,* f *întoarce mulţimi închise în mulţimi închise);*

(iv) $\forall A \subseteq X \Rightarrow f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

Definiţia 5.1.9. Fie $(X, d_1), (Y, d_2), D \subseteq (X, d_1), a \in D \cap D', f : D \backslash \{a\} \to Y$. Presupunem că există $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l \in Y$. Atunci funcţia $\widetilde{f} : D \to Y, \widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in D \backslash \{a\} \\ l, & x = a \end{cases}$ este evident continuă pe D şi se numeşte *prelungirea prin continuitate a funcţiei* f *la* D.

Teorema 5.1.10. *Presupunem că* $(Y, \| \cdot \|)$ *este spaţiu normat şi fie* $f, g : D \to Y$ *şi* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Dacă* f, g *sunt continue în* $x_0 \in D$, *atunci* αf *şi* $f + g$ *sunt continue în* x_0.

Teorema 5.1.11. *Presupunem $(Y, \|\cdot\|)$ este spaţiu normat şi fie $f : D \to \mathbb{R}$, $g : D \to Y$. Dacă f, g sunt continue în $a \in D$, atunci fg este continuă în a.*

Teorema 5.1.12. *Presupunem că $(Y, \|\cdot\|)$ este spaţiu normat. Fie $f : D \to \mathbb{R}^*$, $g : D \to Y$ şi funcţia $\frac{g}{f} : D \to Y$, definită prin $\frac{g}{f}(x) = \frac{1}{f(x)} g(x), \forall x \in D$. Dacă f, g sunt continue în $a \in D$, atunci $\frac{g}{f}$ este continuă în a.*

Teorema 5.1.13. *Fie $(Y, \|\cdot\|)$ un spaţiu normat. Dacă $f : D \to Y$ este continuă în $a \in D$, atunci $\|f\|$ este continuă în a.*

Teorema 5.1.14 (semnul local)**.** *Presupunem că $f : D \to \mathbb{R}$ este continuă în $a \in D$, iar $f(a) \neq 0$. Atunci f are local semnul lui $f(a)$, adică, $\exists U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $sgnf(x) = sgnf(a), \forall x \in U \cap D$.*

Exemplul 5.1.15. Aplicaţiile de proiecţie $pr_i : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}, i = \overline{1,p}$, definite prin $pr_i(x) = x_i, \forall i = \overline{1,p}$, sunt continue pe $\mathbb{R}^p$. Într-adevăr, fie $x = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$ oarecare, fixat. Evident, $\forall (x_n)_n \subset \mathbb{R}^p$, $x_n = (x_n^1, x_n^2, \ldots, x_n^p) \to x = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$ dacă şi numai dacă $x_n^i = pr_i(x_n) \to x_i = pr_i(x), \forall i = \overline{1,p}$, ceea ce înseamnă că aplicaţiile de proiecţie sunt continue pe $\mathbb{R}^p$.

Vom arăta că, pentru funcţii continue $f : D \subseteq (X, d_1) \to (Y, d_2)$, anumite proprietăţi pe care le are mulţimea D (compacitatea, conectivitatea), le are şi mulţimea $f(D)$, imaginea directă a lui D prin f.

Teorema 5.1.16. *Imaginea printr-o funcţie continuă a unei mulţimi compacte este de asemenea mulţime compactă (altfel spus, funcţiile continue duc mulţimi compacte în mulţimi compacte).*

Teorema 5.1.17. *Orice funcţie $f : K \subset (X, d_1) \to (Y, d_2)$ continuă pe mulţimea compactă K este mărginită pe K.*

Teorema 5.1.18 (Weierstrass)**.** *Orice funcţie $f : K \subset (X, d_1) \to \mathbb{R}$ continuă pe mulţimea compactă K este mărginită şi îşi atinge marginile pe K.*

Definiţia 5.1.19. O funcţie $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ se numeşte *uniform continuă pe X* dacă pentru $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât $\forall x, y \in D$, cu $d_1(x, y) < \delta$, avem $d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Observaţia 5.1.20. I) f este continuă pe mulţimea $D \subset X$ dacă f este continuă în orice punct din D:

$\forall x_0 \in D, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ astfel încât $\forall x \in D$, cu $d_1(x, x_0) < \delta$, avem $d_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.

Observăm astfel că proprietatea de uniformă continuitate înseamnă îndeplinirea proprietăţii de continuitate cu acelaşi δ pentru toate punctele mulţimii. Dacă

δ depinde efectiv de trecerea de la un punct la altul, atunci f nu este uniform continuă.

II) Orice funcţie uniform continuă pe o mulţime este evident continuă pe acea mulţime. Reciproca nu este în general adevărată. De exemplu, funcţia $f : (0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}, \forall x \in (0,1]$, este continuă, dar nu este uniform continuă pe $(0,1]$.

Introducem în continuare o clasă importantă de funcţii uniform continue.

Definiţia 5.1.21. O funcţie $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ se numeşte *lipschitziană pe* X dacă $\exists L > 0$ astfel încât $d_2(f(x), f(y)) \leq L d_1(x, y), \forall x, y \in D$.

Propoziţia 5.1.22. *Orice funcţie lipschitziană* $f : D \subset (X, d_1) \to (Y, d_2)$ *este uniform continuă pe* D.

Exemplul 5.1.23. I) $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}_+, f(x) = ||x||, \forall x \in \mathbb{R}^p$ este lipschitziană pe $\mathbb{R}^p$ datorită inegalităţii $|||x|| - ||y||| \leq ||x - y||, \forall x, y \in \mathbb{R}^p$.

II) Orice funcţie $f : I \to \mathbb{R}$ derivabilă cu derivata mărginită pe un interval $I \subseteq \mathbb{R}$ este lipschitziană (deci uniform continuă) pe intervalul respectiv.

Teorema 5.1.24 (Cantor)**.** *Orice funcţie* $f : K \subset (X, d_1) \to (Y, d_2)$ *continuă pe mulţimea compactă* K *este uniform continuă pe* K.

Teorema 5.1.25. *Dacă* $A \subset \mathbb{R}$ *este mărginită şi* $f : A \to \mathbb{R}$ *este continuă pe* A *atunci* f *este uniform continuă pe* A *dacă şi numai dacă poate fi prelungită prin continuitate la* $\overline{A}$.

Teorema 5.1.26. *Dacă* $A \subset (X, d_1)$ *este relativ compactă,* $f : A \to (Y, d_2)$ *este continuă pe* A *şi* (Y, d_2) *este complet, atunci* f *este uniform continuă pe* A *dacă şi numai dacă poate fi prelungită prin continuitate la* $\overline{A}$.

Teorema 5.1.27 (caracterizarea cu şiruri a uniformei continuităţi)**.** *O funcţie* $f : D \to Y$ *este uniform continuă dacă şi numai dacă* $\forall (x_n)_n, (y_n)_n \subset D$, *cu* $d_1(x_n, y_n) \to 0$, *rezultă că* $d_2(f(x_n), f(y_n)) \to 0$.

Teorema 5.1.28. *O funcţie* $f = (f_1, \ldots, f_q) : D \to \mathbb{R}^q$ *(*$q \in \mathbb{N}^*$*) este uniform continuă pe* D *dacă şi numai dacă toate funcţiile componente* $f_i, i = \overline{1, q}$ *sunt uniform continue pe* D.

Teorema 5.1.29 (compunerea a două funcţii uniform continue)**.** *Dacă* $f : D \subset X \to E \subset Y$ *este uniform continuă pe* D, *iar* $g : E \to (Z, d_3)$ *este uniform continuă pe* E, *atunci* $g \circ f$ *este uniform continuă pe* D.

Teorema 5.1.30. *Fie $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Atunci f este uniform continuă pe A dacă şi numai dacă există $c \in A$ astfel încât f este uniform continuă pe $A_1 = \{x \in A; x \leq c\}$ şi $A_2 = \{x \in A; x \geq c\}$.*

Teorema 5.1.31. *(invarianţa conexiunii). Imaginea printr-o funcţie continuă a unei mulţimi conexe este de asemenea o mulţime conexă (altfel spus, funcţiile continue duc mulţimi conexe în mulţimi conexe).*

Observaţia 5.1.32. *Imaginea printr-o funcţie continuă a unei mulţimi convexe poate să nu fie convexă, după cum se remarcă din următorul contraexemplu: funcţia continuă $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2, f(t) = (\cos t, \sin t), \forall t \in [0, \pi]$ duce mulţimea convexă $[0, \pi]$ într-un semicerc, care nu este mulţime convexă.*

Vom prezenta în cele ce urmează o clasă importantă de aplicaţii continue.

Definiţia 5.1.33. O funcţie $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ se numeşte *aplicaţie liniară (*sau *operator liniar)* dacă:
(i) $T(x + y) = T(x) + T(y), \forall x, y \in \mathbb{R}^k$ (aditivitatea),
(ii) $T(\lambda x) = \lambda T(x), \forall x \in \mathbb{R}^k, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ (omogenitatea).

Propoziţia 5.1.34. *Dacă $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l, T = (T_1, T_2, \ldots, T_l)$ este un operator liniar, atunci:*
i) $T(0) = 0$;
ii) $T(x - y) = T(x) - T(y), \forall x, y \in \mathbb{R}^k$;
iii) $\forall j = \overline{1, l}$, funcţiile de coordonate $T_j : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ sunt aplicaţii liniare.

Observaţia 5.1.35. Fie $(e_1, e_2, \ldots, e_k)$ baza canonică a lui $\mathbb{R}^k$, iar $(f_1, f_2, \ldots, f_l)$ baza canonică a lui $\mathbb{R}^l$.

Dacă $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l, T = (T_1, T_2, \ldots, T_l)$ este un operator liniar, atunci, $\forall x = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$, $T(x) = T(\sum\limits_{i=1}^{k} x_i e_i) = \sum\limits_{i=1}^{k} x_i T(e_i)$.

$\forall i = \overline{1, k}, T(e_i) \in \mathbb{R}^l$, deci $T(e_i) = \sum\limits_{j=1}^{l} a_i^j f_j$.

Prin urmare, $T(x) = \sum\limits_{i=1}^{k} (\sum\limits_{j=1}^{l} a_i^j x_i f_j) = \sum\limits_{j=1}^{l} (\sum\limits_{i=1}^{k} a_i^j x_i) f_j$.

Calcule matriciale ne permit să obţinem că operatorul liniar T are forma $T(x) = A_T x, \forall x \in \mathbb{R}^k$, unde matricea

$$A_T = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \ldots & a_1^k \\ a_2^1 & a_2^2 & \ldots & a_2^k \\ ... & \ldots & \ldots & \\ a_l^1 & a_l^2 & \ldots a_l^k & \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{l,k}(\mathbb{R})$$

se numeşte *matricea asociată aplicaţiei liniare* T.

Reciproc, orice aplicaţie $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$, $T(x) = Ax, \forall x \in \mathbb{R}^k$, cu $A \in \mathcal{M}_{l,k}(\mathbb{R})$, este un operator liniar.

Exemplul 5.1.36. I) Orice aplicaţie liniară $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este de forma $T(x) = ax, \forall x \in \mathbb{R}$, cu $a \in \mathbb{R}$ fixat.

II) Aplicaţiile liniare scalare $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ sunt de forma $T(x) = a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_kx_k, \forall x = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$.

Propoziţia 5.1.37. *Orice aplicaţie liniară $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ este lipschitziană (deci uniform continuă şi deci continuă).*

Propoziţia 5.1.38. *I) Dacă $T, S : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ sunt aplicaţii liniare, atunci:*

(i) $T + S$ este aplicaţie liniară şi $A_{T+S} = A_T + A_S$;

(ii) λT este aplicaţie liniară şi $A_{\lambda T} = \lambda A_T$;

II) Dacă $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l, S : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^m$ sunt aplicaţii liniare, atunci $S \circ T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ este aplicaţie liniară şi $A_{S\circ T} = A_S \cdot A_T$.

Homeomorfisme şi izometrii

Definiţia 5.1.39. $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ se numeşte *homeomorfism* (*izomorfism topologic*) dacă f este bijectivă şi f, f^{-1} sunt continue (altfel spus, f este *bicontinuă*).

Observaţia 5.1.40. I) Dacă f este homeomorfism, atunci f^{-1} este de asemenea homeomorfism.

II) Daca există un homeomorfism între două spaţii metrice, acestea se vor numi *homeomorfe*.

Exemplul 5.1.41. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3$ este un homeomorfism.

Observaţia 5.1.42. I) Orice homeomorfism duce şi întoarce deschişi/închişi în deschişi/închişi.

II) Două spaţii homeomorfe au aceleaşi proprietăţi topologice (de aici, termenul de izomorfism topologic). Astfel, noţiuni cu caracter topologic (vecinătate a unui punct, mulţime deschisă/închisă, punct interior, aderent, de acumulare, funcţie continuă etc.) se conservă prin homeomorfisme. Noţiunile care nu au caracter topoogic (mulţimi mărginite, şir Cauchy, diametru, spaţiu metric complet etc.) nu se conservă neapărat prin homeomorfisme. De exemplu, funcţia $f : \mathbb{R} \to (-1, 1), f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ este homeomorfism, $\mathbb{R}$ este spaţiu metric complet şi nu este mulţime mărginită, dar $(-1, 1)$ nu este spaţiu metric complet şi este mulţime mărginită.

Observaţia 5.1.43. (i) Compunerea a două homeomorfisme este de asemenea homeomorfism.

(ii) $f : (\mathbb{R}, d_0) \to (\mathbb{R}, d_u), f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ este bijectivă, este continuă ($\forall D \in \tau_u, f^{-1}(D) = D \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) = \tau_{d_0}$) dar f nu este homeomorfism (f^{-1} nu este continuă: $f^{-1} : (\mathbb{R}, d_u) \to (\mathbb{R}, d_0), [0, 1) \in \tau_{d_0}$, dar $(f^{-1})^{-1}([0, 1)) = [0, 1) \notin \tau_u$).

Definiţia 5.1.44. $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ se numeşte *izometrie* dacă f este bijectivă şi

$$(*) \qquad d_2(f(x), f(y)) = d_1(x, y), \forall x, y \in X$$

(conservă distanţele).

Observaţia 5.1.45. I) Din condiţia $(*)$ rezultă că f este injectivă, deci în definiţia anterioară este suficient ca f să fie surjectivă.

II) Dacă f este izometrie, atunci şi f^{-1} este izometrie.

Definiţia 5.1.46. Două spaţii metrice se numesc *izometrice* dacă există o izometrie între ele.

Exemplul 5.1.47. I) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x, \forall x \in \mathbb{R}$ este izometrie.

II) $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$, $f(x) = x + a, \forall x \in \mathbb{R}^k$ ($a \in \mathbb{R}^k$ fixat) (translaţia) este izometrie, deoarece f este bijectivă şi $||(x+a)-(y+a)|| = ||x-y||, \forall x, y \in \mathbb{R}^k$.

Observaţia 5.1.48. Fie (X, d_1) un spaţiu metric şi $f : (X, d_1) \to Y$ o bijecţie. Definim $d_2 : Y \times Y \to \mathbb{R}_+, d_2(f(x), f(y)) = d_1(x, y), \forall x, y \in X$. Atunci d_2 este o metrică, deci $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ devine o izometrie a lui X pe Y. Astfel, de exemplu, funcţia lui Baire $f : \overline{\mathbb{R}} \to [-1, 1], f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+|x|}, & x \in \mathbb{R} \\ 1, & x = \infty \\ -1, & x = -\infty \end{cases}$ este o izometrie între $(\overline{\mathbb{R}}, \overline{d})$ şi $([-1, 1], d_u)$, unde $\overline{d}(x, y) = |f(x) - f(y)|, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Teorema 5.1.49. *Orice izometrie $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ este un homeomorfism.*

Observaţia 5.1.50. Reciproca nu este adevărată: $f : \mathbb{R} \to (-1, 1), f(x) = \frac{x}{1+|x|}, \forall x \in \mathbb{R}$ este homeomorfism al lui $(\mathbb{R}, d_u)$ pe $((-1, 1), d_u)$, dar nu este izometrie: $\exists x, y \in \mathbb{R}$ astfel ca $|f(x) - f(y)| \neq |x - y|$.

Observaţia 5.1.51. I) Deoarece orice izometrie este homeomorfism, deci conservă toate proprietăţile topologice, întrucât conservă şi sferele, rezultă că conservă şi noţiuni ca mărginirea, şiruri Cauchy, completitudine etc.

II) Funcţia limitativă a lui Baire $f : \overline{\mathbb{R}} \to [-1, 1], f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+|x|}, & x \in \mathbb{R} \\ 1, & x = \infty \\ -1, & x = -\infty \end{cases}$ este o izometrie între $(\overline{\mathbb{R}}, \overline{d})$ şi $([-1, 1], d_u)$, unde $\overline{d}(x, y) = |f(x) - f(y)|, \forall x, y \in \overline{\mathbb{R}}$. Prin urmare, $(\overline{\mathbb{R}}, \overline{d})$ poate fi identificat (din punct de vedere metric şi topologic) cu $([-1, 1], d_u)$.

Teorema 5.1.52. *Dacă (X, d_1) este compact, iar $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ este continuă şi bijectivă, atunci este un homeomorfism.*

Compararea topologiilor

Fie mulţimea $X \neq \emptyset$ înzestrată cu două distanţe d_1, d_2, iar τ_{d_1}, τ_{d_2} sunt topologiile induse de d_1 şi respectiv d_2.

Definiţia 5.1.53. *Topologia* τ_1 este *mai puţin fină decât topologia* τ_2 (τ_2 este *mai fină decât* τ_1) dacă $\tau_1 \subseteq \tau_2$. Notăm $\tau_1 \preccurlyeq \tau_2$.

Observaţia 5.1.54. Relaţia de fineţe pe mulţimea topologiilor induse de metrici pe un spaţiu X este o relaţie de ordine parţială (deoarece este definită cu ajutorul incluziunii între clase de mulţimi).

Exemplul 5.1.55. Fie $\mathbb{R}, d_u, d_0$. Atunci $\tau_u \preccurlyeq \tau_0$ (deoarece $\tau_u \subseteq \tau_0 : \forall D \in \tau_u \Rightarrow D \in \tau_0 = \mathcal{P}(\mathbb{R})$) Prin urmare, topologia discretă este cea mai fină topologie care se poate introduce pe un spaţiu.

Teorema 5.1.56. X, d_1, d_2. *Atunci* $\tau_1 \preccurlyeq \tau_2 \Leftrightarrow$ *aplicaţia identică* $i : (X, d_2) \to (X, d_1)$ *este continuă pe* X.

Corolarul 5.1.57. *Fie X, d_1, d_2. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*
(i) $\tau_1 \preccurlyeq \tau_2$;
(ii) $\forall (x_n)_n \subset X, x_n \overset{d_2}{\to} x \Rightarrow x_n \overset{d_1}{\to} x$;
(iii) orice mulţime închisă faţă de $\tau_1 = \tau_{d_1}$ este închisă faţă de $\tau_2 = \tau_{d_2}$;
(iv) $\forall V \in \mathcal{V}^1(x) \Rightarrow V \in \mathcal{V}^2(x)$.

Definiţia 5.1.58. Două *metrici* pe un spaţiu sunt *echivalente* dacă induc aceeaşi topologie.

Observaţia 5.1.59. $\tau_1 = \tau_2 \Leftrightarrow \tau_1 \preccurlyeq \tau_2$ şi $\tau_2 \preccurlyeq \tau_1 \Leftrightarrow$ aplicaţia identică $i : (X, d_2) \to (X, d_1)$ este bicontinuă $\Leftrightarrow i : (X, d_2) \to (X, d_1)$ este homeomorfism.

Observaţia 5.1.60. Proprietatea de continuitate are caracter topologic şi nu metric. De aceea, continuitatea se conservă dacă se trece de la o metrică, la o alta echivalentă. Întrucât continuitatea uniformă este o proprietate metrică, o funcţie poate fi uniform continuă în raport cu o metrică şi să nu mai fie uniform continuă în raport cu o metrică echivalentă cu ea.

Teorema 5.1.61. *Fie X, d_1, d_2. Dacă există $m, M > 0$ astfel ca*

$$** \qquad md_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq Md_1(x, y), \forall x, y \in X,$$

atunci metricile d_1 şi d_2 sunt echivalente.

Observaţia 5.1.62. Două metrici pot fi echivalente, fără a satisface $(**)$: $X = (0, \infty), d_1(x, y) = |x - y|, d_2(x, y) = |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}|, \forall x, y \in (0, \infty)$ sunt metrici pe $(0, \infty)$ care induc aceeaşi topoogie deoarece $\forall (x_n)_n \subset (0, \infty), x_n \stackrel{d_1}{\to} x \Leftrightarrow x_n \stackrel{d_2}{\to} x$.

Dacă ar satisface $(**)$, ar exista $m, M > 0$ astfel ca $m|x - y| \leq |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}| \leq M|x - y|, \forall x, y \in (0, \infty)$, ceea ce evident nu se întâmplă.

Teorema 5.1.63. *Presupunem că X este spaţiu liniar. Dacă distanţele d_1 şi d_2 provin din normele $\|\cdot\|_1$ şi respectiv $\|\cdot\|_2$, atunci $\tau_{d_1} = \tau_{d_2}$ dacă şi numai dacă există $m, M \in [0, +\infty)$ aşa încât*

$$m\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M\|x\|_1, \quad \forall x \in X.$$

Exemplul 5.1.64. Fie $X = \mathbb{R}^p$ şi distanţele următoare pe $\mathbb{R}^p$ definite pentru $\forall x, y \in \mathbb{R}^p$ prin $d_1(x, y) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{p} (x_i - y_i)^2}, d_2(x, y) = \max\limits_{i=\overline{1,p}} |x_i - y_i|, d_3(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{p} |x_i - y_i|$. Atunci aceste trei metrici sunt echivalente, deci induc aceeaşi topologie (uzuală) pe $\mathbb{R}^p$.

Într-adevăr, observăm că $\forall i = \overline{1, p}$,

$$|x_i - y_i| \leq d_1(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} (x_i - y_i)^2} \leq \sqrt{p \max_{i=\overline{1,p}} (x_i - y_i)^2} =$$
$$= \sqrt{p} \max_{i=\overline{1,p}} |x_i - y_i| = \sqrt{p} d_2(x, y),$$

deci $d_2(x,y) \le d_1(x,y) \le \sqrt{p}d_2(x,y), \forall x,y \in \mathbb{R}^p$, de unde $\tau_{d_1} = \tau_{d_2}$.
Apoi,

$$d_2(x,y) = \max_{i=\overline{1,p}}|x_i - y_i| \le d_3(x,y) = \sum_{i=1}^{p}|x_i - y_i| \le p\max_{i=\overline{1,p}}|x_i - y_i| = pd_2(x,y),$$

$\forall x,y \in \mathbb{R}^p$, de unde $\tau_{d_2} = \tau_{d_3}$.

5.2 Probleme rezolvate

5.2.1. Cercetaţi existenţa limitei în $(0,0)$ pentru funcţia $f : \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2, f(x,y) = (\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\frac{1}{x^2+y^2}, \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{x^2+y^2}), \forall (x,y) \ne (0,0)$.

Soluţie 5.2.1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\frac{1}{x^2+y^2} = 0$ şi $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{x^2+y^2} = 0$ ($\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$, iar $\sin\frac{1}{x^2+y^2}, \cos\frac{1}{x^2+y^2} \in [-1,1]$).

Prin urmare, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = (0,0)$.

5.2.2. Calculaţi $\lim\limits_{x\to 0} f(x), f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, f(x) = (\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}, (\frac{a^x+b^x}{2})^{\frac{1}{x}}, \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x})$, $a,b,\alpha,\beta > 0, m,n \in \mathbb{N}^*, m,n \ge 2$.

Soluţie 5.2.2.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}}{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}} = \frac{3}{2}$$

(s-a aplicat regula lui lospital) (Altfel, amplificând fracţia cu expresiile conjugate sau transformând radicalii în puteri şi folosind limita remarcabilă $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^r-1}{x} = r$.

$$\lim_{x\to 0}(\frac{a^x+b^x}{2})^{\frac{1}{x}} \overset{[1^\infty]}{=} \lim_{x\to 0}[(1+\frac{a^x+b^x-2}{2})^{\frac{2}{a^x+b^x-2}}]^{\frac{a^x+b^x-2}{2x}} =$$
$$= e^{\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1+b^x-1}{x}} = e^{\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)} = e^{\ln\sqrt{ab}} = \sqrt{ab}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\alpha}{m\sqrt{(1+\alpha x)^{m-1}}}}{\frac{\beta}{n\sqrt[n]{(1+\beta x)^{n-1}}}} = \frac{\alpha}{\beta}$$

(s-a aplicat regula lui lospital) (Altfel, amplificând fracţia cu expresiile conjugate sau transformând radicalii în puteri şi folosind limita remarcabilă $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^r-1}{x} = r$.

Prin urmare, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = (\frac{3}{2}, \sqrt{ab}, \frac{\alpha}{\beta})$.

5.2.3. Studiaţi continuitatea pe $\mathbb{R}^2$ a funcţiilor următoare:

i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 \sin y}{x^2+y^2}, (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, (x, y) = (0, 0) \end{cases}$;

ii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \ln(1+y^2)}{x^2+y^2}, (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, (x, y) = (0, 0) \end{cases}$;

iii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \ln(1+y^2) - x \sin y}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$;

iv) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \sin x + y \sin y + z \sin z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, & (x, y, z) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y, z) = (0, 0) \end{cases}$.

Soluţie 5.2.3. i) Evident f este continuă pe $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$ (compunere de funcţii elementare).

Studiem continuitatea în $(0, 0)$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 \sin y}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2} \cdot \sin y = 0$$

$(\frac{x^2}{x^2+y^2} \in [0, 1], \sin y \underset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0)$, deci $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = f(0, 0)$, ceea ce arată că f este continuă în $(0, 0)$.

În consecinţă, f este continuă pe $\mathbb{R}^2$.

ii) Evident f este continuă pe $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$ (compunere de funcţii elementare).

Studiem continuitatea în $(0, 0)$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x \ln(1 + y^2)}{|x| + |y|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{|x| + |y|} \cdot \ln(1+y^2) = 0$$

$(\frac{x}{|x|+|y|} \in [-1, 1], \ln(1 + y^2) \underset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0)$, deci $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = f(0, 0)$, ceea ce arată că f este continuă în $(0, 0)$.

Deci f este continuă pe $\mathbb{R}^2$.

iii) Evident f este continuă pe $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$ (compunere de funcţii elementare).

Studiem continuitatea în $(0,0)$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\ln(1+y^2) - x\sin y}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$
$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} [\frac{x\ln(1+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x\sin y}{\sqrt{x^2+y^2}}] = 0$$

$(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \in [-1,1], \ln(1+y^2) \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$ şi $\sin y \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0)$, deci $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$, ceea ce arată că f este continuă în $(0,0)$.

În consecinţă, f este continuă pe $\mathbb{R}^2$.

iv) Evident f este continuă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0,0)\}$ (compunere de funcţii elementare).

Studiem continuitatea în $(0,0,0)$:

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x\sin x + y\sin y + z\sin z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} =$$
$$= \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} [\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cdot \sin x +$$
$$+ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cdot \sin y + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cdot \sin z] = 0$$

$(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \in [-1,1], \sin x \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0, \sin y \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0, \sin z \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0)$,

deci $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$, ceea ce arată că f este continuă în $(0,0)$.

Aşadar f este continuă pe $\mathbb{R}^2$.

5.2.4. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = (y,x), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Arătaţi că funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}^2$.

Soluţie 5.2.4. Mulţimea

$$N = \{x \in \mathbb{R}^k; f(x) < g(x)\} = \{x \in \mathbb{R}^k; (f-g)(x) < 0\} = (f-g)^{-1}(\{0\})$$

este închisă deoarece mulţimea $\{0\}$ este închisă, iar funcţia $f-g$ este continuă.

5.2.5. Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aplicaţii continue pe $\mathbb{R}$ şi fie $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, h(x,y) = (f(x), g(y)), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Arătaţi că funcţia h este continuă pe $\mathbb{R}^2$.

Soluţie 5.2.5. Fie $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ oarecare. Vom arăta că f este continuă în (x_0, y_0) folosind caracterizarea cu şiruri. Considerăm aşadar un şir arbitrar $(x_n, y_n) \subset \mathbb{R}^2$, cu $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$. Aceasta înseamnă, echivalent, că $x_n \to x_0$ şi $y_n \to y_0$.

Deoarece f este continuă pe $\mathbb{R}$, este continuă în particular şi în x_0, deci $f(x_n) \to f(x_0)$. Analog, deoarece g este continuă pe $\mathbb{R}$, este continuă în particular şi în y_0, deci $g(y_n) \to g(y_0)$.

Prin urmare, $h(x_n, y_n) = (f(x_n), g(y_n)) \to (f(x_0), g(y_0)) = h(x_0, y_0)$, ceea ce înseamnă că h este continuă în (x_0, y_0), arbitrar. În consecinţă, h este continuă pe $\mathbb{R}^2$.

5.2.6. Arătaţi că mulţimea $K = \{(x, y); (x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)\} \subset \mathbb{R}^2$ este compactă.

Soluţie 5.2.6. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2)$. Evident, funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}^2$. Observăm că $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; f(x, y) = 0\} = f^{-1}(\{0\})$.

Întrucât mulţimea $\{0\}$ este închisă, iar funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ este continuă pe $\mathbb{R}^2$, rezultă că mulţimea $f^{-1}(\{0\}) = K$ este închisă, deci rămâne să stabilim că este mărginită. Pentru aceasta, este convenabil să folosim scrierea în coordonate polare $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$ $, \rho > 0, \theta \in [0, 2\pi).$

Înlocuind în relaţia $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$, obţinem că $\rho^4 = 2\rho^2\cos 2\theta$, deci $\rho^2 = 2\cos 2\theta$, ceea ce implică $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{2}$, adică, echivalent $\|(x, y)\| \leq \sqrt{2}, \forall (x, y) \in K$, deci mulţimea K este mărginită.

Observaţie. O altă metodă de a arăta faptul că mulţimea K este închisă este să folosim caracterizarea cu şiruri a acestei proprietăţi. Fie deci un şir oarecare $((x_n, y_n))_n \subset K$, cu $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$. Trebuie să arătăm că $(x_0, y_0) \in K$.

Deoarece $((x_n, y_n))_n \subset K$, aceasta înseamnă că $\forall n, (x_n^2 + y_n^2)^2 = 2(x_n^2 - y_n^2)$. Trecând în această egalitate la limită, întrucât $x_n \to x_0$ şi $y_n \to y_0$, obţinem că $(x_0^2 + y_0^2)^2 = 2(x_0^2 - y_0^2)$, adică $(x_0, y_0) \in K$. Prin urmare, mulţimea K este închisă.

5.2.7. Fie $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Arătaţi că mulţimea $M = \{x \in \mathbb{R}^k; f(x) \geq 0\}$ este închisă.

Soluţie 5.2.7. *Metoda I.* Mulţimea $M = \{x \in \mathbb{R}^k; f(x) \geq 0\} = f^{-1}(\{0\})$ este închisă deoarece mulţimea $\{0\}$ este închisă, iar funcţia f este continuă.

Metoda II. Vom folosi caracterizarea cu şiruri a proprietăţii unei mulţimi de a fi închisă. Fie deci $(x_n)_n \subset M$, cu $x_n \to x_0$, oarecare. Atunci $\forall n \in$

$\mathbb{N}, f(x_n) \geq 0$. Trecând la limită şi ţinând seama de continuitatea funcţiei f, rezultă că $f(x_0) \geq 0$, deci $x_0 \in M$. Prin urmare, mulţimea M este închisă.

5.2.8. Fie $f, g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ funcţii continue. Arătaţi că mulţimea $N = \{x \in \mathbb{R}^k; f(x) < g(x)\}$ este deschisă.

Soluţie 5.2.8. Fie $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ oarecare. Vom arăta că f este continuă în (x_0, y_0) folosind caracterizarea cu şiruri. Considerăm aşadar un şir arbitrar $(x_n, y_n) \subset \mathbb{R}^2$, cu $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$. Deoarece $f(x_n, y_n) = (y_n, x_n) \to (y_0, x_0) = f(x_0, y_0)$, rezultă că într-adevăr f este continuă în (x_0, y_0), arbitrar. În consecinţă, f este continuă pe $\mathbb{R}^2$.

5.2.9. Arătaţi că funcţia $d : \mathbb{R}^k x \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}_+, d(x, y) = \|x - y\|, \forall x, y \in \mathbb{R}^k$, este continuă pe $\mathbb{R}^k x \mathbb{R}^k$.

Soluţie 5.2.9. Vom folosi caracterizarea cu şiruri a continuităţii unei funcţii într-un punct. Fie $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^k X \mathbb{R}^k$ oarecare şi $((x_n, y_n))_n \subset \mathbb{R}^k X \mathbb{R}^k$, cu $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$, arbitrar. Prin urmare, $x_n \to x_0$ şi $y_n \to y_0$, deci $d(x_n, x_0) \to 0$ şi $d(y_n,\, y_0) \to 0$.

Întrucât $\forall n \in \mathbb{N}, |d(x_n, y_n) - d(x_0, y_0)| \leq d(x_n, x_0) + d(y_n,\, y_0)$, trecând la limită şi folosind criteriul majorării de la şiruri numerice rezultă că $d(x_n, y_n) \to d(x_0, y_0)$.

Aşadar, funcţia $d : \mathbb{R}^k X \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}_+$ este continuă în $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^k X \mathbb{R}^k$ arbitrar, deci pe $\mathbb{R}^k X \mathbb{R}^k$.

5.2.10. Arătaţi că funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ următoare sunt lipschitziene pe $\mathbb{R}$:
a) $f(x) = \sin x$; b) $f(x) = \cos x$; c) $f(x) = arctgx$.

Soluţie 5.2.10. a) $|f(x)| = |\sin x| \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$, deci funcţia este lipschitziană.

b) $|f(x)| = |\cos x| \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$, deci funcţia este lipschitziană.

c) $|f(x)| = \frac{1}{1+x^2} \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$, deci funcţia este lipschitziană.

5.2.11. Arătaţi că funcţia $f : (0, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}, \forall x \in (0, 1]$, este continuă, dar nu este uniform continuă pe $(0, 1]$.

Soluţie 5.2.11. *Metoda I.* $A = (0, 1]$ este mulţime relativ compactă, funcţia f este continuă pe mulţimea A, dar nu poate fi prelungită prin continuitate la $\overline{A} = [0, 1]$ ($\lim\limits_{x \to 0, x > 0} \frac{1}{x} = \infty$). Prin urmare, f nu este uniform continuă pe A.

Metoda II. Presupunem prin reducere la absurd că f este uniform continuă pe A, deci, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$ astfel încât $\forall x, y \in A$, cu $|x - y| < \delta$, avem $|f(x) - f(y)| = |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}| = |\frac{x-y}{xy}| < \varepsilon$.

În particular, pentru $\varepsilon = \frac{1}{2}, \exists \delta_1 > 0$ astfel încât $\forall x, y \in A$, cu $|x-y| < \delta_1$, avem $\frac{|x-y|}{xy} < \frac{1}{2}$.

Întrucât $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ aşa ca $\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1} \in (0,1]$ şi $|\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}| < \delta_1$, $\forall n \geq n_0$. Prin urmare, $\frac{|\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}|}{\frac{1}{n}\frac{1}{n+1}} = 1 < \frac{1}{2}$, contradicţie. Aşadar f nu este uniform continuă pe A.

Metoda III. Vom folosi caracterizarea cu şiruri a proprietăţii de uniformă continuitate. Observăm că există $(x_n)_n, (y_n)_n \subset (0,1]$, $x_n = \frac{1}{n}, y_n = \frac{1}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ aşa ca $|x_n - y_n| = |\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}| \to 0$, dar $|f(x_n) - f(y_n)| = \frac{|\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}|}{\frac{1}{n}\frac{1}{n+1}} = 1 \to 1 \neq 0$, deci f nu este uniform continuă pe A.

5.2.12. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x,y) = (x-y, x+y), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

a) Arătaţi că funcţia f este lipschitziană pe $\mathbb{R}^2$.

b) Determinaţi imaginea prin f a cercului $\mathcal{C}((0,0),1)$.

Soluţie 5.2.12. i) $\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}
&\|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)\| = \|(x_1-y_1, x_1+y_1) - (x_2-y_2, x_2+y_2) = \\
&= \sqrt{[(x_1-x_2)-(y_1-y_2)]^2 + [(x_1-x_2)+(y_1-y_2)]^2} = \\
&= \sqrt{2[(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2]} = \sqrt{2} \cdot \|(x_1,y_1) - (x_2,y_2)\|,
\end{aligned}$$

deci f este lipschitziană pe $\mathbb{R}^2$.

ii) $\forall (x,y) \in \mathcal{C}((0,0),1) \rightsquigarrow f(x,y) \overset{\text{not.}}{=} (x_1,y_1)$, unde $x_1 = x-y, y_1 = x+y$, deci $x = \frac{x_1+y_1}{2}, y = \frac{-x_1+y_1}{2}$

Dar $x^2 + y^2 = 1$, de unde, efectuând calculele, se obţine că $x_1^2 + y_1^2 = 1$, adică $(x_1,y_1) \in \mathcal{C}((0,0),\sqrt{2})$.

Prin urmare, $f(\mathcal{C}((0,0),1)) = \mathcal{C}((0,0),\sqrt{2})$.

5.2.13. Cercetaţi dacă funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \sin\sqrt{x^2+y^2}$ este lipschitziană pe $\mathbb{R}^2$.

Soluţie 5.2.13. $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)\| = |\sin\sqrt{x_1^2+y_1^2} - \sin\sqrt{x_2^2+y_2^2}| =$$
$$= |2\sin\frac{\sqrt{x_1^2+y_1^2}-\sqrt{x_2^2+y_2^2}}{2}\cos\frac{\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}}{2}| \leq$$
$$\underset{|\cos t|\leq 1}{\leq} 2|\sin\frac{\sqrt{x_1^2+y_1^2}-\sqrt{x_2^2+y_2^2}}{2}| \underset{|\sin t|\leq |t|}{\leq}$$
$$\leq 2|\frac{\sqrt{x_1^2+y_1^2}-\sqrt{x_2^2+y_2^2}}{2}| = |\sqrt{x_1^2+y_1^2}-\sqrt{x_2^2+y_2^2}| \leq$$
$$\leq \frac{|x_1-x_2|\cdot|x_1+x_2|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}} + \frac{|y_1-y_2|\cdot|y_1+y_2|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}} \leq$$
$$\leq |x_1-x_2|\cdot(\frac{|x_1|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}}+$$
$$+\frac{|x_2|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}})+$$
$$+|y_1-y_2|\cdot(\frac{|y_1|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}}+$$
$$+\frac{|y_2|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}}) \leq$$
$$\leq 2(|x_1-x_2|+|y_1-y_2|) \underset{a+b\leq\sqrt{2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}}{\leq}$$
$$\leq 2\sqrt{2}\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} = \sqrt{2}\cdot\|(x_1,y_1)-(x_2,y_2)\|,$$

ceea ce înseamnă că f este lipschitziană pe $\mathbb{R}^2$.

5.2.14. Fie mulţimea $A = \{(x,y); x^2+y^2 \leq 4, y \geq x+1\}$ şi fie funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} \frac{x\sin y + y\sin x}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$ Arătaţi că:

(i) Mulţimea A este compactă.
(ii) Funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}^2$.
(iii) Este f uniform continuă pe A?
(iv) Este mulţimea $f(A)$ compactă şi conexă?

Soluţie 5.2.14. ———

5.2.15. Arătaţi că funcţia $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, f(x) = \sqrt{x}$ este uniform continuă, dar nu este lipschitziană. Aceeaşi problemă, mai general, pentru $f : \mathbb{R}_+ X \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

Soluţie 5.2.15. Evident, funcţia $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, f(x) = \sqrt{x}$ este uniform continuă pe $[0,1]$. Conform Teoremei..., este suficient să stabilim că este uniform continuă şi pe $[1,\infty)$, ceea ce rezultă imediat întrucât $\forall x, y \geq 1$,

$$|f(x) - f(y)| = |\sqrt{x} - \sqrt{y}| = |\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}| \leq \frac{1}{2}|x-y|,$$

deci funcţia este lipschitziană şi în consecinţă este uniform continuă pe $[1,\infty)$.

Aşadar f este uniform continuă pe $[0,\infty)$.

Să arătăm acum că f nu este lischitziană pe $[0,\infty)$. Într-adevăr, dacă presupunem prin reducere la absurd că există $L > 0$ aşa ca $|f(x)-f(y)| \leq L \cdot |x-y|, \forall x, y \geq 0$, rezultă în particular că $\sqrt{x} \leq L \cdot x, \forall x \geq 0$, adică, echivalent, $x \geq \frac{1}{L^2}, \forall x \geq 0$, ceea ce este fals. În concluzie, f nu este lischitziană pe $[0,\infty)$.

5.2.16. Arătaţi că funcţiile următoare sunt uniform continue pe domeniul de definiţie:

(i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases};$

(ii) $f : (1,2)X(1,2) \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \frac{x}{y}$.

Soluţie 5.2.16. (i) Observăm că $f = g \circ u$, unde $u = u(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}, u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$, iar $g(u) = \begin{cases} u\sin\frac{1}{u}, & u > 0 \\ 0, & u = 0 \end{cases}, g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$.

Vom arăta că ambele funcţii g şi u sunt uniform continue pe domeniile lor de definiţie, de unde va rezulta, conform Teoreme..., că şi compunerea lor f este uniform continuă.

Pentru început, să stabilim chiar mai mult, că funcţia u este lipschitziană pe $\mathbb{R}^2$.

Într-adevăr, $\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}
&|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| = \\
&= |\sqrt{x_1^2+y_1^2} - \sqrt{x_2^2+y_2^2}| = \frac{|x_1^2+y_1^2-x_2^2-y_2^2|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}} \leq \\
&\leq \frac{|x_1-x_2|\cdot|x_1+x_2|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}} + \frac{|y_1-y_2|\cdot|y_1+y_2|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}} \leq \\
&\leq 2(|x_1-x_2|+|y_1-y_2|) \leq 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_2-y_1)} = \\
&= 2\sqrt{2}\cdot\|(x_1,y_1)-(x_2,y_2)\|,
\end{aligned}$$

ceea ce arată că u este lipschitziană, deci uniform continuă pe $\mathbb{R}^2$.

Să remarcăm acum că funcţia g este continuă pe $\mathbb{R}_+$, deci este uniform continuă pe intervalul compact $[0,1]$. Conform Teoremei..., este suficient să demonstrăm că g este uniform continuă pe $[1,\infty)$. Pentru aceasta, observăm că g este derivabilă pe $[1,\infty)$, cu $|g'(u)| = |\sin\frac{1}{u} - \frac{1}{u}\cos\frac{1}{u}| \leq 2$, $\forall u > 0$, ceea ce arată că g este derivabilă cu derivata mărginită pe $[1,\infty)$. În consecinţă, g este lipschitziană, deci uniform continuă pe $[1,\infty)$.

(ii) *Metoda I.* Vom arăta, mai mult, că funcţia este lipschitziană pe $(1,2)X(1,2)$.

Într-adevăr, $\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in (1,2)\times(1,2)$,

$$\begin{aligned}
|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| &= |\frac{x_1}{y_1} - \frac{x_2}{y_2}| = |\frac{x_1y_2 - x_2y_1}{y_1y_2}| < |x_1y_2 - x_2y_1| = \\
&= |(x_1-x_2)y_2 + x_2(y_2-y_1)| \leq |x_1-x_2|y_2 + x_2|y_2-y_1| < \\
&< 2(|x_1-x_2| + |y_2-y_1|) \leq 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_2-y_1)} = \\
&= 2\sqrt{2}\cdot\|(x_1,y_1) - (x_2,y_2)\|,
\end{aligned}$$

ceea ce arată că f este lipschitziană, deci uniform continuă pe $(1,2)\times(1,2)$.

Metoda II. Evident $A = (1,2)\times(1,2)$ este mulţime relativ compactă, iar f este continuă pe $(1,2)\times(1,2)$ şi poate fi prelungită prin continuitate la $\overline{A} = [1,2]\times[1,2]$, considerând funcţia $\widetilde{f}(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{y}, & (x,y)\in(1,2)\times(1,2) \\ \frac{1}{y}, & x=1, y\in(1,2) \\ \frac{x}{2}, & x\in(1,2), y=2 \\ \frac{1}{2}, & x=1, y=2 \end{cases}$.

Observăm imediat că funcţia $\widetilde{f}$ este continuă pe $[1,2]\times[1,2]$ şi $\widetilde{f} = f$ pe $(1,2)\times(1,2)$.

Prin urmare, f este uniform continuă pe $(1,2)\times(1,2)$.

5.3 Probleme propuse

5.3.1. Arătaţi că există funcţii continue pe X, $f : (X,d_1) \to (Y,d_2)$ şi $A \subseteq X$, A necompactă aşa încât $f(A)$ este necompactă.

5.3.2. $(\overline{\mathbb{R}}, \overline{\tau_0})$ este spaţiu compact.

Soluţii

$\boxed{\textbf{5.3.1.}}$ (i) Fie $f : (0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$.

f este continuă pe mulţimea mărginită $(0,1]$, dar $f((0,1]) = [1,\infty)$ nu este mărginită;

(ii) Fie $f : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), f(x) = arctgx$.

f este continuă pe mulţimea închisă $\mathbb{R}$, dar $f(\mathbb{R}) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ este mulţime deschisă

$\boxed{\textbf{5.3.2.}}$ Funcţia lui Baire este izometrie, deci f^{-1} este de asemenea izometrie.

Deoarece $f^{-1} : ([-1,1], \tau_u) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\tau_0})$ este continuă, iar $([-1,1], \tau_u)$ este compact, rezultă că $(\overline{\mathbb{R}}, \overline{\tau_0})$ este compact.

Capitolul 6

Diferenţiabilitate

6.1 Consideraţii teoretice

Fie $D \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă, $F : D \to \mathbb{R}^q, a \in D$ (deci $\exists\ S(a,r) \subset D$).

Definiţia 6.1.1. i) Funcţia F se numeşte *diferenţiabilă în punctul a* dacă există un operator liniar $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ astfel încât

$$(D) \lim_{x \to a} \frac{F(x) - F(a) - T(x-a)}{\|x-a\|} = 0.$$

ii) Funcţia F se numeşte *diferenţiabilă pe D* dacă este diferenţiabilă în orice punct din D.

Observaţia 6.1.2. i) Notând $x - a = h$, (D) se poate scrie sub forma echivalentă

$$(D') \lim_{h \to 0} \frac{F(a+h) - F(a) - T(h)}{\|h\|} = 0.$$

ii) Notând $\alpha(x) = \begin{cases} \frac{F(x)-F(a)-T(x-a)}{\|x-a\|}, & x \neq a \\ 0, & x = a \end{cases}$, atunci (D) se poate scrie sub forma echivalentă: $\forall x \in D$,

$$(D'')\ F(x) = F(a) + T(x-a) + \alpha(x) \cdot \|x-a\|,$$

unde $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = \alpha(a) = 0$, sau, echivalent,

$$(D''')\ F(a+h) = F(a) + T(h) + \alpha(a+h) \cdot \|h\|,$$

$\forall h \in \mathbb{R}^n$, cu $a + h \in D$ şi $\lim\limits_{h \to 0} \alpha(a+h) = \alpha(a) = 0$.

Definiţia 6.1.3. *Numim diferenţiala funcţiei F în punctul a, aplicaţia liniară $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, T \overset{not}{=} dF(a), \forall h \in \mathbb{R}^n \rightsquigarrow dF(a)(h) \in \mathbb{R}^m$ (diferenţiala lui F în punctul a calculată în h).*

Observaţia 6.1.4. Dacă $m = 1, n = 1$, se obţine definiţia diferenţiabilităţii (care echivalează cu definiţia derivabilităţii) pentru funcţii reale de o variabilă reală.

Teorema 6.1.5. *Dacă există, diferenţiala unei funcţii într-un punct este unică.*

În continuare vom evidenţia condiţii necesare de diferenţiabilitate.

Teorema 6.1.6 (legătura dintre diferenţiabilitate şi continuitate)**.** *Orice funcţie $F : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenţiabilă într-un punct $a \in D$ este continuă în a.*

(Prin urmare, dacă o funcţie nu este continuă într-un punct, nu este nici diferenţiabilă în acel punct).

Observaţia 6.1.7. Reciproca teoremei anterioare nu este adevărată: există funcţii continue într-un punct, care nu sunt diferenţiabile în punctul respectiv (a se vedea exemplul următor).

Teorema 6.1.8 (legătura dintre diferenţiabilitate şi derivabilitatea după o direcţie)**.** *Dacă $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ este diferenţiabilă în $a \in D$, atunci f este derivabilă în a după orice direcţie $u \neq 0$ şi*

$$df(a)(u) = \frac{df}{du}(a).$$

Observaţia 6.1.9. Reciproca acestui rezultat nu este adevărată (există funcţii derivabile după orice vector, dar care nu sunt continue, deci nici diferenţiabile într-un punct).

Teorema 6.1.10. [legătura dintre diferenţiabilitate şi derivabilitatea parţială]

Dacă $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ este diferenţiabilă în $a \in D$, atunci f este derivabilă parţial în raport cu orice variabilă în a şi

$$df(a)(h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i, \forall h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Vom pune în evidenţă condiţii suficiente de diferenţiabilitate.

Teorema 6.1.11 (criteriu de diferenţiabilitate). *Fie $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in D$. Dacă f este parţial derivabilă în raport cu toate variabilele pe o vecinătate $V = V(a) \subset D$ şi dacă toate derivatele sale parţiale sunt continue în a, atunci f este diferenţiabilă în a.*

Definiţia 6.1.12. Fie $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Spunem că f *este de clasă $\mathcal{C}^1$ pe D* (şi notăm aceasta prin $f \in \mathcal{C}^1(D)$) dacă f este parţial derivabilă în raport cu toate variabilele pe D şi toate derivatele sale parţiale sunt continue pe D.

Teorema 6.1.13. Dacă $f \in \mathcal{C}^1(D)$, atunci f este diferenţiabilă pe D.

Reciproca acestui rezultat nu este adevărată (a se vedea exerciţiul propus 2).

Teorema 6.1.14 (de reducere la componente pentru funcţii vectoriale). *O funcţie $F = (f_1, f_2, \ldots, f_m) : D_{deschis} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este diferenţiabilă în $a \in D$ dacă şi numai dacă toate funcţiile componente $f_1, f_2, \ldots, f_m : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sunt diferenţiabile în a. Mai mult, diferenţierea se face pe componente:*

$$dF(a)(h) = (df_1(a)(h), df_2(a)(h), \ldots, df_m(a)(h)), \forall h \in \mathbb{R}^n.$$

Fie acum $F = (f_1, f_2, \ldots, f_m) : D_{deschis} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenţiabilă în punctul $a \in D$. Atunci $\forall i = \overline{1, m}$, $f_i : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ este diferenţiabilă, deci derivabilă parţial în raport cu toate variabilele în $a \in D$.

Introducem matricea asociată diferenţialei $T = dF(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (care este operator liniar) a funcţiei F în punctul $a \in D$:

$$J_F(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) \ \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) \ \ldots \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) \ \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) \ \ldots \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \ldots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) \ \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) \ \ldots \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$$

numită *matricea jacobiană a funcţiei F în punctul a.*

(denumirea este dată în onoarea matematicianului german Carl Jacobi).

Evident, dacă $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, atunci $J_f(a) = f'(a)$.

În situaţia în care $m = n$, $J_F(a)$ este matrice pătratică, iar

$$\det J_F(a) = \frac{D(f_1, \ldots f_n)}{D(x_1, \ldots x_n)}(a) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) \ \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) \ \ldots \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) \ \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) \ \ldots \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \ldots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) \ \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(a) \ \ldots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(a) \end{vmatrix}$$

se numeşte *determinantul jacobian (jacobianul) (determinantul funcţional) al lui F în a.*

Acesta va juca pentru funcţii vectoriale $F : D_{deschis} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, un rol asemănător celui jucat de derivată pentru funcţii $f : D_{deschis} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Exemplul 6.1.15. I. Coordonate polare.

Fie funcţia vectorială $F : \mathbb{R}_+ X[0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2, F(\rho, \theta) = (\rho \cos\theta, \rho \sin\theta), \forall (\rho, \theta) \in \mathbb{R}_+ X[0, 2\pi)$.

F exprimă legătura dintre coordonatele carteziene şi coordonatele polare în plan: $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta, \end{cases} \quad \rho > 0, \theta \in [0, 2\pi)$.

F este diferenţiabilă pe $D_{deschis} \subset \mathbb{R}_+ X[0, 2\pi)$ deoarece $f_1, f_2 : \mathbb{R}_+ X[0, 2\pi) \to \mathbb{R}$ sunt diferenţiabile pe D (fiind de clasă $\mathcal{C}^1$), unde $f_1(\rho, \theta) = \rho\cos\theta, f_2(\rho, \theta) = \rho\sin\theta$.

$$J_F(\rho,\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \rho} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \rho} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix},$$

$$\det J_F(\rho,\theta) = \frac{D(f_1,f_2)}{D(\rho,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = \rho.$$

II. Coordonate cilindrice

Fie funcţia vectorială $F : \mathbb{R}_+ X[0, 2\pi) X\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, F(\rho, \theta, z) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)$.

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases}, \rho > 0, \theta \in [0, 2\pi), z \in \mathbb{R}.$$

F este diferenţiabilă pe $D_{deschis} \subset \mathbb{R}_+ X[0, 2\pi) X\mathbb{R}$ deoarece $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R}_+ X[0, 2\pi) X\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt diferenţiabile pe D (fiind de clasă $\mathcal{C}^1$), unde $f_1(\rho, \theta, z) = \rho\cos\theta, f_1(\rho, \theta, z) = \rho\sin\theta, f_3(\rho, \theta, z) = z$.

$$J_F(\rho,\theta,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \rho} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \rho} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial \rho} & \frac{\partial f_3}{\partial \theta} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\det J_F(\rho,\theta,z) = \frac{D(f_1,f_2,f_3)}{D(\rho,\theta,z)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = \rho.$$

III. Coordonate sferice

Fie funcţia vectorială $F : \mathbb{R}_+ X[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] X[0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3, F(\rho, \varphi, \theta) = (\rho\cos\varphi\cos\theta, \rho\cos\varphi\sin\theta, \rho\sin\varphi)$.

F exprimă legătura dintre coordonatele carteziene şi coordonatele polare în spaţiu: $\begin{cases} x = \rho \cos\varphi \cos\theta \\ y = \rho \cos\varphi \sin\theta \\ z = \rho \sin\varphi \end{cases}$ $, \rho > 0, \varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \theta \in [0, 2\pi).$

F este diferenţiabilă pe $D_{deschis} \subset \mathbb{R}_+ X[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]X[0, 2\pi)$ deoarece $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R}_+ X[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]X[0, 2\pi) \to \mathbb{R}$ sunt diferenţiabile pe D (fiind de clasă $\mathcal{C}^1$), unde $f_1(\rho, \varphi, \theta) = \rho \cos\varphi \cos\theta, f_2(\rho, \varphi, \theta) = \rho \cos\varphi \sin\theta, f_3(\rho, \varphi, \theta) = \rho \sin\varphi.$

$$J_F(\rho, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \rho} & \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \rho} & \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f_3}{\partial \rho} & \frac{\partial f_3}{\partial \varphi} & \frac{\partial f_3}{\partial \theta} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\varphi \cos\theta & -\rho \sin\varphi \cos\theta & -\rho \cos\varphi \sin\theta \\ \cos\varphi \sin\theta & -\rho \sin\varphi \sin\theta & \rho \cos\varphi \cos\theta \\ \sin\varphi & \rho \cos\varphi & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det J_F(\rho, \varphi, \theta) = \frac{D(f_1, f_2, f_3)}{D(\rho, \varphi, \theta)} =$$

$$= \begin{vmatrix} \cos\varphi \cos\theta & -\rho \sin\varphi \cos\theta & -\rho \cos\varphi \sin\theta \\ \cos\varphi \sin\theta & -\rho \sin\varphi \sin\theta & \rho \cos\varphi \cos\theta \\ \sin\varphi & \rho \cos\varphi & 0 \end{vmatrix} = -\rho^2 \cos\varphi.$$

Propoziţia 6.1.16. *Fie $D \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă.*

i) Dacă $F, G : D \to \mathbb{R}^m$ sunt diferenţiabile în $a \in D$, atunci:

a) $F + G$ este diferenţiabilă în a şi

$$d(F + G)(a) = dF(a) + dG(a);$$

b) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda F$ este diferenţiabilă în a şi $d(\lambda F)(a) = \lambda dF(a)$;

ii) Dacă $F : D \to \mathbb{R}, G : D \to \mathbb{R}^m$ sunt diferenţiabile în $a \in D$, atunci FG este diferenţiabilă în a şi

$$d(F \cdot G)(a) = F(a) \cdot dG(a) + G(a) \cdot dF(a).$$

Teorema 6.1.17 (a diferenţiabilităţii compuse)**.** *(legea lanţului) Fie $F : D_{deschis} \subset \mathbb{R}^n \to \Delta_{deschis} \subset \mathbb{R}^m, G : \Delta \to \mathbb{R}^p$ şi $a \in D$. Dacă F este diferenţiabilă în a şi G este diferenţiabilă în $b = F(a) \in \Delta$, atunci aplicaţia compusă $G \circ F : D \to \mathbb{R}^p$ este diferenţiabilă în a şi*

$$d(G \circ F)(a) = dG(F(a)) \circ dF(a).$$

Teorema 6.1.18. În condiţiile teoremei anterioare,

$$\underbrace{J_{G\circ F}(a)}_{\in\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})} = \underbrace{J_G(F(a))}_{\in\mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{R})}\cdot \underbrace{J_F(a)}_{\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})}.$$

Observaţia 6.1.19. Formula anterioară exprimă concentrat toate regulile posibile de derivare (parţială) compusă pe care le vom obţine prin particularizări convenabile. Derivatele parţiale compuse se utilizează în teoremele ecuaţiilor cu derivate parţiale, la transformarea ecuaţiilor diferenţiale prin schimbări de variabile etc.

Teorema 6.1.20. În condiţiile teoremei anterioare, dacă în particular $m = n = p$, $F = (f_1, f_2, \ldots, f_n), G = (g_1, g_2, \ldots, g_n), H = G\circ F = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$, unde
$h_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g_i(\underbrace{f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)}_{y_1}, \underbrace{f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)}_{y_2}, \ldots, \underbrace{f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)}_{y_n}), \forall i = \overline{1, n}$, atunci

$$\frac{D(h_1, h_2, \ldots, h_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}(a) = \frac{D(g_1, g_2, \ldots, g_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}(b)\cdot \frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}(a).$$

Teorema 6.1.21. Fie $f : D_{deschis} \subset \mathbb{R} \to \Delta_{deschis} \subset \mathbb{R}^2, f(t) = (u(t), v(t)), \forall t \in D, g : \Delta \to \mathbb{R}$. Dacă f este diferenţiabilă pe D şi g este diferenţiabilă pe Δ, atunci $h = g \circ f : D \to \mathbb{R}, h(t) = g(f(t)) = g(u(t), v(t))$ este derivabilă pe D şi

$$h'(t) = \frac{\partial g}{\partial u}\cdot u'(t) + \frac{\partial g}{\partial v}\cdot v'(t), \forall t \in D.$$

Teorema 6.1.22. Fie $F : D_{deschis} \subset \mathbb{R}^2 \to \Delta_{deschis} \subset \mathbb{R}^2$,
$F(x, y) = (u(x, y), v(x, y)), \forall (x, y) \in D, G : \Delta \to \mathbb{R}$.

Dacă F este diferenţiabilă pe D şi G este diferenţiabilă pe Δ, atunci $H = G\circ F : D \to \mathbb{R}, H(x, y) = G(F(x, y)) = G(u(x, y), v(x, y))$ este diferenţiabilă pe D şi

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial G}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}, \\ \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial G}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}, \end{cases} \quad \forall (x, y) \in D.$$

Teorema 6.1.23 (Teorema de medie pentru funcţii vectoriale)**.** *Fie $D \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă şi convexă şi fie $F : D \to \mathbb{R}^m$ o funcţie diferenţiabilă pe D. Dacă $\exists\ M \geq 0$ aşa ca $\|dF(x)\| \leq M$, $\forall x \in D$, atunci*

$$\|F(b) - F(a)\| \leq M\|b - a\|, \forall a, b \in D.$$

Teorema funcţiilor implicite (TFI).

Fie ecuaţia *implicită* $F(x,y)=0$. Dorim să rezolvăm această ecuaţie, măcar *local*, obţinând *explicit* una dintre variabile funcţie de cealaltă. De exemplu, să obţinem local $y=\varphi(x)$ (la fel se poate pune problema pentru a obţine $x=\psi(y)$.

Notă. Termenul implicit a fost introdus de Leonard Euler.

Teorema 6.1.24 (o ecuaţie cu două necunoscute)**.** *Fie $\Omega_{deschis\breve{a}}\subset\mathbb{R}^2$, ecuaţia $F(x,y)=0$, unde $F:\Omega\to\mathbb{R}$ şi fie $(x_0,y_0)\in\Omega$ o soluţie a ecuaţiei. Presupunem că:*

i) $F\in\mathcal{C}^1(D)$, unde $D=D(x_0,y_0)\subset\Omega$ este un dreptunghi deschis cu centrul în (x_0,y_0), caracterizat prin inegalităţile $D:|x-x_0|<a, |y-y_0|<b$;

ii) $F'_y(x_0,y_0)\neq 0$.

Atunci există o vecinătate deschisă $V=V(x_0)\subset(x_0-a,x_0+a)$ şi o vecinătate deschisă $U=U(y_0)\subset(y_0-b,y_0+b)$ astfel încât $\forall x\in V(x_0)$, ecuaţia are soluţie unică $y=\varphi(x)\in U(y_0)$.

Mai mult, funcţia soluţie $\varphi\in\mathcal{C}^1(V(x_0))$ (dacă, mai mult, $F\in\mathcal{C}^k(D), k\geq 2$, atunci $\varphi\in\mathcal{C}^k(V(x_0))$) şi derivata sa este dată de formula

$$\varphi'(x)=-\frac{F'_x(x,\varphi(x))}{F'_y(x,\varphi(x))}, \forall x\in V(x_0).$$

Verificarea formulei: $\forall x\in V(x_0), F(x,\varphi(x))=0$. Derivând parţial în raport cu x, obţinem $F'_x(x,\varphi(x))+F'_y(x,\varphi(x))\cdot\varphi'(x)=0$, $\forall x\in V(x_0)$, de unde rezultă formula.

Formă mai generală decât cea dată anterior:

Teorema 6.1.25 (o ecuaţie cu două necunoscute)**.** *Fie $\Omega_{deschis\breve{a}}\subset\mathbb{R}^2$, ecuaţia $F(x,y)=0$, unde $F:\Omega\to\mathbb{R}$ şi fie $(x_0,y_0)\in\Omega$ o soluţie a ecuaţiei.*

I. Presupunem că:

i) $F\in\mathcal{C}(D)$, unde $D=D(x_0,y_0)\subset\Omega$ este un dreptunghi deschis cu centrul în (x_0,y_0), caracterizat prin inegalităţile $D:|x-x_0|<a, |y-y_0|<b$;

ii) F este parţial derivabilă în raport cu y pe D, F'_y este continuă pe D şi $F'_y(x_0,y_0)\neq 0$.

Atunci $\exists V_{deschis\breve{a}}=V(x_0)\subset(x_0-a,x_0+a)$ şi $\exists U_{deschis\breve{a}}=U(y_0)\subset(y_0-b,y_0+b)$ astfel încât $\forall x\in V(x_0)$, ecuaţia are soluţie unică $y=\varphi(x)\in U(y_0)$.

II. Dacă $F\in\mathcal{C}^k(D), k\geq 1$, atunci $\varphi\in\mathcal{C}^k(V(x_0)))$.

Teorema 6.1.26 (o ecuaţie cu trei necunoscute)**.** *Fie ecuaţia $F(x,y,z)=0$, unde $F:\Omega_{deschis\breve{a}}\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ şi fie $(x_0,y_0,z_0)\in\Omega$ o soluţie a ecuaţiei. Presupunem că:*

i) $F \in \mathcal{C}^1(P)$, *unde* $P = P(x_0, y_0, z_0) \subset \Omega$ *este un paralelipiped deschis cu centrul în* (x_0, y_0, z_0), *caracterizat prin inegalităţile* $P : |x - x_0| < a, |y - y_0| < b, |z - z_0| < c$;

ii) $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

Atunci $\exists V_{deschis\breve{a}} = V(x_0, y_0) \subset D(x_0, y_0)(: |x - x_0| < a, |y - y_0| < b), \exists U_{deschis\breve{a}} = U(z_0) \subset (z_0 - c, z_0 + c)$ *astfel încât* $\forall (x, y) \in V(x_0, y_0)$, *ecuaţia* $F(x, y, z) = 0$ *are soluţie unică* $z = \varphi(x, y) \in U(z_0)$.

Mai mult, funcţia soluţie $\varphi \in \mathcal{C}^1(V(x_0, y_0))$ *şi derivatele sale parţiale sunt date de formulele*

$$\begin{aligned} \varphi'_x(x,y) &= -\frac{F'_x(x,y,\varphi(x,y))}{F'_z(x,y,\varphi(x,y))}, \\ \varphi'_y(x,y) &= -\frac{F'_y(x,y,\varphi(x,y))}{F'_z(x,y,\varphi(x,y))}, \forall (x,y) \in V(x_0,y_0). \end{aligned}$$

Verificarea formulelor: prin derivare parţială compusă:

$\forall (x, y) \in V(x_0, y_0), F(x, y, \varphi(x, y)) = 0$, de unde $F'_x(x, y, \varphi(x, y)) + F'_z(x, y, \varphi(x, y)) \cdot \varphi'_x(x, y) = 0$ şi $F'_y(x, y, \varphi(x, y)) + F'_z(x, y, \varphi(x, y)) \cdot \varphi'_y(x, y) = 0$, $\forall (x, y) \in V(x_0, y_0)$.

Teorema 6.1.27 (o ecuaţie cu n necunoscute)**.** *se rezolvă recursiv.*

Fie $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, *unde* $F : \Omega_{deschis\breve{a}} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *o soluţie a acestei ecuaţii fiind* $F(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) = 0$.

Presupunând că $F \in \mathcal{C}^1, F'_{x_n}(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \neq 0$, *obţinem local* $x_n = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$, *ceea ce antrenează* $F(x_1, x_2, ...x_{n-1}, \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})) = 0$, *deci o ecuaţie cu* $n - 1$ *necunoscute etc.*

Teorema 6.1.28. *Fie* $F : AXB \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}^n, B \subset \mathbb{R}, a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \overset{\circ}{A}, b \in \overset{\circ}{B}$. *Dacă:*

i) $F(a, b) = 0$;

ii) $\exists UXV \subset AXB$, $UXV \in \mathcal{V}(a, b)$ *astfel încât* $F \in \mathcal{C}^1(UXV)$;

iii) $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$,

atunci

a) există o vecinătate deschisă $U_0 \subset U$ *a lui* a*,o vecinătate deschisă* $V_0 \subset V$ *a lui* b *şi o funcţie unică* $f : U_0 \to V_0$ *astfel încât* $f(a) = b$ *şi* $F(x, f(x)) = 0, \forall x \in U_0$;

b) $f \in \mathcal{C}^1(U_0)$ *şi* $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))}, i = \overline{1, n}, \forall x \in U_0$;

c) dacă $F \in \mathcal{C}^k(UXV)$, $k \geq 1$, *atunci* $f \in \mathcal{C}^k(U_0)$.

Aplicaţie la TFI.

Considerăm o curbă $y = y(x)$ în $\mathbb{R}^2$ dată implicit de $F(x, y) = 0$. Atunci, dacă în vecinătatea unui punct (x_0, y_0) al acestei curbe sunt îndeplinite condiţiile din TFI, există o vecinătate a acestui punct în care graficul curbei coincide cu graficul funcţiei $y = f(x)$ date de teoremă. Mai mult, curba admite tangentă în (x_0, y_0), de pantă $f'(x_0)$. Astfel, ecuaţia tangentei este $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

Ţinând seama de expresia lui $f'(x_0)$ din TFI, obţinem **ecuaţia tangentei la curbă în** (x_0, y_0) :

$(x - x_0)\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$,

iar **ecuaţia normalei la curbă în** (x_0, y_0) :

$(x - x_0)\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) - (y - y_0)\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$.

Sisteme de ecuaţii.

Teorema 6.1.29 (două ecuaţii cu trei necunoscute)**.** *Fie* $\Omega_{deschis\breve{a}} \subset \mathbb{R}^3$, $F, G : \Omega \to \mathbb{R}$ *şi* $(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$ *o soluţie a sistemului* (1) $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$.

Presupunem că:

i) $F, G \in \mathcal{C}^1(P)$, *unde* $P = P(x_0, y_0, z_0)$ *este un paralelipiped deschis cu centrul în* (x_0, y_0, z_0), *caracterizat prin* $P : |x - x_0| < a, |y - y_0| < b, |z - z_0| < c$.

ii) $\frac{D(F,G)}{D(y,z)}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

Atunci $\exists V_{deschis\breve{a}} = V(x_0) \subset (x_0 - a, x_0 + a), \exists U_{deschis\breve{a}} = U(y_0, z_0) \subset D(y_0, z_0)(: |y - y_0| < b, |z - z_0| < c)$ *astfel încât* $\forall x \in V(x_0)$, *sistemul* (1) *are soluţie unică* $(y, z) \in U(y_0, z_0) : y = \varphi(x), z = \psi(x)$, *şi funcţiile soluţie* $\varphi, \psi \in \mathcal{C}^1(V)$.

Teorema 6.1.30 (derivabilitatea funcţiei inverse)**.** *Dacă* $f : I_{interval\ deschis} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *este derivabilă pe* I *şi* $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in I$, *atunci* $\exists\ f^{-1} : f(I) \to I$, *este derivabilă pe* $f(I)$ *şi* $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$, $\forall y \in f(I)$.

Vom prezenta în continuare generalizarea la $\mathbb{R}^n$ a acestui rezultat, care se obţine folosind TFI (forma generală): rolul derivatei va fi jucat de jacobianul funcţiei, despre care se va presupune că este, de clasă $\mathcal{C}^1$ (deci mai mult decât diferenţiabilă):

Teorema 6.1.31 (de inversare locală)**.** *Fie* $F = (f_1, f_2, .., f_n) : D_{deschis\breve{a}} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $F \in \mathcal{C}^1(D)$ *şi* $a \in D$. *Dacă* $\det J_F(a) \neq 0$, *atunci* $\exists V_{deschis\breve{a}} \in \mathcal{V}(a), V \subset D$ *astfel ca mulţimea* $F(V)$ *este deschisă şi* F *stabileşte un difeomorfism (sau transformare regulată) între* V *şi* $F(V)$ *(adică* $\exists F^{-1} : F(V) \to V$ *şi* $F^{-1} \in \mathcal{C}^1(F(V))$*)*.

Mai mult, dacă notăm $F^{-1}(y) = (\varphi_1(y), \varphi_2(y), .., \varphi_n(y))$, *atunci*

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, .., \varphi_n)}{D(y_1, y_2, .., y_n)}(F(a)) = \frac{1}{\frac{D(f_1, f_2, .., f_n)}{D(x_1, x_2, .., x_n)}}(a).$$

Exemplul 6.1.32. [la rezolvarea locală a sistemelor de ecuaţii] *Fie sistemul de ecuaţii* $\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = y_1 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = y_2 \\ \ldots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = y_n, \end{cases}$

$f_1, f_2, \ldots, f_n : D \to \mathbb{R}$, *fiind funcţii de clasă* $\mathcal{C}^1$ *pe* D.

Dacă $\exists a \in D$ *astfel încât* $\frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}(a) \neq 0$, *atunci* $\exists U \in \mathcal{V}(f_1(a), f_2(a), \ldots, f_n(a))$ *astfel încât* $\forall y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in U$, *sistemul de ecuaţii are soluţie unică într-o vecinătate a punctului* a.

În continuare vom prezenta metoda multiplicatorilor lui Lagrange pentru determinarea extremelor cu legături.

În aplicaţii apar de multe ori situaţii de genul următor:

Fie $f : D_{deschis\breve{a}} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, variabilele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ fiind supuse la condiţiile (legăturile) $\begin{cases} g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ \ldots \\ g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \end{cases}$ unde $g_1, \ldots, g_m : D \to \mathbb{R}$.

Dorim să determinăm punctele de extrem local ale funcţiei f în aceste condiţii.

În acest caz, extremele funcţiei se vor numi *extreme condiţionate (* sau *cu legături).*

Vom folosi metoda numită *metoda lui Lagrange.*

Considerăm *funcţia lui Lagrange*

$L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \lambda_1 g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \ldots + \lambda_m g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)$; $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ se numesc *multiplicatori Lagrange.*

Teorema 6.1.33 (condiţii necesare de extrem local)**.** *Fie* $f, g : D \to \mathbb{R}$ *de clasă* $\mathcal{C}^1$ *pe* D. *Dacă* (x_0, y_0) *este punct de extrem local pentru* f *condiţionat de* g *şi nu este punct singular pentru ecuaţia* (1) *(adică* $g'_x(x_0, y_0) \neq 0$ *sau* $g'_y(x_0, y_0) \neq 0$*), atunci* $\exists \lambda_0 \in \mathbb{R}$ *astfel încât* (x_0, y_0) *să fie punct critic pentru* $L(x, y, \lambda_0)$.

Condiţii suficiente de extrem.

Fie $f, g \in \mathcal{C}^2(D)$. Presupunem că (x_0, y_0) este punct critic pentru funcţia lui Lagrange, deci este soluţie a sistemului $\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'_x(x,y) + \lambda g'_x(x,y) = 0 \\ f'_y(x,y) + \lambda g'_y(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0. \end{cases}$

Aplicând formula lui Taylor de ordin 2 funcţiei $L(x, y, \lambda_0)$ se poate arăta că pentru ca punctul critic să fie punct de extrem (minim, respectiv, maxim) local condiţionat este suficient ca $d^2L(x_0, y_0, \lambda_0)$ să fie pozitiv (respectiv, negativ) definită, atunci când dx, dy satisfac consecinţele diferenţiale ale relaţiei de legătură (se diferenţiază legăturile).

La fel se procedează pentru a studia punctele de extrem condiţionat pentru funcţii de n variabile reale.

Rezolvăm apoi sistemul $\begin{cases} L'_{x_1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ L'_{x_2}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \ldots \\ L'_{x_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \ldots \\ g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \end{cases}$ obţinând *punctele critice condiţionate* $M_i, i = \overline{1, p}$, după care se studiază dacă $d^2L(M_i)$ este pozitiv (sau, respectiv, negativ) definită (dacă este necesar, se diferenţiază şi legăturile). Va rezulta corespunzător că punctul respectiv este de minim local condiţionat (sau, respectiv, de maxim local condiţionat).

6.2 Probleme rezolvate

6.2.1. Calculaţi derivatele parţiale pentru următoarele funcţii (atât funcţiile cât şi derivatele acestora se vor considera pe domeniile maxime de existenţă):

i) $f(x, y) = (x^2 + y^2) arctg \frac{x}{y}$;
ii) $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$;
iii) $f(x, y) = x \ln(xy)$;
iv) $f(x, y, z) = e^{x^2+y^2} \sin^2 z$;
v) $f(x, y, z) = e^{\frac{y}{z}} \ln \frac{z}{x}$;
vi) $f(x, y, z) = x^y + y^z + z^x$;
vii) $f(x, y, z) = \frac{1}{xy} + \frac{1}{x^2 z} + \frac{1}{y^3 z^2}$;

viii) $f(x,y,z) = \frac{\sqrt{x+y}}{z} \arcsin \frac{x^2-y^2}{z^2}$.

Soluţie 6.2.1. Rezolvare. Se aplică regulile uzuale de derivare.

6.2.2. Arătaţi că $f(x,y,z) = \ln(tgx+tgy+tgz)$ verifică relaţia $\sin 2x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \sin 2y \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + \sin 2z \cdot \frac{\partial f}{\partial z} = 2$.

Soluţie 6.2.2. $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{tgx+tgy+tgz} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$ şi, prin simetrie (sau direct) $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{tgx+tgy+tgz} \cdot \frac{1}{\cos^2 y}$, $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{tgx+tgy+tgz} \cdot \frac{1}{\cos^2 z}$, deci $\sin 2x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \sin 2y \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + \sin 2z \cdot \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{tgx+tgy+tgz} \cdot 2(tgx+tgy+tgz) = 2$.

6.2.3. Arătaţi că funcţiile următoare verifică ecuaţiile indicate:

i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = e^x \cos y : \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ (*ecuaţia lui Laplace*);

ii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = e^x \sin y : \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$;

iii) $f : \mathbb{R}^3 \backslash \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}, f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \forall (x,y,z) \neq (0,0,0) :$ $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$.

Soluţie 6.2.3. i) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x}) = e^x \cos y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y}) = -e^x \cos y$, de unde $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

ii) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x}) = e^x \sin y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y}) = -e^x \sin y$, de unde $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

iii) $f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$.

$\frac{\partial f}{\partial x} = (-\frac{1}{2}) \cdot 2x \cdot (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} = -[x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}]$, deci $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x}) = -(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} - x \cdot (-\frac{3}{2}) \cdot 2x \cdot (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}} =$

$= -(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3x^2(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}$.

Prin simetrie sau direct, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3y^2(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3z^2(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}$, de unde $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$.

6.2.4. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

i) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0) \end{cases}$;

ii) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2+y^2}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Arătaţi că $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

Soluţie 6.2.4. i) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial}{\partial x}(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}}_{\overset{\text{not.}}{=} g})(0,0) = \frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{g(x,0)-g(0,0)}{x} =$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x}$.

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = \lim\limits_{y\to 0} \frac{f(x,y)-f(x,0)}{y} = \lim\limits_{y\to 0} \frac{\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}}{y} =$
x,

deci $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x-0}{x} = 1$.

Analog,

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \frac{\partial}{\partial y}(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}}_{\overset{\text{not.}}{=} h})(0,0) = \frac{\partial h}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{y\to 0} \frac{h(0,y)-h(0,0)}{y} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y}$.

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x,y)-f(0,y)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}}{x} =$
$-y$,

deci $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim\limits_{y\to 0} \frac{-y}{y} = -1$,

aşadar $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

ii) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial}{\partial x}(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}}_{\overset{\text{not.}}{=} g})(0,0) = \frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{g(x,0)-g(0,0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x}$.

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = \lim\limits_{y\to 0} \frac{f(x,y)-f(x,0)}{y} = \lim\limits_{y\to 0} \frac{\frac{x^3 y}{x^2+y^2}}{y} =$
x,

deci $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x-0}{x} = 1$.

Analog,

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \frac{\partial}{\partial y}(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}}_{\overset{\text{not.}}{=} h})(0,0) = \frac{\partial h}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{y\to 0} \frac{h(0,y)-h(0,0)}{y} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y}$.

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x,y)-f(0,y)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{x^3 y}{x^2+y^2}}{x} =$
0,

deci $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim\limits_{y\to 0} \frac{0}{y} = 0$,

aşadar $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

6.2.5. Arătaţi că funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \text{şi } x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \text{ sau } y = 0 \end{cases}$ nu este continuă în origine, dar admite derivate parţiale în origine.

Soluţie 6.2.5. f nu este continuă deoarece nici nu există $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$:

$(\frac{1}{n},0)\to(0,0), (\frac{1}{n},\frac{1}{n})\to(0,0), f(\frac{1}{n},0)=0\to 0, f(\frac{1}{n},\frac{1}{n})=1\to 1\neq 0.$
$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{0-0}{x}=0, \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim\limits_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=$ $\lim\limits_{y\to 0}\frac{0-0}{y}=0$, ceea ce arată că f este parţial derivabilă în $(0,0)$.

6.2.6. Arătaţi că funcţiile următoare verifică ecuaţiile indicate:
i) $f(x,y)=\varphi(\frac{y}{x}) : xf'_x+yf'_y=0;$
ii) $f(x,y)=xy\varphi(x^2-y^2) : xy^2f'_x+x^2yf'_y=(x^2+y^2)f;$
iii) $f(x,y)=xy+x\varphi(\frac{y}{x}) : xf'_x+yf'_y=xy+f.$

Soluţie 6.2.6. i) $f'_x=\varphi'(\frac{y}{x})\cdot(-\frac{y}{x^2}), f'_x=\varphi'(\frac{y}{x})\cdot\frac{1}{x}$, de unde $xf'_x+yf'_y=0$.

ii) $f'_x=y\varphi(x^2-y^2)+xy\varphi'(x^2-y^2)\cdot 2x=y\varphi(x^2-y^2)+2x^2y\varphi'(x^2-y^2),$
$f'_y=x\varphi(x^2-y^2)+xy\varphi'(x^2-y^2)\cdot(-2y)=x\varphi(x^2-y^2)-2xy^2y\varphi'(x^2-y^2),$
deci $xy^2f'_x+x^2yf'_y=(x^2+y^2)f$.

iii) $f'_x=y+\varphi(\frac{y}{x})+x\varphi'(\frac{y}{x})\cdot(-\frac{y}{x^2})=y+\varphi(\frac{y}{x})-\frac{y}{x}\varphi'(\frac{y}{x}),$
$f'_y=x+x\varphi'(\frac{y}{x})\cdot\frac{1}{x}=x+\varphi'(\frac{y}{x})$, de unde $xf'_x+yf'_y=xy+f$.

6.2.7. Arătaţi că funcţia $f(x,y,z)=\varphi(xy,x^2+y^2-z^2)$ verifică relaţia $xz\frac{\partial f}{\partial x}-yz\frac{\partial f}{\partial y}+(x^2-y^2)\frac{\partial f}{\partial z}=0$.

Soluţie 6.2.7. Fie $u(x,y,z)=xy, v(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$. Atunci $f(x,y,z)=f(u(x,y,z),v(x,y,z))$.

Aplicând formulele de derivare parţială compusă avem:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot y+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot 2x,\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot x+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot 2y,\\
\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot 0+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot(-2z).
\end{aligned}$$

Prin urmare, $xz\frac{\partial f}{\partial x}-yz\frac{\partial f}{\partial y}+(x^2-y^2)\frac{\partial f}{\partial z}=$
$=xz(\frac{\partial f}{\partial u}\cdot y+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot 2x)-yz(\frac{\partial f}{\partial u}\cdot x+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot 2y)+(x^2-y^2)(\frac{\partial f}{\partial v}\cdot(-2z))=0.$

6.2.8. Calculaţi $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ pentru:
i) $f(u,v)=\ln(u^2+v), u=u(x,y)=e^{x+y^2}, v=v(x,y)=x^2+y;$
ii) $f(u,v)=arctg\frac{u}{v}, u=u(x,y)=x\sin y, v=v(x,y)=x\cos y.$

Soluţie 6.2.8. i)

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{2u}{u^2+v}\cdot e^{x+y^2}+\frac{v}{u^2+v}\cdot 2x=\\ &= \frac{2e^{2(x+y^2)}}{e^{2(x+y^2)}+x^2+y}+\frac{2x(x^2+y)}{e^{2(x+y^2)}+x^2+y},\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{2u}{u^2+v}\cdot 2y\cdot e^{x+y^2}+\frac{v}{u^2+v}=\\ &= \frac{4ye^{2(x+y^2)}}{e^{2(x+y^2)}+x^2+y}+\frac{x^2+y}{e^{2(x+y^2)}+x^2+y}.\end{aligned}$$

Observaţie. Evident, acelaşi rezultat se putea obţine şi făcând înlocuirile de la început: $f(x,y)=\ln(e^{2(x+y^2)}+x^2+y)$, după care se derivează parţial în raport cu x, respectiv, y.

ii) Se raţionează asemănător.

6.2.9. Arătaţi că dacă $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ este diferenţiabilă, atunci funcţia $w=f(x+y,x-y)$ are derivate parţiale ce verifică relaţia $\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}=(\frac{\partial f}{\partial u})^2-(\frac{\partial f}{\partial v})^2$, unde $u=u(x,y)=x+y, v=v(x,y)=x-y$.

Soluţie 6.2.9. Avem $w=f(x+y,x-y)=f(u(x,y),v(x,y))$.

Aplicând formulele de derivare parţială compusă avem:

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial v},\\ \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{\partial f}{\partial v},\end{aligned}$$

deci $\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}=(\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial v})\cdot(\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{\partial f}{\partial v})=(\frac{\partial f}{\partial u})^2-(\frac{\partial f}{\partial v})^2$.

6.2.10. Calculaţi $f'(x)$ dacă $f(x)=\varphi(u(x),v(x))$, pentru:

i) $\varphi(u,v)=u+uv, u=u(x)=\cos x, v=v(x)=\sin x$;

ii) $\varphi(u,v)=e^{u-2v}, u=u(x)=x^2, v=v(x)=x^2-2$.

Soluţie 6.2.10.

$$f'(x)=\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v)\cdot u'(x)+\frac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v)\cdot v'(x).$$

a) $f'(x)=(1+v)\cdot(-\sin x)+u\cdot\cos x=-\sin x(1+\sin x)+\cos^2(x)$.

b) $f'(x)=e^{u-2v}\cdot 2x+(-2)e^{u-2v}\cdot 2x=-2xe^{x^2-2(x^2-2)}=-2xe^{4-x^2}$.

6.2.11. Cercetaţi dacă funcţia $f(x,y)=e^y\varphi(ye^{\frac{x^2}{2y^2}})$ verifică relaţia $(x^2-y^2)\frac{\partial f}{\partial x}+xy\frac{\partial f}{\partial y}=xy$.

Soluţie 6.2.11. $\frac{\partial f}{\partial x} = e^y \varphi'(ye^{\frac{x^2}{2y^2}}) \cdot \frac{x}{y^2}$,

$\frac{\partial f}{\partial y} = e^y \varphi(ye^{\frac{x^2}{2y^2}}) + e^y \varphi'(ye^{\frac{x^2}{2y^2}}) \cdot \frac{x^2}{2} \cdot \frac{-2}{y^3} = e^y \varphi(ye^{\frac{x^2}{2y^2}}) - e^y \varphi'(ye^{\frac{x^2}{2y^2}}) \cdot \frac{x^2}{y^3}$.

Înlocuind, se obţine relaţia cerută.

6.2.12. Dacă funcţia explicită $z = f(x, y)$ este definită implicit prin $(y + z)\sin z - y(x + z) = 0$, atunci este satisfăcută ecuaţia $z \sin z \cdot z'_x - y^2 \cdot z'_y = 0$.

Soluţie 6.2.12. Într-adevăr, fie $F(x, y, z) = (y + z)\sin z - y(x + z)$. $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$. Aplicând (formal) TFI, se obţine explicit $z = f(x, y)$,

$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = \frac{y}{(y+z)\cos z + \sin z - y}$, $z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = \frac{-\sin z + x + z}{(y+z)\cos z + \sin z - y}$, deci, făcând înlocuirile se verifică relaţia cerută.

6.2.13. Funcţiile $u = \varphi(x, y), v = \psi(x, y)$ sunt definite implicit de relaţiile $\begin{cases} u + v = x + y \\ xu + yv = 1. \end{cases}$ Calculaţi u'_x, v'_x, u'_y, v'_y.

Soluţie 6.2.13. Aplicând (formal) TFI, se obţin $u = \varphi(x, y), v = \psi(x, y)$, deci, înlocuind în sistem avem $\begin{cases} u(x, y) + v(x, y) = x + y \\ xu(x, y) + yv(x, y) = 1. \end{cases}$

Derivând în raport cu x, obţinem sistemul $\begin{cases} u'_x + v'_x = 1 \\ u + xu'_x + yv'_x = 0, \end{cases}$

din care se obţin imediat u'_x, v'_x.

Similar, prin derivare în raport cu y, avem $\begin{cases} u'_y + v'_y = 1 \\ xu'_y + v + yv'_y = 0, \end{cases}$

de unde se obţin u'_y, v'_y.

6.2.14. Se consideră funcţia $y = f(x)$ definită implicit prin relaţia $x^2 + y^2 + 2axy = 0, a > 1$. Calculaţi $f'(x), f''(x)$. Justificaţi rezultatul.

Soluţie 6.2.14. Fie $F(x, y) = x^2 + y^2 + 2axy$. Deoarece $F \in \mathcal{C}^1(1)$, conform TFI avem explicit $y = f(x)$ şi $f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_x(x, f(x))} = -\frac{x + af(x)}{f(x) + ax}$. Prin urmare,

$$f''(x) = (f'(x))' = -(\frac{x + af(x)}{f(x) + ax})' =$$

$$= -\frac{(1 - \frac{x+af(x)}{f(x)+ax}) \cdot (f(x) + ax) - (x + af(x)) \cdot (-\frac{x+af(x)}{f(x)+ax} + a)}{(f(x) + ax)^2}.$$

Efectuând calculele se obţine $f''(x) = 0$, ceea ce era de asteptat întrucât rezolvând ecuaţia iniţială se obţine $y = x(-a \pm \sqrt{a^2 - 1})$, deci $y'' = 0$.

6.2.15. Calculaţi $f'(1)$ pentru funcţia $y = f(x)$ definită implicit de ecuaţia $(x^2 + y^2)^3 - 3(x^2 + y^2) - 2 = 0$, satisfăcând condiţia $f(1) = 1$.

Soluţie 6.2.15. Fie $F(x, y) = (x^2+y^2)^3-3(x^2+y^2)-2$. Deoarece $F(1, 1) = 0$ şi $F \in \mathcal{C}^1(1)$, conform TFI avem explicit $y = f(x)$ şi

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_x(x, f(x))} = -\frac{6x(x^2 + f^2(x))^2 - 6x}{6f(x)(x^2 + f^2(x))^2 - 6f(x)} =$$
$$= -\frac{x(x^2 + f^2(x))^2 - x}{f(x)(x^2 + f^2(x))^2 - f(x)},$$

de unde $f'(1) = -1$.

6.2.16. Aplicaţi TFI pentru $\begin{cases} F_1(x, y, z) = x + 2y - z - 3 \\ F_2(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 2xy \end{cases}$, $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 0)$, pentru a obţine $y = f_1(x), z = f_2(x)$.

Soluţie 6.2.16. $F_1, F_2 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3), F_1(1, 1, 0) = F_2(1, 1, 0) = 0, \frac{D(F_1,F_2)}{D(y,z)}(1, 1, 0) = 7 \neq 0$, deci conform TFI există $V = V(1) \in \mathcal{V}(1), U = U(1, 0) \in \mathcal{V}(1, 0)$ astfel încât $\forall x \in \mathcal{V}(1)$, sistemul are soluţie unică $(y, z) \in \mathcal{V}(1, 0)$ şi funcţiile soluţie $y = f_1(x), z = f_2(x)$ sunt de clasă $\mathcal{C}^1$ pe $V(1)$.

Înlocuind în sistem avem $\begin{cases} x + 2f_1(x) - f_2(x) - 3 = 0 \\ x^3 + f_1^3(x) + f_2^3(x) - 2xf_1(x) = 0 \end{cases}$ şi derivând (în raport cu x), se obţin $f_1'(x), f_2'(x)$.

6.2.17. Fie $z = z(x, y)$ definită de ecuaţia implicită $ax^2 + by^2 + cz^2 - 1 = 0$. Calculaţi derivatele sale parţiale de ordinul 2.

Soluţie 6.2.17. Fie $F(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 - 1$. Evident, $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$.

Aplicând TFI, obţinem explicit $z = z(x, y)$. Avem $z'_x(x, y, z) = -\frac{F'_x(x,y,z(x,y))}{F'_z(x,y,z(x,y))} = -\frac{a}{c} \cdot \frac{x}{z}, z'_y(x, y, z) = -\frac{F'_y(x,y,z(x,y))}{F'_z(x,y,z(x,y))} = -\frac{b}{c} \cdot \frac{y}{z}$ şi derivând încă o dată parţial în raport cu x, respectiv, y, obţinem derivatele parţiale de ordinul 2 ale lui z.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{a}{c} \cdot \frac{z - xz'_x}{cz} = -\frac{a}{c} \cdot \frac{z - x - \frac{a}{c} \cdot \frac{x}{z}}{cz} = -\frac{a}{c^3} \cdot \frac{cz^2 + ax^2}{z^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{b}{c} \cdot \frac{z - yz'_y}{cz} = -\frac{b}{c} \cdot \frac{z - y - \frac{b}{c} \cdot \frac{y}{z}}{cz} = -\frac{b}{c^3} \cdot \frac{cz^2 + by^2}{z^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -\frac{a}{c} \cdot x \cdot \frac{-z'_y}{z^2} = \frac{a}{c} \cdot \frac{x}{z^2}(-\frac{by}{cz}) = -\frac{abxy}{c^2 z^3}$$

(sunt egale deoarece $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$, ceea ce implică z de asemenea de clasă $\mathcal{C}^2$, deci derivatele parţiale mixte de ordin 2 coincid).

6.2.18. Arătaţi că funcţia explicită $z = z(x, y)$ definită implicit de ecuaţia $x^2+y^2+z^2 = yf(\frac{z}{y})$ (f fiind de clasă $\mathcal{C}^1$ pe domeniul său maxim de definiţie) verifică relaţia $(x^2 - y^2 - z^2) \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + 2xy \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 2xz$.

Soluţie 6.2.18. Fie $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - yf(\frac{z}{y})$. Deoarece f este de clasă $\mathcal{C}^1$, rezultă că şi F este de clasă $\mathcal{C}^1$.

Aplicând TFI, obţinem explicit $z = z(x, y)$ din ecuaţia implicită $F(x, y, z) = 0$.

Avem $z'_x(x, y, z) = -\frac{F'_x(x,y,z(x,y))}{F'_z(x,y,z(x,y))} =, z'_y(x, y, z) = -\frac{F'_y(x,y,z(x,y))}{F'_z(x,y,z(x,y))}$.

6.2.19. Scrieţi ecuaţia tangentei şi normalei în punctul (x_0, y_0) al elipsei $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$.

Soluţie 6.2.19. Să considerăm, în general, o curbă $y = y(x)$ în $\mathbb{R}^2$, definită de ecuaţia implicită $F(x, y) = 0$.

Dacă în vecinătatea unui punct (x_0, y_0) al acestei curbe sunt satisfăcute condiţiile din TFI, atunci pe o vecinătate a punctului, graficul funcţiei $y = y(x)$ coincide cu graficul funcţiei $F(x, y) = 0$.

Prin urmare, ecuaţia tangentei la curba $F(x, y) = 0$ în punctul $(x_0, f(x_0))$ este $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Deoarece $f'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0,f(x_0))}{F'_y(x_0,f(x_0))}$, obţinem aşadar

ecuaţia tangentei la curbă în punctul (x_0, y_0) :

$$(x - x_0)F'_x(x_0, y_0) + (y - y_0)F'_y(x_0, y_0) = 0,$$

de unde obţinem imediat

ecuaţia normalei la curbă în punctul (x_0, y_0) :

$$(x - x_0)F'_y(x_0, y_0) - (y - y_0)F'_x(x_0, y_0) = 0.$$

Revenind la problema dată, fie $F(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$. Evident, $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$.

Deoarece $F'_y(x, y) = \frac{2y}{b^2} = 0$ dacă şi numai dacă $y = 0$, rezultă că dacă

i) $(x_0, y_0) = (a, 0)$ sau $(x_0, y_0) = (-a, 0)$, atunci tangenta în (x_0, y_0) este paralelă cu axa Oy şi are ecuaţia $y = a$, respectiv, $y = -a$, iar normala în (x_0, y_0) are ecuaţia $x = 0$.

ii) $(x_0, y_0) \neq (a, 0)$ şi $(x_0, y_0) \neq (-a, 0)$. Suntem atunci în condiţiile TFI.

Prin urmare, ecuaţia tangentei la elipsă în punctul (x_0, y_0) de pe elipsă este

$$(x - x_0)\frac{2x_0}{a^2} + (y - y_0)\frac{2y_0}{b^2} = 0.$$

Deoarece $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$, obţinem în final că ecuaţia tangentei este

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

(prin dedublarea ecuaţiei elipsei).

Normala în punctul (x_0, y_0) de pe elipsă este atunci

$$\frac{xy_0}{b^2} - \frac{yx_0}{b^2} - x_0y_0\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) = 0.$$

6.2.20. Arătaţi că, în condiţiile teoremei de existenţă şi derivabilitate a funcţiilor implicite, funcţia explicită $z = z(x, y)$, definită implicit de ecuaţia $F(\frac{z}{x}, \frac{y}{x}) = 0$, satisface ecuaţia $x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = z$.

Soluţie 6.2.20. Aplicând TFI, avem $\frac{z}{x} = \varphi(\frac{y}{x})$, deci $z = x\varphi(\frac{y}{x})$. Aşadar, $\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi(\frac{y}{x}) + x\varphi'(\frac{y}{x}) \cdot (-\frac{y}{x^2})$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x\varphi'(\frac{y}{x}) \cdot \frac{1}{x}$ şi se verifică $x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = z$.

6.2.21. Arătaţi că funcţia explicită $z = z(x, y)$, definită implicit de ecuaţia $F(\frac{x}{y}, \frac{x}{x^2+y^2+z}) = 0$, verifică ecuaţia $x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = z - x^2 - y^2$.

Soluţie 6.2.21. Aplicând TFI, avem $\frac{x}{x^2+y^2+z} = \varphi(\frac{x}{y})$, de unde $z = \frac{x}{\varphi(\frac{x}{y})} - x^2 - y^2$, deci

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2x + \frac{\varphi(\frac{x}{y}) - x\varphi'(\frac{x}{y}) \cdot \frac{1}{y}}{\varphi^2(\frac{x}{y})}, \frac{\partial z}{\partial y} = -2y + \frac{\varphi(\frac{x}{y}) - x\varphi'(\frac{x}{y}) \cdot \frac{-x}{y}}{\varphi^2(\frac{x}{y})},$$

şi înlocuind se verifică relaţia.

6.3 Probleme propuse

6.3.1. Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x, y, z) = \sin\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ şi $u = (2, 1, -2)$. Aflaţi $\frac{df}{du}(0, 4, 3)$.

6.3.2. Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x, y, z) = x^2yz, a = (1, 1, 0), u = (1, 0, -3)$. Calculaţi $\frac{df}{du}(a)$.

6.3.3. Cercetaţi derivabilitatea după un vector $u \in \mathbb{R}^n$ într-un punct $a \in \mathbb{R}^n$ pentru funcţiile următoare:

i) $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$;

ii) $\|\cdot\|^2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$.

6.3.4. Fie funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^5}{(y-x^2)^2+x^8}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

a) Cercetaţi continuitatea lui f în $(0,0)$;

b) Studiaţi derivabilitatea în $(0,0)$ a lui f după un versor $v = (\cos\theta, \sin\theta), \theta \in [0, 2\pi)$.

6.3.5. Fie funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Cercetaţi dacă f are derivată în $(0,0)$ după orice versor $v = (\cos\theta, \sin\theta), \theta \in [0, 2\pi)$.

6.3.6. Calculaţi $\frac{dT}{du}(a)$, unde $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ este un operator liniar, iar $a \in \mathbb{R}^k, u \in \mathbb{R}^k, u \neq 0$ sunt oarecare.

6.3.7. Arătaţi că funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^6+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$ nu este continuă în $(0,0)$, dar admite derivată în $(0,0)$ după orice vector $u \in \mathbb{R}^2, u \neq 0$.

6.3.8. Fie funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

i) Arătaţi că funcţia f *este continuă şi admite derivate parţiale în* $(0,0)$, *dar nu este diferenţiabilă în* $(0,0)$.

ii) Arătaţi că funcţia f este diferenţiabilă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

6.3.9. Fie funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Arătaţi că f *este diferenţiabilă pe* $\mathbb{R}^2$, *dar nu este de clasă* $\mathcal{C}^1$ *pe* $\mathbb{R}^2$.

6.3.10. Studiaţi diferenţiabilitatea pe $\mathbb{R}^2$ a funcţiilor următoare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

i) $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$;

ii) $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$;

iii) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt[3]{x^4+y^4}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0); \end{cases}$

iv) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^6+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0); \end{cases}$

v) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

6.3.11. Pornind de la definiţie, arătaţi ca funcţia $f(x,y) = x^3 + xy + y^2$ este diferenţiabilă în $(1,1)$. Cum se poate stabili altfel, mai simplu, acest rezultat? Este funcţia diferenţiabilă şi în rest?

6.3.12. Dacă $a \in \mathbb{R}^n$, iar $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este, pe rând:
a) o funcţie constantă;
b) un operator liniar,
arătaţi că F este diferenţiabilă şi calculaţi $dF(a)$.

6.3.13. Fie $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, F(x,y) = (x^2y, xy+y^2, x^3-2)$. Calculaţi $dF(1,2)(h_1,h_2)$, unde $(h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2$ este oarecare. Scrieţi $J_F(1,2)$.

6.3.14. Arătaţi că funcţia $f : S((0,0),r) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ îndeplinind condiţia

$$(*)|f(x,y)| \leq x^2 + y^2, \forall (x,y) \in S((0,0),r)$$

este diferenţiabilă în $(0,0)$.

6.3.15. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y}{x^6+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$
Studiaţi:
i) diferenţiabilitatea lui f în $(0,0)$;
ii) continuitatea în $(0,0)$ pentru funcţia $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, g(x,y) = (\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y))$.

6.3.16. Fie S o sferă deschisă oarecare din $\mathbb{R}^2$ şi $f : S \to \mathbb{R}$. Arătaţi că *dacă* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *şi* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *există şi sunt mărginite pe* S*, atunci* f *este uniform continuă pe* S.

6.3.17. Relaţiile $\begin{cases} x^3 + y^3 - z^3 = a^3 \\ x^2 + y^2 + z^2 = b^2 \end{cases}$ definesc implicit $y = \varphi(x), z = \psi(x)$. Calculaţi $\varphi'(x), \psi'(x)$.

6.3.18. Calculaţi derivatele parţiale $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ pentru funcţia explicită $z = z(x,y)$ definită implicit de $x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 0$.

6.3.19. Determinaţi extremele funcţiei explicite $y = f(x)$ definită implicit prin $x^3 + y^3 - 3x^2y - 3 = 0$.

6.3.20. Arătaţi că ecuaţia implicită $1+xyz = e^{1-xyz}+x$ defineşte o funcţie explicită $z = z(x,y)$ în vecinătatea punctului $M(1,1,1)$. Calculaţi apoi $dz(1,1)$.

6.3.21. Arătaţi că funcţia explicită $z = z(x,y)$ de clasă $\mathcal{C}^1$ definită implicit de ecuaţia:

i) $F(x+\frac{z}{y}, y+\frac{z}{x}) = 0$ satisface ecuaţia $xz'_x + yz'_y = z - xy$;

ii) $F(x+y+z, x^2+y^2+z^2) = 0$ satisface ecuaţia $(y-z)z'_x + (z-x)z'_y = x - y$.

6.3.22. Calculaţi d^2z în punctul $M(2,0,1)$ pentru funcţia explicită $z = z(x,y)$ definită implicit de ecuaţia $2x^2+2y^2+z^2-8xz-z+8=0$.

6.3.23. Arătaţi că sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x^2u^2+xzv+y^2=0 \\ yzu+xyv^2-3x=0 \end{cases}$ determină în mod unic u şi v ca funcţii de x,y,z într-o vecinătate a punctului $(u_0,v_0,x_0,y_0,z_0) = (0,1,3,3,-3)$. Calculaţi apoi $u'_x, u'_y, u'_z, v'_x, v'_y, v'_z$.

Soluţii

6.3.1.

$$\begin{aligned}\frac{df}{du}(0,4,3) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(a+tu)-f(a)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(2t,4+t,3-2t)-f(0,4,3)}{t} = \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{\sin\sqrt{4t^2+(4+t)^2+(3-2t)^2}-\sin 5}{t} = \frac{2}{5}\cos 5.\end{aligned}$$

6.3.2.

$$\begin{aligned}\frac{df}{du}(1,1,0) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(a+tu)-f(a)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(1+t,1,-3t)-f((1,1,0))}{t} = \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{-3t(1+t)}{t} = -3.\end{aligned}$$

6.3.3. i) Formal,

$$\begin{aligned}\frac{df}{du}(a) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(a+tu)-f(a)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\|a+tu\|-\|a\|}{t} = \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{\|a+tu\|^2-\|a\|^2}{t(\|a+tu\|+\|a\|)} = \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{(a+tu,a+tu)-\|a\|^2}{t(\|a+tu\|+\|a\|)} = \lim_{t\to 0}\frac{t^2\|u\|^2+2t(a,u)}{t(\|a+tu\|+\|a\|)} = \lim_{t\to 0}\frac{t\|u\|^2+2(a,u)}{\|a+tu\|+\|a\|}.\end{aligned}$$

I. Dacă $a \neq 0_n$, atunci $\frac{df}{du}(a) = \frac{2(a,u)}{\|a\|}$, deci $\|\cdot\|$ este derivabilă după orice direcţie $u \in \mathbb{R}^n$ în orice punct $a \in \mathbb{R}^n$, $a \neq 0_n$.

II. Dacă $a = 0_n$, atunci (formal) $\frac{df}{du}(0_n) = \lim\limits_{t\to 0}\frac{t\|u\|^2}{\|tu\|} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{t\|u\|^2}{|t|\cdot\|u\|}$. Prin urmare,

1) Dacă $u \neq 0_n$, atunci $\frac{df}{du}(0_n) = \lim\limits_{t\to 0}\frac{t\|u\|}{|t|} = \|u\|\lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{|t|}$ nu exista (deoarece $\lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{|t|}$ nu exista), deci $\|\cdot\|$ nu are derivată după nici o direcţie $u \in \mathbb{R}^n, u \neq 0_n$, în punctul $a = 0_n$.

2) Dacă $u = 0_n$, atunci $\frac{df}{du}(0_n) = \lim\limits_{t\to 0}\frac{\|0_n\|-\|0_n\|}{t} = 0$, deci $\|\cdot\|$ este derivabilă după direcţia $u = 0_n$ în punctul $a = 0_n$.

ii)

$$\begin{aligned}\frac{df}{du}(a) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(a+tu)-f(a)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\|a+tu\|^2-\|a\|^2}{t} = \lim_{t\to 0}(t\|u\|^2+2(a,u)) = \\ &= 2(a,u).\end{aligned}$$

6.3.4. a) f nu este continuă în $(0,0)$ deoarece nu există $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$:

$(\frac{1}{n},0) \to (0,0), (\frac{1}{n},\frac{1}{n^2}) \to (0,0), f(\frac{1}{n},0) = 0 \to 0, f(\frac{1}{n},\frac{1}{n^2}) = \frac{\frac{1}{n^5}}{\frac{1}{n^8}} = n^3 \to \infty$.

b) Formal,

$$\begin{aligned}\frac{df}{dv}(0,0) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(tv)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(t\cos\theta, t\sin\theta)}{t} = \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{t^5\cos^5 t}{(t\sin t - t^2\cos^2 t)^2 + t^8\cos^8 t} = \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{t^3\cos^5 t}{(\sin t - t\cos^2 t)^2 + t^6\cos^8 t}.\end{aligned}$$

I. Dacă $\sin t \neq 0$, adică, echivalent, $t \in [0,2\pi)\backslash\{0,\pi\} = (0,\pi)\cup(\pi,2\pi)$, atunci $\frac{df}{dv}(0,0) = 0$, deci f este derivabilă în $(0,0)$ după toţi versorii $v = (\cos\theta,\sin\theta), \theta \in (0,\pi)\cup(\pi,2\pi)$.

II. Dacă $\sin t = 0$, adică, echivalent, $t = 0$ sau $t = \pi$, atunci:

1) pentru $t = 0$, $\frac{df}{dv}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0}\frac{t^3}{t^2+t^6} = 1$,

2) pentru $t = \pi$, $\frac{df}{dv}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0}\frac{-t^3}{t^2+t^6} = -1$, deci în situaţia II, f este derivabilă în $(0,0)$ după versorii $v_1 = (1,0), v_2 = (-1,0)$.

În concluzie, f nu este continuă în $(0,0)$, dar este derivabilă în $(0,0)$ după orice versor.

$\boxed{\textbf{6.3.5.}}$ Formal,

$$\begin{aligned}\frac{df}{dv}(0,0) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(tv)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(t\cos\theta, t\sin\theta)}{t} = \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{2t^2\cos\theta\sin\theta}{t^3(\cos^2\theta+\sin^2\theta)} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin 2\theta}{t}.\end{aligned}$$

I. Dacă $\sin 2\theta = 0$, adică, echivalent, $\theta \in \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\}$, $\exists \frac{df}{dv}(0,0) = 0$, deci f este derivabilă în $(0,0)$ după versorii $v_1 = (1,0), v_2 = (-1,0), v_1 = (0,1), v_1 = (0,-1)$.

II. Dacă $\sin 2\theta \neq 0$, adică, echivalent, $\theta \in [0, 2\pi)\setminus\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\}$, atunci (formal) $\frac{df}{dv}(0,0) = \sin 2\theta \lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t}$.

Întrucât $\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t}$ nu există, rezultă că $\frac{df}{dv}(0,0)$ nu există, deci f nu are derivată în $(0,0)$ după versorii v corespunzători.

$\boxed{\textbf{6.3.6.}}$ $\frac{dT}{du}(a) = \lim\limits_{t\to 0}\frac{T(a+tu)-T(a)}{t} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{T(a)+tT(u)-T(a)}{t} = T(u)$.

$\boxed{\textbf{6.3.7.}}$ f nu este continuă în origine:

$(\frac{1}{n}, 0) \to (0,0), (\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}) \to (0,0)$, dar $f(\frac{1}{n}, 0) = 0 \to 0$, iar $f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}) = \frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^6}+\frac{1}{n^4}} \to 1 \neq 0$, deci nici măcar nu există $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

$$\begin{aligned}\frac{df}{du}(0,0) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(tu_1, tu_2)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{t^3u_1^2u_2}{t^6u_1^6+t^2u_2^2}}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{u_1^2u_2}{t^4u_1^6+u_2^2} = \\ &= \begin{cases}\frac{u_1^2}{u_2^2}, & u_2 \neq 0\\ 0, & u_2 = 0,\end{cases}\end{aligned}$$

deci f este derivabilă în $(0,0)$ după orice vector $u \in \mathbb{R}^2, u \neq 0$.

$\boxed{\textbf{6.3.8.}}$ i) f este continuă în $(0,0)$:

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} y = 0$ (deoarece $-1 \leq \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 1, y \underset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0$), deci $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$.

f este parţial derivabilă în $(0,0)$:

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{0-0}{x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim\limits_{y\to 0}\frac{0-0}{y} = 0$.

Dacă am presupune prin reducere la absurd că f este diferenţiabilă în $(0,0)$, aceasta ar însemna că $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-[\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0)+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0)]}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$, adică $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = 0$, contradicţie, deoarece ultima limită nu există.

ii) Fie $(x_0,y_0)\neq(0,0)$ arbitrar, fixat. Vom arăta că f este diferenţiabilă în (x_0,y_0).

Observăm că există $S((x_0,y_0),r)$ aşa ca $S((x_0,y_0),r)\cap\{(0,0)\}=\emptyset$.

Prin urmare, $\forall(x,y)\in S((x_0,y_0),r)$, $f(x,y)=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, deci pe $S((x_0,y_0),r)$ există şi sunt finite $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{x^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$, ceea ce înseamnă că f este parţial derivabilă în raport cu ambele variabile pe $S((x_0,y_0),r)$.

În plus, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ sunt continue în (x_0,y_0) (compunere de funcţii elementare).

Prin urmare, *conform Criteriului de diferenţiabilitate*, rezultă că f este diferenţiabilă în $(x_0,y_0)\neq(0,0)$ arbitrar, fixat. În consecinţă, f este diferenţiabilă pe $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.

$\boxed{\textbf{6.3.9.}}$ f este continuă în $(0,0)$:
$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{(x^2+y^2)} = 0$ (deoarece $-1\leq \sin\frac{1}{x^2+y^2}\leq 1$, $x^2+y^2 \underset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0$), deci $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)$.

f este parţial derivabilă în $(0,0)$:

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim\limits_{x\to0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to0} x\sin\frac{1}{x^2} = 0$ (deoarece $-1\leq\sin\frac{1}{x^2}\leq 1$, $x \underset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0$)

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim\limits_{y\to0}\frac{y^2\sin\frac{1}{y^2}}{y} = \lim\limits_{y\to0} y\sin\frac{1}{y^2} = 0$ (deoarece $-1\leq\sin\frac{1}{y^2}\leq 1$, $y \underset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0$).

f este diferenţiabilă în $(0,0)$ dacă şi numai dacă există

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-[\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0)+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0)]}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0,$$

adică, echivalent, $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2+y^2)\sin\frac{1}{(x^2+y^2)}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2}\sin\frac{1}{x^2+y^2} = 0$, adevărat, deoarece $-1\leq\sin\frac{1}{x^2+y^2}\leq 1$, $\sqrt{x^2+y^2} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0$.

Cu un raţionament similar celui din exerciţiul precedent, f este diferenţiabilă pe $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.

Prin urmare, f este diferenţiabilă pe $\mathbb{R}^2$.

Să arătăm acum că f nu este de clasă $\mathcal{C}^1$ pe $\mathbb{R}^2$.

Avem: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x}{x^2+y^2} \cos \frac{1}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$,

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} 2y \sin \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y}{x^2+y^2} \cos \frac{1}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Remarcăm că $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ asunt continue pe $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ (compunere de funcţii elementare), deci vom arăta că $\frac{\partial f}{\partial x}$ nu este continuă în $(0,0)$ (de altfel, prin simetrie, nici $\frac{\partial f}{\partial y}$ nu este continuă în $(0,0)$).

Vom stabili, mai mult, că nu există $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (2x \sin \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x}{x^2+y^2} \cos \frac{1}{x^2+y^2})$:

Avem: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} 2x \sin \frac{1}{x^2+y^2} = 0$, iar $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x^2+y^2} \cos \frac{1}{x^2+y^2}$ nu există:

$(0, \frac{1}{n}) \to (0,0), (\frac{1}{\sqrt{4n\pi}}, \frac{1}{\sqrt{4n\pi}}) \to (0,0), g(0, \frac{1}{n}) = 0 \to 0, g(\frac{1}{\sqrt{4n\pi}}, \frac{1}{\sqrt{4n\pi}}) = \to$

.

$\boxed{\textbf{6.3.10.}}$ i) Evident, f este continuă pe $\mathbb{R}^2$.

I. Diferenţiabilitatea în $(x_0, y_0), x_0 \neq 0, y_0 \neq 0$:

a) $x_0 > 0, y_0 > 0$ - cadranul I (analog $x_0 < 0, y_0 < 0$ - cadranul III).

În această situaţie, $f(x_0, y_0) = \sqrt{x_0 y_0}$.

Există $S((x_0, y_0), r)$ aşa ca $S((x_0, y_0), r) \cap \{(0,0)\} = \emptyset$ şi $x > 0, y > 0, \forall (x,y) \in S((x_0, y_0), r)$, deci $f(x,y) = \sqrt{xy}$. Aşadar, pe $S((x_0, y_0), r)$ există şi sunt finite $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$, ceea ce înseamnă că f este parţial derivabilă în raport cu ambele variabile pe $S((x_0, y_0), r)$. În plus, $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ sunt continue în (x_0, y_0) (compunere de funcţii elementare).

Prin urmare, *conform Criteriului de diferenţiabilitate*, rezultă că f este diferenţiabilă în $(x_0, y_0), x_0 > 0, y_0 > 0$ (şi $(x_0, y_0), x_0 < 0, y_0 < 0$).

b) $x_0 > 0, y_0 < 0$ - cadranul IV (analog $x_0 < 0, y_0 > 0$ - cadranul II).

În această situaţie, $f(x_0, y_0) = \sqrt{-x_0 y_0}$. Analog ca la punctul b), rezultă că f este diferenţiabilă în $(x_0, y_0), x_0 > 0, y_0 < 0$ (şi $(x_0, y_0), x_0 < 0, y_0 > 0$).

II. Diferenţiabilitatea în $(0, y_0), y_0 \neq 0$ (analog $(x_0, 0), x_0 \neq 0$) :

$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y_0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x,y_0) - f(0,y_0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{|xy_0|}}{x} = \sqrt{|y_0|} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{|x|}}{x}$, care nu există ($\lim\limits_{x\to 0, x<0} \frac{\sqrt{|x|}}{x} = \lim\limits_{x\to 0, x<0} \frac{\sqrt{-x}}{x} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0, x>0} \frac{\sqrt{|x|}}{x} = \lim\limits_{x\to 0, x>0} \frac{\sqrt{x}}{x} = \infty$).

Prin urmare, f nu este derivabilă parţial, deci nu este diferenţiabilă în $(0, y_0), y_0 \neq 0$ (analog $(x_0, 0), x_0 \neq 0$).

III. Diferenţiabilitatea în $(0,0)$:

f este parţial derivabilă în $(0,0)$:

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{0-0}{x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim\limits_{y\to 0} \frac{0-0}{y} = 0$.

Dacă am presupune că f este diferenţiabilă în $(0,0)$, aceasta ar însemna că $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-[\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0)+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0)]}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$, adică $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$, contradicţie, deoarece ultima limită nu există.

În concluzie, f este diferenţiabilă pe $\mathbb{R}^2 \setminus (0x \cup 0y)$ (planul cu excepţia axelor de coordonate).

ii) Evident, f este continuă pe $\mathbb{R}^2$.

I. Diferenţiabilitatea în $(x_0, y_0), x_0 \neq 0, y_0 \neq 0$:

În această situaţie, $f(x_0, y_0) = \sqrt[3]{x_0 y_0}$.

Există $S((x_0, y_0), r)$ aşa ca $S((x_0, y_0), r) \cap \{(0,0)\} = \emptyset$ şi $x \neq 0, y \neq 0, \forall (x,y) \in S((x_0, y_0), r)$, deci $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$. Aşadar, pe $S((x_0, y_0), r)$ există şi sunt finite $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$, ceea ce înseamnă că f este parţial derivabilă în raport cu ambele variabile pe $S((x_0, y_0), r)$. În plus, $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ sunt continue în (x_0, y_0) (compunere de funcţii elementare).

Prin urmare, *conform Criteriului de diferenţiabilitate*, rezultă că f este diferenţiabilă în $(x_0, y_0), x_0 \neq 0, y_0 \neq 0$.

II. Diferenţiabilitatea în $(0, y_0), y_0 \neq 0$ (analog $(x_0, 0), x_0 \neq 0$) :

$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y_0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x,y_0)-f(0,y_0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x y_0}}{x} = \sqrt{y_0} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} \notin \mathbb{R}$.

Prin urmare, f are derivată parţială, dar nu este derivabilă parţial, deci nu este diferenţiabilă în $(0, y_0), y_0 \neq 0$ (analog $(x_0, 0), x_0 \neq 0$).

III. Diferenţiabilitatea în $(0,0)$:

f este parţial derivabilă în $(0,0)$:

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{0-0}{x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim\limits_{y\to 0} \frac{0-0}{y} = 0$.

Dacă am presupune că f este diferenţiabilă în $(0,0)$, aceasta ar însemna că $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-[\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0)+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0)]}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$, adică $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt[3]{xy}}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$, fals, deoarece ultima limită nu există.

În concluzie, f este diferenţiabilă pe $\mathbb{R}^2 \setminus (0x \cup 0y)$ (planul cu excepţia axelor de coordonate).

iii) f este continuă în $(0,0)$:

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt[3]{x^4+y^4}} = 0$ (din inegalitatea mediilor avem $x^4+y^4 \geq 2x^2y^2, \forall x,y \in \mathbb{R}$, de unde $|\frac{xy}{\sqrt[3]{x^4+y^4}}| \leq \frac{\sqrt{x^4+y^4}}{\sqrt{2}\sqrt[3]{x^4+y^4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt[6]{x^4+y^4} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$), deci $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$.

f este parţial derivabilă în $(0,0)$:

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim\limits_{y\to 0} \frac{0}{y} = 0$.

f este diferenţiabilă în $(0,0)$ dacă şi numai dacă $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-[\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0)+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 0, adică, echivalent, $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{xy}{\sqrt[3]{x^4+y^4}}}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$, fals întrucât $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{xy}{\sqrt[3]{x^4+y^4}}}{\sqrt{x^2+y^2}}$ nu există:

$(0,\frac{1}{n}) \to 0, (\frac{1}{n},\frac{1}{n}) \to (0,0), g(0,\frac{1}{n}) = 0 \to 0, g(\frac{1}{n},\frac{1}{n}) = \frac{\frac{1}{n^2}}{\sqrt[3]{\frac{1}{n^4}}\frac{\sqrt{2}}{n}} = \frac{n^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{2}} \to \infty$.

Cu un raţionament similar celui din exerciţiul precedent, f este diferenţiabilă pe $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.

iv) Se observă că f nu este continuă în $(0,0)$, deci nu este diferenţiabilă în $(0,0)$.

f este diferenţiabilă pe $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.

v) I. Diferenţiabilitatea în $(0,0)$:

f este continuă în $(0,0)$:

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}|y| = 0$ (deoarece $-0 \leq \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 1, y \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$), deci $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$.

f este parţial derivabilă în $(0,0)$:

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{0-0}{x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim\limits_{y\to 0} \frac{0-0}{y} = 0$.

Dacă am presupune că f este diferenţiabilă în $(0,0)$, aceasta ar însemna că $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-[\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0)+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0)]}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$, adică $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|xy|}{x^2+y^2} = 0$, fals, deoarece ultima limită nu există.

II. Diferenţiabilitatea în $(x_0,y_0), x_0 \neq 0, y_0 \neq 0$:

a) $x_0 > 0, y_0 > 0$ - cadranul I (analog $x_0 < 0, y_0 < 0$ - cadranul III).

În această situaţie, $f(x_0, y_0) = \frac{x_0 y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$.

Există $S((x_0, y_0), r)$ aşa ca $S((x_0, y_0), r) \cap \{(0, 0)\} = \emptyset$ şi $x > 0, y > 0, \forall (x, y) \in S((x_0, y_0), r)$, deci $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Aşadar, pe $S((x_0, y_0), r)$ există şi sunt finite $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$, ceea ce înseamnă că f este parţial derivabilă în raport cu ambele variabile pe $S((x_0, y_0), r)$. În plus, $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ sunt continue în (x_0, y_0) (compunere de funcţii elementare).

Prin urmare, *conform Criteriului de diferenţiabilitate*, rezultă că f este diferenţiabilă în $(x_0, y_0), x_0 > 0, y_0 > 0$ (şi $(x_0, y_0), x_0 < 0, y_0 < 0$).

b) $x_0 > 0, y_0 < 0$ - cadranul IV (analog $x_0 < 0, y_0 > 0$ - cadranul II).

În această situaţie, $f(x_0, y_0) = \frac{-x_0 y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$. Analog ca la punctul b), rezultă că f este diferenţiabilă în $(x_0, y_0), x_0 > 0, y_0 < 0$ (şi $(x_0, y_0), x_0 < 0, y_0 > 0$).

III. Diferenţiabilitatea în $(0, y_0), y_0 \neq 0$ (analog $(x_0, 0), x_0 \neq 0$) :

$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y_0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x,y_0)-f(0,y_0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{|xy_0|}{\sqrt{x^2+y_0^2}}}{x} = sgnx$, deci f nu este derivabilă parţial, deci nici diferenţiabilă în $(0, y_0), y_0 \neq 0$ (analog $(x_0, 0), x_0 \neq 0$).

În concluzie, f este diferenţiabilă pe $\mathbb{R}^2 \backslash (0x \cup 0y)$ (planul cu excepţia axelor de coordonate).

$\boxed{\textbf{6.3.11.}}$ Evident, f este continuă pe $\mathbb{R}^2$, deci şi în $(1, 1)$.

$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = (3x^2 + y)_{(1,1)} = 4$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = (x + 2y)_{(1,1)} = 3$. Aşadar, f este derivabilă parţial în raport cu ambele variabile în $(1, 1)$.

Să studiem acum dacă există şi este nulă limita

$\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \frac{f(x,y)-f(1,1)-[\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)\cdot(x-1)+\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1)]}{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}} = \lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^3+xy+y^2-3-4(x-1)-3(y-1)}{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}}$.

Efectuând schimbarea de variabile $x - 1 = u, y - 1 = v$, această limită se transformă în $\lim\limits_{(u,v)\to(0,0)} \frac{(u+1)^3+(u+1)(v+1)+(v+1)^2-3-4u-3v}{\sqrt{u^2+v^2}} = \lim\limits_{(u,v)\to(0,0)} \frac{u^3+3u^2+v^2+uv}{\sqrt{u^2+v^2}} = 0$, deci f este diferenţiabilă în $(1, 1)$.

Desigur, acelaşi rezultat se putea obţine, mult mai simplu, observând că $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$, deci f este diferenţiabilă pe $\mathbb{R}^2$, în particular în $(1, 1)$.

$\boxed{\textbf{6.3.12.}}$ a) Dacă $F = c$ ($c \in \mathbb{R}$, constantă), observăm că există $dF(a) = T$, operatorul nul astfel încât $\lim\limits_{x\to a} \frac{F(x)-F(a)-T(x-a)}{\|x-a\|} = \lim\limits_{x\to a} \frac{c-c}{\|x-a\|} = 0$.

Deci

$$dF(a) = 0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \text{ (operatorul nul).}$$

b) $F = T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (operator liniar), observăm că există $dT(a) = T$ astfel încât $\lim\limits_{x\to a} \frac{F(x)-F(a)-T(x-a)}{\|x-a\|} = \lim\limits_{x\to a} \frac{T(x)-T(a)-T(x-a)}{\|x-a\|} = \lim\limits_{x\to a} \frac{T(x-a)-T(x-a)}{\|x-a\|} = 0$.

Deci
$$dT(a) = T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \text{ (operatorul însuşi).}$$

$\boxed{\textbf{6.3.13.}}$ Fie $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f_1(x, y) = x^2y$, $f_2(x, y) = xy+y^2$, $f_3(x, y) = x^3 - 2$.

Evident, $f_1, f_2, f_3 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$, deci sunt diferenţiabile pe $\mathbb{R}^2$ şi în consecinţă F este diferenţiabilă pe $\mathbb{R}^2$.

$df_1(1,2)(h_1,h_2) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(1,2)h_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y}(1,2)h_2 = 4h_1 + h_2$,

$df_2(1,2)(h_1,h_2) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(1,2)h_1 + \frac{\partial f_2}{\partial y}(1,2)h_2 = 2h_1 + 5h_2$,

$df_3(1,2)(h_1,h_2) = \frac{\partial f_3}{\partial x}(1,2)h_1 + \frac{\partial f_3}{\partial y}(1,2)h_2 = 3h_1$,

de unde $dF(1,2)(h_1,h_2) = (4h_1 + h_2, 2h_1 + 5h_2, 3h_1)$.

$$J_F(1,2) = \begin{matrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \\ 3 & 0 \end{matrix}.$$

$\boxed{\textbf{6.3.14.}}$ Din $(*)$, avem $f(0,0) = 0$.

Arătăm că f este continuă în $(0,0)$: trecând la limită în inegalitatea $(*)$ se obţine $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$.

Calculăm $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$: din inegalitatea $(*)$ avem $|f(x,0)| \le x^2, \forall x \in (-r,r)$, de unde $|\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}| = |\frac{f(x,0)}{x}| \le |x|, \forall x \in (-r,r), x \neq 0$, ceea ce antrenează $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0$. Similar, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = 0$, deci f este parţial derivabilă în $(0,0)$.

Acum, f este diferenţiabilă în $(0,0)$ dacă şi numai dacă există

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - [\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0)]}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0,$$

adică, echivalent, $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$, adevărat, deoarece $|\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}| \overset{(*)}{\le} \sqrt{x^2+y^2} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0$.

$\boxed{\textbf{6.3.15.}}$ i) Se observă ca f nu este continuă în origine:

$(\frac{1}{n}, 0) \to (0,0), (\frac{1}{n}, \frac{1}{n^3}) \to (0,0)$, dar $f(\frac{1}{n}, 0) = 0 \to 0$, iar $f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^3}) = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} \neq 0$, deci nici măcar nu există $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Deoarece f nu este continuă în origine, rezultă că nu este diferenţiabilă în $(0,0)$.

ii) Continuitatea lui g în $(0,0)$ este echivalenta cu continuitatea în $(0,0)$ a ambelor funcţii $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$. Deoarece $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ sunt continue pe $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ (compunere de funcţii continue), ar rezulta că $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ sunt continue pe $\mathbb{R}^2$, aşadar $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. Prin urmare, f ar fi diferenţiabilă pe $\mathbb{R}^2$, deci şi în $(0,0)$, fals, conform punctului i).

În consecinţă, g nu este continuă în $(0,0)$ (pe $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ este).

6.3.16. Vom arăta, mai mult, că f este lipschitziană pe S.

$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in S$,

$$\begin{aligned} |f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| &= |f(x_1,y_1) - f(x_1,y_2) + f(x_1,y_2) - f(x_2,y_2)| \leq \\ &\leq |f(x_1,y_1) - f(x_1,y_2)| + |f(x_1,y_2) - f(x_2,y_2)| = \\ &= |\frac{\partial f}{\partial x}(x_1,\eta)| \cdot |y_1 - y_2| + |\frac{\partial f}{\partial x}(x_1,\eta)| \cdot |x_1 - x_2|. \end{aligned}$$

(s-a aplicat Teorema lui Lagrange funcţiei $\varphi : [y_1, y_2]$ (sau $[y_2, y_1]$.))

6.3.17. ———

6.3.18. ———

6.3.19. ———

6.3.20. ———-

6.3.21. ———-

6.3.22. ———

6.3.23. ———

Capitolul 7

Diferenţiabilitate de ordin superior

7.1 Consideraţii teoretice

Aşa cum am observat anterior, nu este neapărat obligatoriu ca derivatele parţiale mixte pereche de ordin 2 ale unei funcţii într-un punct să coincidă.

Totuşi, în cele ce urmează, vom indica două condiţii suficiente diferite care asigură egalitatea derivatelor parţiale mixte pereche de ordin 2 ale unei funcţii într-un punct.

Teorema 7.1.1 (lui Schwarz)**.** *Fie* $f : D_{deschis} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*,* $a \in D$*. Dacă* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(i, j = \overline{1, n}, i \neq j)$ $\exists$ *şi sunt finite finite pe o întreagă vecinătate* $V = V(a) \subset D$ *şi aceste derivate parţiale mixte sunt continue în* a*, atunci* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$.

Definiţia 7.1.2. Fie $f : D_{deschis} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Spunem că:

i) f *este de clasă* $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 2)$ *pe* D (şi notăm aceasta prin $f \in \mathcal{C}^k(D)$) dacă f este parţial derivabilă de ordin k (în raport cu toate variabilele) pe D şi toate aceste derivate parţiale de ordin k sunt continue pe D;

ii) f *este de clasă* $\mathcal{C}^\infty$ *pe* D (şi notăm aceasta prin $f \in \mathcal{C}^\infty(D)$) dacă $f \in \mathcal{C}^k(D), \forall k \geq 0$.

Observaţia 7.1.3. $\mathcal{C}^\infty(D) \subset ... \subset \mathcal{C}^k(D) \subset \mathcal{C}^{k-1}(D) \subset ... \subset \mathcal{C}^0(D) = \mathcal{C}(D)$.

Teorema 7.1.4. Din Teorema lui Schwarz rezultă că dacă $f \in \mathcal{C}^2(D), D_{deschis} \subset \mathbb{R}^n$, atunci $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$, $\forall a \in D, \forall i, j = \overline{1, n}, i \neq j$.

Teorema 7.1.5. *Fie $f : D_{deschis} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in D$. Dacă f este derivabilă parţial (în raport cu toate variabilele) pe o vecinătate $V = V(a) \subset D$ a punctului a şi dacă toate derivatele parţiale $\frac{\partial f}{\partial x_i}, i = \overline{1,n}$ sunt diferenţiabile în a, atunci $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a), \forall i, j = \overline{1,n}, i \neq j$.*

Teorema 7.1.6. Dacă $f \in \mathcal{C}^2(D), D_{deschis} \subset \mathbb{R}^n$, atunci $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$, $\forall a \in D, \forall i, j = \overline{1,n}, i \neq j$.

Fie $f : D_{deschis} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenţiabilă într-un punct $a \in D$ şi $\forall i = \overline{1,n}$, fie $pr_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\forall h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n \rightsquigarrow pr_i(h) = h_i \in \mathbb{R}$ (aplicaţiile de proiecţie).

Întrucât $df(a)(h) = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i$, rezultă că $df(a) = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) pr_i$.

Dar aplicaţiile de proiecţie fiind în mod evident operatori liniari, avem $d(pr_i)(a) = pr_i, \forall i = \overline{1,n}$, deci $df(a) = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot \underbrace{d(pr_i)(a)}_{\overset{not.\ (\text{prin convenţie})}{=} dx_i} = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) dx_i$,

sau, scris funcţional,

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

Particularizări:

1) $n = 2$:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy; df(a_1, a_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2)dy,$$

$$df(a_1, a_2)(h_1, h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2)h_2;$$

2) $n = 3$:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz;$$

$$df(a_1, a_2, a_3) = \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2, a_3)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2, a_3)dy + \frac{\partial f}{\partial z}(a_1, a_2, a_3)dz,$$

$$df(a_1, a_2, a_3)(h_1, h_2, h_3) = \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2, a_3)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2, a_3)h_2 + \frac{\partial f}{\partial z}(a_1, a_2, a_3)h_3.$$

Definiţia 7.1.7. Spunem că f este *de 2 ori diferenţiabilă în* $a \in D$ dacă f este diferenţiabilă (deci derivabilă parţial în raport cu toate variabilele) pe o vecinătate $V = V(a) \subset D$ şi toate derivatele parţiale (de ordinul I) sunt diferenţiabile în a.

În acest caz, numim *diferenţiala de ordinul II a lui f în punctul a*, funcţia $d^2f(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definită pentru orice $h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ prin

$$d^2f(a)(h) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}}_{(=a_{ij})}(a)h_ih_j((=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i)^{(2)}),$$

unde expresia din paranteză se ridică formal la puterea a doua după o formulă clasică de tip binomial, în care puterea semnifică ordinul de derivare.

$d^2f(a)$ este o formă pătratică, iar matricea asociată acestei forme pătratice este

$$H_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)_{i,j=\overline{1,n}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(a) \\ & \ldots & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(a) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix},$$

numită *matricea hessiană asociată funcţiei f în punctul a.*

Observăm că este o matrice pătratică *simetrică*:
$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a), \forall i, j = \overline{1,n}$ (datorită Criteriului lui Young).

1) Dacă f este funcţie de două variabile, atunci

$$\begin{aligned} d^2f(a)(h) &= (h_1\frac{\partial f}{\partial x}(a) + h_2\frac{\partial f}{\partial y}(a))^{(2)} = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)h_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)h_2^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)h_1h_2, \end{aligned}$$

$$d^2f(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)dy^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)dxdy,$$

2) Dacă f este funcţie de trei variabile, atunci

$$\begin{aligned}
d^2f(a)(h) &= (h_1\frac{\partial f}{\partial x}(a)+h_2\frac{\partial f}{\partial y}(a)+h_3\frac{\partial f}{\partial z}(a))^{(2)}= \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)h_1^2+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)h_2^2+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(a)h_3^2+ \\
& \quad +2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a)h_1h_2+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(a)h_2h_3+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(a)h_1h_3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d^2f(a) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)dx^2+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)dy^2+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(a)dz^2+ \\
& \quad +2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a)dxdy+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(a)dydz+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(a)dxdz.
\end{aligned}$$

Definiţia 7.1.8. Fie $a \in D$ şi $f : D_{deschis} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

i) Spunem că f este *de q ori diferenţiabilă ($q \geq 2$) în a* dacă f este diferenţiabilă de $(q-1)$ ori pe o vecinătate (deschisă) $V = V(a) \subset D$ şi toate derivatele parţiale de ordin $(q-1)$ ale lui f sunt diferenţiabile în a.

În acest caz, numim *diferenţiala de ordin q a lui f în punctul a,* aplicaţia $d^qf(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definită pentru $\forall h = (h_1, h_2, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$, prin

$$d^qf(a)(h) = (\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i)^{(q)},$$

unde expresia din paranteză se ridică formal la puterea simbolică q după o formulă clasică de tip binomial, în care puterea exprimă ordinul de derivare.

ii) Spunem că f este *de q ori diferenţiabilă ($q \geq 2$) pe D* dacă f este de q ori diferenţiabilă în orice punct din D.

Observaţia 7.1.9. La fel ca pentru cazul $q = 2$, din Teorema lui Young rezultă că derivatele parţiale mixte de ordin $\leq q$ sunt egale.

ii) Dacă $n = 2, q = 3$, $(a = (a_1, a_2), h = (h_1, h_2))$ atunci

$$\begin{aligned}
d^3f(a)(h) &= (h_1\frac{\partial f}{\partial x}(a)+h_2\frac{\partial f}{\partial y}(a))^{(3)}= \\
&= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a)h_1^3+\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(a)h_2^3+3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(a)h_1^2h_2+3\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y^2}(a)h_1h_2^2,
\end{aligned}$$

$$d^3f(a) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a)dx^3+\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(a)dy^3+3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(a)dx^2dy+3\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y^2}(a)dxdy^2.$$

Teorema 7.1.10 (Taylor)**.** *Presupunem că $D \subset \mathbb{R}^n$ este o mulţime deschisă, $a \in D$ ($\exists S(a,r) \subset D$)) şi $f : D \to \mathbb{R}$ este de $(q+1)$ ori diferenţiabilă pe $S(a,r)$. Atunci $\forall x \in S(a,r), \exists \xi \in (a,x)$ (sau (x,a))(segmentul deschis din $\mathbb{R}^n$ de capete a,x) astfel încât*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{1}{1!}df(a)(x-a) + \frac{1}{2!}d^2 f(a)(x-a) + \ldots + \frac{1}{q!}d^q f(a)(x-a) + \\ &\quad \underbrace{+\frac{1}{(q+1)!}d^{(q+1)} f(\xi)(x-a).}_{\text{rest Lagrange de ordin } q} \end{aligned}$$

7.2 Probleme rezolvate

7.2.1. *Condiţiile din Teorema lui Schwarz sunt suficiente, dar nu neapărat necesare*: Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} y^2 \ln(1 + \frac{x^2}{y^2}), & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$.

Soluţie 7.2.1. Rezolvare. Vom arăta că derivatele parţiale mixte de ordinul 2 ale lui f nu sunt continue în $(0,0)$ şi totuşi $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

Să observăm mai întâi că f este continuă pe $\mathbb{R}^2$. Evident, f este continuă în orice punct (x_0, y_0), cu $y_0 \neq 0$. În punctele de forma $(x_0, 0)$, f este de asemenea continuă: $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,0)} f(x,y) = f(x_0,0) = 0$:

Deoarece $\ln t < t, \forall t > 1$, rezultă că $\forall y \neq 0$, $0 \leq f(x,y) = 2y^2 \ln\sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}} \leq 2y^2\sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}} = 2|y|\sqrt{x^2+y^2}$, de unde într-adevăr $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,0)} f(x,y) = 0 = f(x_0,0)$.

Observăm că
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{2y^2 x}{x^2+y^2}, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} 2y\ln(1+\frac{x^2}{y^2}) - \frac{2x^2 y}{x^2+y^2}, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$
sunt de asemenea continue pe $\mathbb{R}^2$.

Derivatele parţiale mixte de ordinul 2 sunt:
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{4x^3 y}{(x^2+y^2)^2}, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$ şi nu sunt continue în $(0,0)$, întrucât $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4x^3 y}{(x^2+y^2)^2}$.

Deci $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ nu sunt continue în $(0,0)$, dar $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

7.2.2. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = e^x \cos y$ şi fie (x_0, y_0) arbitrar.

Calculaţi $df(x_0,y_0), d^2f(x_0,y_0), df(x_0,y_0)(h_1,h_2), d^2f(x_0,y_0)(h_1,h_2), d^3f(x_0,y_0), d^3f(x_0,y_0)(h_1,h_2)$, unde $(h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2$ este oarecare.

Soluţie 7.2.2. Evident, $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$,

$df(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)dy = e^{x_0}\cos y_0 \cdot dx - e^{x_0}\sin y_0 \cdot dy$,

$df(x_0,y_0)(h_1,h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)h_2 = e^{x_0}\cos y_0 \cdot h_1 - e^{x_0}\sin y_0 \cdot h_2$,

$d^2f(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)dy^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)dxdy =$
$= e^{x_0}\cos y_0 \cdot dx^2 - e^{x_0}\cos y_0 \cdot dy^2 - 2e^{x_0}\sin y_0 \cdot dxdy$,

$d^2f(x_0,y_0)(h_1,h_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)h_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)h_2^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)h_1h_2 =$
$= e^{x_0}\cos y_0^2 \cdot h_1^2 - e^{x_0}\cos y_0^2 \cdot h_2^2 - 2e^{x_0}\sin y_0 \cdot h_1h_2$,

$d^3f(x_0,y_0) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_0,y_0)dx^3 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x_0,y_0)dy^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x_0,y_0)dx^2dy + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x_0,y_0)dxdy^2 =$
$= e^{x_0}\cos y_0^2 \cdot dx^3 + e^{x_0}\sin y_0^2 \cdot dy^3 + 3e^{x_0}\cos y_0 \cdot dx^2dy + 3e^{x_0}\sin y_0 \cdot dxdy^2$,

$d^3f(x_0,y_0)(h_1,h_2) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_0,y_0)^3 \cdot h_1^3 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x_0,y_0) \cdot h_2^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x_0,y_0) \cdot h_1^2h_2 +$
$+3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x_0,y_0) \cdot h_1h_2^2 =$
$= e^{x_0}\cos y_0^2 \cdot h_1^3 + e^{x_0}\sin y_0^2 \cdot h_2^3 + 3e^{x_0}\cos y_0 \cdot h_1^2h_2 + 3e^{x_0}\sin y_0 \cdot h_1h_2^2$.

7.2.3. Arătaţi că funcţia $f(x,y) = \varphi(x-ay) + \psi(x+ay)$, unde funcţiile φ, ψ admit derivate parţiale de ordin II, satisface ecuaţia $f''_{y^2} = a^2 f''_{x^2}$.

Soluţie 7.2.3. $f'_x = \varphi'(x-ay) + \psi'(x+ay)$, *deci* $f''_{x^2} = \varphi''(x-ay) + \psi''(x+ay)$.

$f'_y = (-a)\varphi'(x-ay) + a\psi'(x+ay)$, *deci* $f''_{y^2} = a^2\varphi''(x-ay) + a^2\psi''(x+ay) = a^2 f''_{x^2}$.

7.2.4. Arătaţi că funcţia $u = \frac{1}{\sqrt{y}} f(4x + \frac{z^2}{y})$ verifică relaţia $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$.

Soluţie 7.2.4. $u = u(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{y}} f(4x + \frac{z^2}{y}) = y^{-\frac{1}{2}} f(4x + \frac{z^2}{y})$.

$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial y})$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-1}{2}y^{-\frac{3}{2}} f(4x + \frac{z^2}{y}) + y^{-\frac{1}{2}} f'(4x + \frac{z^2}{y}) \cdot \frac{-z^2}{y^2}$, deci

$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -2y^{-\frac{3}{2}} f'(4x + \frac{z^2}{y}) + 4y^{-\frac{1}{2}} f''(4x + \frac{z^2}{y}) \cdot \frac{-z^2}{y^2}$,

$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial u}{\partial z}) = \frac{\partial}{\partial z}(y^{-\frac{1}{2}} f'(4x + \frac{z^2}{y}) \cdot \frac{2z}{y}) = y^{-\frac{1}{2}} f''(4x + \frac{z^2}{y}) \cdot (\frac{2z}{y})^2 + y^{-\frac{1}{2}} f'(4x + \frac{z^2}{y}) \cdot \frac{2}{y}$ şi efectûand calculele, se verifică relaţia.

7.2.5. crieţi formula lui Taylor cu rest Lagrange de ordin 2 pentru $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = e^x \sin y$ în $(0,0)$.

Soluţie 7.2.5. Avem $f(x,y) = f(0,0) + \frac{1}{1!}df(0,0)(x,y) + \frac{1}{2!}d^2f(0,0)(x,y) + \frac{1}{3!}d^3f(\xi_1,\xi_2)(x,y)$, $\forall (x,y) \in S((0,0),r)$, unde $\xi_1 \in (0,x)$(sau $(x,0)), \xi_2 \in (0,y)$(sau $(y,0)$), deci $\xi_1 = \theta x, \xi_2 = \theta y, \theta \in (0,1)$.

$df(0,0)(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \cdot x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \cdot y = y$,

$d^2f(0,0)(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) \cdot x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) \cdot y^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \cdot xy = 2xy$,

$d^3f(\theta x,\theta y)(x,y) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(\theta x,\theta y) \cdot x^3 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(\theta x,\theta y) \cdot y^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(\theta x,\theta y) \cdot x^2 y +$
$+3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(\theta x,\theta y) \cdot xy^2 = e^{\theta x}\sin(\theta y) \cdot x^3 - e^{\theta x}\cos(\theta y) \cdot y^3 + 3e^{\theta x}\cos(\theta y) \cdot x^2 y -$
$-3e^{\theta x}\sin(\theta y) \cdot xy^2$, deci $e^x \sin y = y + xy + \frac{1}{6}[e^{\theta x}\sin(\theta y) \cdot x^3 - e^{\theta x}\cos(\theta y) \cdot y^3 + 3e^{\theta x}\cos(\theta y) \cdot x^2 y -$
$-3e^{\theta x}\sin(\theta y) \cdot xy^2], \forall (x,y) \in S((0,0),r)$,

de unde $e^x \sin y \simeq y + xy$, adică, în vecinătatea originii, graficul funcţiei f se aproximează prin graficul unei funcţii polinomiale.

7.2.6. Folosind formula lui Taylor cu rest Lagrange de ordin 2, calculaţi valoarea aproximativă pentru $(1,02)^{3,01}$.

Soluţie 7.2.6. Considerăm funcţia $f : (0,\infty)X(0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^y$. Mulţimea $D = (0,\infty)X(0,\infty)$ este deschisă şi convexă, iar $f \in \mathcal{C}^\infty(D)$.

Aplicăm formula lui Taylor cu rest Lagrange de ordin 2 functiei f în punctul $(1,3) : \forall (x,y) \in D$,

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(1,3) + \frac{1}{1!}df(1,3)(x-1,y-3) + \frac{1}{2!}d^2f(1,3)(x-1,y-3) + \\ &+\frac{1}{3!}d^3f(\xi_1,\xi_2)(x-1,y-3), \end{aligned}$$

$(\xi_1,\xi_2) \in ((1,3),(x,y))$ (segmentul deschis din $(0,\infty)X(0,\infty)$ de capete $(1,3),(x,y)$).

Prin urmare, $f(x,y) \simeq f(1,3) + \frac{1}{1!}df(1,3)(x-1,y-3) + \frac{1}{2!}d^2f(1,3)(x-1,y-3)$.

$f(1,3) = 1, df(1,3)(x-1,y-3) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,3) \cdot (x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,3) \cdot (y-3) =$

$d^2f(1,3)(x-1,y-3) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,3) \cdot (x-1)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,3) \cdot (y-3)^2 +$
$+2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,3) \cdot (x-1)(y-3) =$

7.2.7. Justificaţi aproximarea $arctg(\frac{x+y}{1+xy}) \simeq x + y$, în vecinătatea lui $(0,0)$.

Soluţie 7.2.7. Fie $f(x,y) = arctg(\frac{x+y}{1+xy})$. Scriind formula lui Taylor cu rest Lagrange de ordin I în punctul $(0,0)$, obţinem că în vecinătatea lui $(0,0)$, are loc aproximarea

$$f(x,y) \simeq f(0,0) + \frac{1}{1!}df(0,0)(x,y)$$

, deci
$$arctg(\frac{x+y}{1+xy}) \simeq \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cdot x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\cdot y.$$
$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = (\frac{1}{1+(\frac{x+y}{1+xy})^2}\frac{1-y^2}{(1+xy)^2})_{(0,0)} = 1$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = (\frac{1}{1+(\frac{x+y}{1+xy})^2}\frac{1-y^2}{(1+xy)^2})_{(0,0)} = 1$, deci $arctg(\frac{x+y}{1+xy}) \simeq x+y$.

7.2.8. Fie $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$, cu $f(0,0) = 0$. Arătaţi că dacă $(\frac{\partial f}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2 \leq 1$, oricare ar fi $(x,y) \in A = \{(x,y); x^2+y^2 \leq 5\}$, atunci $|f(1,2)| \leq \sqrt{5}$.

Soluţie 7.2.8. $(1,2) \in A$.

Aplicând Teorema lui Lagrange, avem
$$\begin{aligned} f(x,y) - f(x_0,y_0) &= f(x,y) - f(x_0,y) + f(x_0,y) - f(x_0,y_0) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(\xi,y)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\eta)(y-y_0), \end{aligned}$$
$\xi = x_0 + \theta_1(x-x_0), \theta_1 \in (0,1), \eta = y_0 + \theta_2(y-y_0)$.

În particular,
$$f(x,y) - f(0,0) = f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi,0)\cdot x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,\eta)\cdot y,$$
deci pentru orice $(x,y) \in A$, avem
$$|f(x,y)| = \sqrt{\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,0)\cdot x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,\eta)\cdot y} \leq \sqrt{(\frac{\partial f}{\partial x})^2(\xi,0) + (\frac{\partial f}{\partial y})^2\frac{\partial f}{\partial y}(0,\eta)}\cdot\sqrt{x^2+y^2}.$$
De aici, $|f(1,2)| \leq \sqrt{5}$.

7.2.9. Determinaţi punctele de extrem ale funcţiilor $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ următoare:

i) $f(x,y) = x^2 - y^2$;
ii) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$;
iii) $f(x,y) = (x-y)^2 + (y-1)^3$.

Soluţie 7.2.9. i) Să determinăm pentru început punctele critice, rezolvând sistemul $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \end{cases}$ Deoarece $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$, iar $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$, obţinem unicul punct critic $M(0,0)$, care nu este însă nici punct de minim, nici punct de maxim local deoarece nu există nici o vecinătate a originii pe care diferenţa $f(x,y)-f(0,0)=x^2-y^2$ să păstreze semn constant.

ii) Determinăm mai întâi punctele critice ale funcţiei, rezolvând sistemul: $\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x^2-3y=0\\ 3y^2-3x=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2=y\\ y^2=x,\end{cases}$ obţinând punctele critice $M_1(0,0)$ şi $M_2(1,1)$.

Deoarece $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-3$, rezultă că pentru $M_1(0,0)$, avem $B^2-AC=9>0$, deci nu este punct de extrem, iar pentru $M_1(1,1)$, avem $B^2-AC<0$, $A>0$, deci este punct de minim local pentru f.

iii) Se obţine punctul critic $M(1,1)$, pentru care $B^2-AC=0$, deci criteriul nu stabileşte natura sa.

Dacă $M(1,1)$ ar fi punct de extrem local pentru f, ar exista $S((1,1),r_0)$ astfel ca $f(x,y)-f(1,1)\geq 0$ (sau ≤ 0), $\forall (x,y)\in S((1,1),r_0)$.

În particular, $f(x,x)-f(1,1)=(x-1)^3\geq 0$ (sau ≤ 0), $\forall (x,x)\in S((1,1),r_0)$, fals.

Deci $M(1,1)$ nu este punct de extrem local pentru f.

7.2.10. Determinaţi punctele de extrem local ale funcţiilor $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ urmatoare:

i) $f(x,y,z)=x^2+3y^2+2z^2-2xy+2xz$.

ii) $f(x,y,z)=(x-y)^2+(y-1)^3+(z-1)^2$.

Soluţie 7.2.10. i) Rezolvând sistemul $\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}=0\\ \frac{\partial f}{\partial z}=0\end{cases}$, obţinem punctul critic $M(0,0,0)$.

Apoi,

$$H_f(0,0,0)=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(0,0,0)\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(0,0,0)\\ \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}(0,0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}(0,0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(0,0,0)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2 & -2 & 2\\ -2 & 6 & 0\\ 2 & 0 & 4\end{pmatrix}.$$

$\Delta_1=2>0, \Delta_2=8>0, \Delta_3=8>0$, deci $M(0,0,0)$ este punct de minim local pentru f.

ii) Rezolvând sistemul $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \end{cases}$, obţinem punctul critic $M(1,1,1)$.

$$H_f(1,1,1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1,1) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1,1) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(1,1,1) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1,1,1) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1,1) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(1,1,1) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(1,1,1) & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(1,1,1) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(1,1,1) \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

de unde $\Delta_2 = 0$, deci criteriul nu stabileşte natura punctului critic. Vom folosi atunci definiţia.

$M(1,1,1)$ este punct de extrem local pentru f dacă şi numai dacă există o sferă $S((1,1,1),r)$ aşa ca $f(x,y,z) - f(1,1,1) = (x-y)^2 + (y-1)^3 + (z-1)^2 \geq 0$ (sau ≤ 0), $\forall (x,y,z) \in S((1,1,1),r)$.

În particular, $f(x,x,1) = (x-1)^3 \geq 0$ (sau ≤ 0), $\forall (x,x,1) \in S((1,1,1),r)$, adică, echivalent, $x \geq 1$ (sau $x \leq 1$), $\forall x \in (\frac{-r}{\sqrt{2}} + 1, \frac{r}{\sqrt{2}} + 1)$, fals. Deci $M(1,1,1)$ nu este punct de extrem local pentru f.

7.2.11. Determinaţi punctele de extrem local ale funcţiilor $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definite prin:

i) $f(x,y) = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 8x + 8y$;
ii) $f(x,y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}, x > 0, y > 0$;
iii) $f(x,y) = (x-y)^2 + x^3 + y^3$;
iv) $f(x,y) = x^2 - y^2 + 2x$;
v) $f(x,y) = x^2 + y^4$;
vi) $f(x,y) = \sin x \sin y \sin(x+y), x, y \in (0, 2\pi)$.

Soluţie 7.2.11. i) Punctele critice: $\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 + 4xy^2 - 8 = 0 \\ 4y^3 + 4x^2y + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} x(x^2+y^2) = 2 \\ y(x^2+y^2) = 2 \end{cases}$, de unde $M(1,1)$ este singurul punct critic.

$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = 16, B = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1) = 8, C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1) = 16$, $B^2 - AC < 0, A > 0$, deci $M(1,1)$ este punct de minim local pentru f.

ii) Punctele critice: $\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - \frac{50}{x^2} = 0 \\ x - \frac{20}{y^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{50}{x^2} \\ x - \frac{20}{y^2} = 0 \end{cases}$, care are unica soluţie $M(5,2)$ (punct critic).

$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(5,2) = \frac{100}{x^3}_{(5,2)} = \frac{4}{5}, B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(5,2) = 1, C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(5,2) = 4$, deci $B^2 - AC = -3 < 0, A > 0$. Prin urmare, M este punct de maxim local pentru f.

iii) Punctele critice: $\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x-y) + 3x^2 = 0 \\ 2(y-x) + 3y^2 = 0 \end{cases}$, deci singurul punct critic este $M(0,0)$.

$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2, B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = -2, C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 2$, deci $B^2 - AC = 0$, deci suntem în situaţia în care nu putem decide natura punctului critic.

Folosind definiţia, evaluăm diferenţa $f(x,y) - f(0,0) = (x-y)^2 + x^3 + y^3$ şi observăm că aceasta nu are semn constant pe nici o vecinătate a lui $(0,0)$.

Într-adevăr, dacă presupunem prin reducere la absurd că există o sferă $S(0,0),r)$ astfel încât $(x-y)^2 + x^3 + y^3$ să aibă semn constant pentru $\forall (x,y) \in S(0,0),r)$, am obţine în particular pentru $x = y$, că expresia $2x^3$ are semn constant, $\forall (x,x) \in S(0,0),r) \Leftrightarrow \forall x \in$

iv) $f(x,y) = x^2 - y^2 + 2x$ Punctele critice: $\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2 = 0 \\ -2y = 0 \end{cases}$, deci $M(-1,0)$ este singurul punct critic.

$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,0) = 2, B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-1,0) = 0, C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1,0) = -2$, deci $B^2 - AC = 4 > 0$, ceea ce înseamnă că $M(-1,0)$ nu este punct de extrem pentru f.

v) Punctele critice: $\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 4y^3 = 0 \end{cases}$, deci $M(0,0)$ este singurul punct critic al lui f.

$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2, B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0, C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0$, deci $B^2 - AC = 0$, prin urmare criteriul nu furnizează în acest caz nici o informaţie.

Vom folosi atunci definiţia (punctului de maxim/minim (local)): $f(x,y) - f(0,0) = x^2 + y^4 \geq 0, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, deci $M(0,0)$ este punct de minim absolut pentru f.

vi) Punctele critice: $\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin y \sin(2x+y) = 0 \\ \sin x \sin(x+2y) = 0 \end{cases}$, rezultând $M_1(\pi,\pi), M_2(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \sin y \cos(2x+y), \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 \sin x \cos(x+2y), \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \sin(2x+2y)$.

· Pentru $M_1(\pi,\pi)$, se obţine $B^2 - AC = 0$, prin urmare criteriul nu furnizează în acest caz nici o informaţie.

Metoda I. cu definiţia: Dacă $M_1(\pi,\pi)$ ar fi punct de extrem (local) pentru f, ar rezulta că măcar pe o vecinătate a sa, diferenţa $f(x,y)-f(\pi,\pi)=\sin x\sin y\sin(x+y)$ ar păstra semn constant, deci $\sin x\sin y\sin(x+y)\geq 0$ sau $\leq 0, \forall (x,y)\in S((\pi,\pi),r)\cap(0,2\pi)$.

În particular, pentru $x=y$, am avea $\sin 2x \geq 0$ sau $\leq 0, \forall (x,x)\in S((\pi,\pi),r)\cap(0,2\pi)$, adică, echivalent, $\forall x$, cu $2x\in(2\pi-r,2\pi+r), r\in(0,2\pi)$, ceea ce este evident fals, deci $M_1(\pi,\pi)$ nu este punct de extrem local pentru f.

Metoda II. evaluând semnul diferenţialelor de ordin superior: $df(\pi,\pi)=0, d^2f(\pi,\pi)=0, d^3f(\pi,\pi)=6[(dx)^2dy+dx(dy)^2]$, deci $d^3f(\pi,\pi)(h_1,h_2)=6[(h_1)^2h_2+h_1(h_2)^2]$, care ia şi valori pozitive, şi valori negative, deci regăsim că $M_1(\pi,\pi)$ nu este punct de extrem local pentru f.

$\cdot$ Pentru $M_2(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})$, $B^2-AC=0<0, A<0$, deci $M_2(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})$ este punct de maxim local pentru f.

7.2.12. Determinaţi punctele de extrem local ale funcţiilor $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, definite prin:

i) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+2x+4y-6z$;

ii) $f(x,y,z)=x+\frac{y^2}{4x}+\frac{z^2}{y}+\frac{2}{z}, x,y,z>0$;

iii) $f(x,y,z)=\sin x+\sin y+\sin z-\sin(x+y+z), x,y,z\in(0,\pi)$;

iv) $f(x,y,z)=2(xy+z)-x^2-y^2-z^2$.

Soluţie 7.2.12. i) Punctele critice: $\begin{cases} f'_x=0\\ f'_y=0\\ f'_z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2=0\\ 2y+4=0\\ 2z-6=0\end{cases}$, deci $M(-1,-2,3)$ este singurul punct critic al lui f.

$H_f(M)=\begin{pmatrix} 2\ 0\ 0\\ 0\ 2\ 0\\ 0\ 0\ 2\end{pmatrix}, \Delta_1=2>0, \Delta_2=4>0, \Delta_3=8>0$, deci $M(-1,-2,3)$ este punct de minim local pentru f.

ii) Punctele critice: $\begin{cases} f'_x=0\\ f'_y=0\\ f'_z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-\frac{y^2}{4x^2}=0\\ \frac{y}{2x}-\frac{z^2}{y^2}=0\\ \frac{2z}{y}-\frac{2}{z^2}=0\end{cases}$, rezultând punctul critic $M(\frac{1}{2},1,1)$. $H_f(M)=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0\\ -1 & 3 & -2\\ 0 & -2 & 6\end{pmatrix}, \Delta_1=4>0, \Delta_2=11>0, \Delta_3=50>0$, deci $M(\frac{1}{2},1,1)$ este punct de minim local pentru f.

iii) Punctele critice: $\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \\ f'_z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x - \cos(x+y+z) = 0 \\ \cos y - \cos(x+y+z) = 0 \\ \cos z - \cos(x+y+z) = 0 \end{cases}$, ceea ce antrenează că $x = y = z, \cos x = \cos 3x, x \in (0, \pi)$, deci $M(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ este singurul punct critic.

$H_f(M) = (-2)$

iv) Punctele critice: $\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \\ f'_z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y - 2x = 0 \\ 2x - 2y = 0 \\ 2 - 2z = 0 \end{cases}$, deci toate punctele de forma $M(a, a, 1), a \in \mathbb{R}$, sunt puncte critice pentru f.

$H_f(M) = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 - 2 & \end{pmatrix}, \Delta_1 = -2 < 0, \Delta_2 = 0$, deci criteriul lui Sylvester nu furnizează nici o informaţie.

Folosind definiţia, evaluăm expresia $f(x, y, z) - f(a, a, 1) = 2(xy + z) - x^2 - y^2 - z^2 - 1 = -[(x-y)^2 - (z-1)^2] \leq 0, \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, ceea ce înseamnă că $M(a, a, 1)$ sunt puncte de maxim absolut pentru f.

7.2.13. Aflaţi triunghiul de arie maximă care se poate înscrie într-un cerc de rază dată R.

Soluţie 7.2.13. $S_{ABC} = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$ trebuie să fie maximă, adică, echivalent, expresia $\sin A \sin B \sin(A + B)$ trebuie să fie maximă.

Fie atunci funcţia $f(x, y) = \sin x \sin y \sin(x+y), x, y \in (0, \pi)$, şi vom afla extremele sale:

Punctele critice: $\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin y \cdot [\cos x \sin(x+y) + \sin x \cos(x+y)] = 0 \\ \sin x \cdot [\cos y \sin(x+y) + \sin y \cos(x+y)] = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} \sin(2x + y) = 0 \\ \sin(x + 2y) = 0 \end{cases} (\sin x, \sin y \neq 0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = \pi \\ 2y + x = 0 \end{cases}$, deci $M(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ este punct critic.

$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}) = 2 \sin y \cos(2x + y)_{(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})} = -\sqrt{3}, B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}) =, C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}) =$, deci $B^2 - AC =$. Prin urmare, M este punct de maxim pentru f.

Prin urmare, aria triunghiului este maximă atunci când $m(A) = m(B) = \frac{\pi}{3}$, de unde $m(C) = \frac{\pi}{3}$, aşadar atunci când trinughiul este echilateral.

7.2.14. Determinaţi triunghiul de arie maximă şi de perimetru egal cu $2p$.

Soluţie 7.2.14. Conform formulei lui Heron, $S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, p fiind semiperimetrul triunghiului ($p = \frac{a+b+c}{2}$).

Fie atunci funcţia $f(x,y) = (p-x)(p-y)(x+y-p)$, şi vom afla extremele sale:

Punctele critice:
$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (p-y)[-x-y+p+p-x) = 0 \\ (p-x)[-x-y+p+p-y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y = 2p \\ 2y+x = 2p \end{cases}$$
deci $M(\frac{2p}{3}, \frac{2p}{3})$ este punct critic pentru f.

$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\frac{2p}{3}, \frac{2p}{3}) = 2, B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\frac{2p}{3}, \frac{2p}{3}) = 1, C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\frac{2p}{3}, \frac{2p}{3}) = 2$, deci $B^2 - AC < 0, A > 0$, deci $M(\frac{2p}{3}, \frac{2p}{3})$ este punct de minim pentru f, ceea ce înseamnă că maximul ariei triunghiului se realizează când $x = y = \frac{2p}{3}$, de unde $z = \frac{2p}{3}$, adică atunci când trinughiul este dreptunghic.

7.2.15. Dintr-o cantitate dată de tablă, se construieşte un vas fără capac, având forma unui paralelipiped dreptunghic. Determinaţi dimensiunile vasului astfel încât capacitatea sa să fie maximă.

Soluţie 7.2.15. Fie x, y, z, dimensiunile paralelipipedului. Trebuie să determinăm volumul maxim, ştiind că $xy + 2xz + 2yz = a^2$.

Fie deci $f(x,y,z) = xyz, x, y, z > 0$. Vom afla $\max\limits_{x,y,z>0, xy+2xz+2yz=a^2} f(x,y,z)$.

Aceasta implică $z = \frac{a^2 - xy}{2(x+y)}$, deci $f(x,y) = xy\frac{a^2-xy}{2(x+y)}$.

Punctele critice: $\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2\frac{a^2-x^2-2xy}{2(x+y)^2} = 0 \\ x^2\frac{a^2-y^2-2xy}{2(x+y)^2} = 0 \end{cases}$, rezultând $M(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{a}{\sqrt{3}})$.

$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{a}{\sqrt{3}}) = -\frac{a}{2\sqrt{3}}, B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{a}{\sqrt{3}}) = -\frac{a}{4\sqrt{3}}, C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{a}{\sqrt{3}}) = -\frac{a}{2\sqrt{3}}$, deci $B^2 - AC < 0, A < 0$, deci volumul vasului este maxim dacă $x = y = \frac{a}{\sqrt{3}}, z = \frac{a}{3\sqrt{3}}$.

7.2.16. Determinaţi constanta k astfel încât funcţia f, definită pe $\mathbb{R}^2$ prin $f(x,y) = 5x^2 + 6xy + 5y^2 - 16x - 16y + k$, să aibă un minim egal cu 0.

Soluţie 7.2.16. Punctele critice: $\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x + 6y - 16 = 0 \\ 10y + 6x - 16 = 0 \end{cases}$, deci $M(1,1)$ este singurul punct critic al funcţiei.

$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = 10, B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) = 6, C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1) = 10$, deci $B^2 - AC < 0, A > 0$, deci $M(1,1)$ este punct de minim pentru $f; f_{\min} = 0 = f(1,1) = -16 + k$, de unde $k = 16$.

7.3 Probleme propuse

7.3.1. Studiaţi dacă derivatele parţiale mixte de ordin 2 în $(0,0)$ coincid pentru funcţia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$

Cercetaţi dacă funcţia este diferenţiabilă pe $\mathbb{R}^2$.

7.3.2. Fie $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, f(x,y)=\begin{cases}xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

Arătaţi că:
i) f este diferenţiabilă pe $\mathbb{R}^2$;
ii) f admite în orice punct derivate parţiale de ordin 2;
iii) $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ nu sunt continue în $(0,0)$.

7.3.3. Fie $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}, f(x,y,z)=e^x\sin y\cos z$ şi fie (x_0,y_0,z_0) arbitrar.

Calculaţi $df(x_0,y_0,z_0), d^2f(x_0,y_0,z_0), df(x_0,y_0,z_0)(h_1,h_2,h_3), d^2f(x_0,y_0,z_0)(h_1,h_2,h_3)$, unde $(h_1,h_2,h_3)\in\mathbb{R}^3$ este oarecare.

7.3.4. Scrieţi formula lui Taylor cu rest Lagrange de ordin 2 pentru $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, f(x,y)=e^x\cos y$ în $(0,0)$.

7.3.5. Folosind formula lui Taylor cu rest Lagrange de ordin 2, calculaţi valoarea aproximativă pentru:
i) $(0,95)^{2,01}$; ii) $\sqrt{1,03}\cdot\sqrt[3]{0,98}$.

7.3.6. Determinaţi punctele de extrem local ale funcţiei $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=(x-a)(x-b)(y-a)(y-b), a,b\in\mathbb{R}$, arbitrari, fixaţi (discuţie).

7.3.7. Determinaţi în interiorul unui patrulater un punct, astfel ca suma pătratelor distanţelor acestui punct la vârfurile patrulaterului să fie minimă.

7.3.8. Înscrieţi într-un con circular drept, un paralelipiped dreptunghic de volum maxim.

Soluţii

$\boxed{\textbf{7.3.1.}}$ ————

$\boxed{\textbf{7.3.2.}}$

$\boxed{\textbf{7.3.3.}}$

$\boxed{\mathbf{7.3.4.}}$

$\boxed{\mathbf{7.3.5.}}$

$\boxed{\mathbf{7.3.6.}}$

$\boxed{\mathbf{7.3.7.}}$

$\boxed{\mathbf{7.3.8.}}$ ———

Capitolul 8

Puncte de extrem

8.1 Consideraţii teoretice

Definiţia 8.1.1. Fie $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

i) Un punct $a \in A$ se numeşte *punct de extrem local pentru* f dacă diferenţa $f(x) - f(a)$ păstrează semn constant pe o vecinătate a lui a, adică, $\exists V \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $f(x) - f(a)$ păstrează acelaşi semn, $\forall x \in V \cap A$.

Mai precis,

dacă $f(x) - f(a) \geq 0, \forall x \in V \cap A$, atunci a se numeşte *punct de minim local pentru* f, iar

dacă $f(x) - f(a) \leq 0, \forall x \in V \cap A$, atunci a se numeşte *punct de maxim local pentru* f.

ii) Dacă $f(x) - f(a) \geq 0,$ (respectiv, $f(x) - f(a) \leq 0), \forall x \in A$, atunci a se numeşte *punct de minim (*respectiv*, de maxim) absolut pentru* f.

Nu întotdeauna există pentru o funcţie puncte de minim (maxim) absolut.

iii) Valorile funcţiei în punctele de extrem se numesc *extremele funcţiei.*

Dacă există, $f(a) = \inf\limits_{x \in A} f(x)$ (respectiv, $f(b) = \sup\limits_{x \in A} f(x)$) se numeşte *valoare minimă* (respectiv, *maximă*) *a lui* f *pe* A.

De exemplu, dacă A este mulţime compactă şi f este continuă pe A, atunci Teorema lui Weierstrass ne asigură că există valoarea minimă şi valoarea maximă a lui f pe A.

Condiţii necesare de extrem.

Teorema 8.1.2 (a lui Fermat)**.** *Fie $D_{deschis} \subset \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$ şi $a \in D$. Dacă f este parţial derivabilă în raport cu toate variabilele în punctul a, iar a este punct de extrem local pentru f, atunci $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0, \forall i = \overline{1, n}$.*

Definiţia 8.1.3. Spunem că $a \in D$ este *punct critic* (sau *staţionar*) pentru $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (derivabilă parţial în raport cu toate variabilele în a) dacă $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0, \forall i = \overline{1, n}$.

Aşadar, Teorema lui Fermat afirmă că punctele de extrem local ale unei funcţii diferenţiabile, se găsesc printre punctele sale critice. Aşa cum vom observa în exemplul următor, incluziunea este strictă (reciproca nu are loc).

Definiţia 8.1.4. se numeşte *punct şa (punct critic care nu este punct de extrem).*

Teorema 8.1.5. *Fie $f : D_{deschis} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^2(D)$. Dacă $a \in D$ este punct de minim local (respectiv, maxim local) pentru f (deci $df(a) = 0$), atunci $d^2 f(a) \geq 0$ (respectiv, $d^2 f(a) \leq 0$).*

În continuare, vom pune în evidenţă **condiţii suficiente** pentru ca un punct critic să fie punct de extrem.

Propoziţia 8.1.6. *Fie $(a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ o matrice simetrică de numere reale ($a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j = \overline{1, n}$) şi $\varphi(x) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ ($x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$), forma pătratică asociată. Dacă φ este pozitiv definită (adică $\varphi(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$), atunci $\exists \lambda > 0$ astfel încât $\varphi(y) \geq \lambda \|y\|^2, \forall y \in \mathbb{R}^n$.*

Teorema 8.1.7. *Fie $f : D_{deschis} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^2(D)$ şi $a \in D$ un punct critic pentru f.*

i) Dacă forma pătratică $d^2 f(a)$ este pozitiv definită, atunci a este punct de minim local pentru f;

ii) Dacă forma pătratică $d^2 f(a)$ este negativ definită, atunci a este punct de maxim local pentru f.

Condiţii suficiente de extrem pentru funcţii de 2 variabile

Teorema 8.1.8. *Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ o mulţime deschisă, $f : D \to \mathbb{R}, f \in \mathcal{C}^2(D), a \in D$ punct critic pentru f.*

Fie $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a), B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a), C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$.

1) Dacă $B^2 - AC > 0, a$ nu este punct de extrem local pentru f.

2) Dacă $B^2 - AC = 0$, caz de dubiu (nu ne putem pronunţa).

3) Dacă $B^2 - AC < 0$, atunci a este punct de extrem local pentru f. Mai precis,

a) dacă $A > 0$ (sau $C > 0$), a este punct de minim local pentru f;

b) dacă $A < 0$ (sau $C < 0$), a este punct de maxim local pentru f.

Condiţii suficiente de extrem pentru funcţii de n variabile, $n \geq 3$.

Fie $f : D_{deschis\breve{a}} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, f \in \mathcal{C}^2(D), a \in D$ punct critic pentru f.

Teorema 8.1.9 (lui Sylvester)**.** *(din teoria formelor pătratice) Fie* $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \varphi(x) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j, \forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, *o formă pătratică oarecare* $(a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j = \overline{1, n})$.

Fie $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & & \ldots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ *matricea sa asociată, şi minorii principali*

$$\Delta_1 = a_{11}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots, \Delta_n = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(a) \\ & & \ldots & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(a) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{vmatrix} =$$

$\det A$.

Atunci:

i) φ *este pozitiv definită dacă şi numai dacă* $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \ldots, \Delta_n > 0$;

ii) φ *este negativ definită dacă şi numai dacă* $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \ldots, (-1)^n \Delta_n > 0$.

Se aplică Teorema lui Sylvester pentru forma pătratică $\varphi = d^2 f(a)$, *considerând matricea sa asociată, matricea hessiană a lui* f *în punctul* a, *care este o matrice pătratică, simetrică:*

$$H_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)_{i,j=\overline{1,n}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(a) \\ & & \ldots & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(a) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}, \text{ având}$$

minorii principali

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a), \Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) \end{vmatrix}, \ldots, \Delta_n =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(a) \\ & & \ldots & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(a) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{vmatrix}.$$

Obţinem astfel următorul rezultat:

Teorema 8.1.10. *1) Dacă toţi minorii principali ai matricei hessiene sunt strict pozitivi, atunci a este punct de minim local pentru f.*

2) Dacă minorii principali ai matricei hessiene alternează ca semn, începând cu primul negativ, atunci a este punct de maxim local pentru f.

3) Dacă toţi minorii principali ai matricei hessiene sunt nenuli, dar semnele lor nu sunt ca în cazurile 1) sau 2), atunci a nu este punct de extrem local pentru f.

4) Dacă cel puţin unul din $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ *este nul, nu se poate preciza natura punctului a. În acest caz, pentru a evalua semnul diferenţei* $f(x) - f(a)$, *se foloseşte definiţia sau formula lui Taylor cu rest Lagrange de ordin superior lui* 2.

8.2 Probleme rezolvate

8.2.1. Determinaţi extremele funcţiei $y(x)$ definită de ecuaţia implicită $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

Soluţie 8.2.1. Fie $F(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$. $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$.

Aplicând TFI, obţinem explicit $y = y(x)$ din ecuaţia implicită $F(x, y) = 0$.

În plus, $y'(x) = -\frac{F'_x(x,y(x))}{F'_y(x,y(x))}$. Prin urmare,

$$y'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} F'_x(x, y) = 0 \\ F(x, y) = 0 \\ F'_y(x, y) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = y \\ x^3 + y^3 - 3xy = 0 \\ y^2 \neq x \end{cases}$$

, rezultând punctul critic $M(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$. În vecinătatea acestui punct, este deci definită funcţia $y = y(x)$, iar $y'(\sqrt[3]{2}) = 0$.

Întrucât $y''(x) = -(\frac{x^2 - y(x)}{y^2(x) - x})'$, vom avea

$$y''(x) = -\frac{[2x + \frac{x^2 - y(x)}{y^2(x) - x}](y^2(x) - x) - (x^2 - y(x))[1 + 2y(x)\frac{x^2 - y(x)}{y^2(x) - x}]}{(y^2(x) - x)^2} =$$
$$= -\frac{2x}{y^2(x) - x},$$

obţinând că $y''(\sqrt[3]{2}) = \frac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{16}} = -2 < 0$, deci $x = \sqrt[3]{2}$ este punct de maxim, iar maximul funcţiei $y(x)$ este $\sqrt[3]{4}$.

8.2.2. Determinaţi extremele funcţiei $z(x, y)$ definită de ecuaţia implicită $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0$.

Soluţie 8.2.2. Fie $F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10$. $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$.

Aplicând TFI, obţinem explicit $z = z(x,y)$ din ecuaţia implicită $F(x,y,z) = 0$.

Deoarece

$$z'_x(x,y,z) = -\frac{F'_x(x,y,z(x,y))}{F'_z(x,y,z(x,y))} = -\frac{2x-2}{2z-4} = -\frac{x-1}{z-2},$$

$$z'_y(x,y,z) = -\frac{F'_y(x,y,z(x,y))}{F'_z(x,y,z(x,y))} = -\frac{2y+2}{2z-4} = -\frac{y+1}{z-2},$$

rezultă că punctele critice ale funcţiei $z = z(x,y)$ sunt soluţiile sistemului $\begin{cases} F'_x(x,y,z) = 0 \\ F'_y(x,y,z) = 0 \\ F(x,y,z) = 0 \\ F'_z(x,y,z) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2=0 \\ 2y+2=0 \\ x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10=0 \\ 2z-4 \neq 0 \end{cases}$, rezultând două puncte critice $M_1(1,-1,-2), M_2(1,-1,6)$.

În vecinătatea fiecărui punct M_1 şi M_2, ecuaţia defineşte o funcţie $z = z(x,y)$.

$$d^2z = -\frac{z(x,.y)-2+(x-1)\frac{x-1}{z(x,y)-2}}{(z(x,y)-2)^2}dx^2 - \\ -\frac{z(x,.y)-2+(y+1)\frac{y+1}{z(x,y)-2}}{(z(x,y)-2)^2}dy^2 - 2(x-1)\frac{y+1}{(z(x,y)-2)^3}dxdy,$$

Pentru M_1, $d^2z(1,-1) = 4dx^2+4dy^2$ pozitiv definită, deci M_1 este punct de minim, iar $z_{\min} = -2$.

Pentru $M_2, d^2z(1,-1) = -\frac{1}{4}(dx^2+dy^2)$ este negativ definită, deci M_2 este punct de maxim, iar $z_{\max} = 6$.

8.2.3. Aflaţi punctele de extrem local condiţionat ale funcţiilor următoare, ale căror variabile sunt supuse legăturilor specificate:

i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = x^2+y^2-x-y$, variabilele fiind legate prin condiţia $x+y=1$.

ii) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x,y,z) = xyz,\ x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$, variabilele fiind condiţionate de relaţia $x+y+z=3$.

Soluţie 8.2.3. i) Funcţia lui Lagrange este $L(x,y,\lambda) = (x^2+y^2-x-y) + \lambda(x+y-1), \lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 + \lambda = 0 \\ 2y - 1 + \lambda = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$$ obţinând punctul critic condiţionat.
$M(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \lambda = 0$, deci $d^2L(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 2(dx)^2 + 2(dy)^2 > 0$ (pozitiv definită), de unde $M(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ este punct de minim local condiţionat.

ii) *Metoda I.* $L(x, y, z, \lambda) = xyz + \lambda(x + y + z - 3), \lambda \in \mathbb{R}$.
$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_z \\ x + y + z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} yz + \lambda = 0 \\ xz + \lambda = 0 \\ xy + \lambda = 0 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$ şi obţinem punctul critic condiţionat
$M(1, 1, 1), \lambda = -1$, deci $d^2L(1, 1, 1) = 2(dxdy + dxdz + dydz)$.

Diferenţiind legătura, avem $dx + dy + dz = 0$, de unde $d^2L(1, 1, 1) = 2(dxdy - (dx + dy)^2) = -2(dx^2 + dy^2 + dxdy) < 0$ (negativ definită), deci $M(1, 1, 1)$ este punct de maxim local condiţionat.

Metoda II. $z = 3 - x - y$, deci $f(x, y) = xy(3 - x - y)$ care are $\widetilde{M}(1, 1)$ punct de maxim local, deci regăsim că $M(1, 1, 1)$ este punct de maxim local condiţionat.

8.2.4. Calculaţi distanţa de la origine la planul de ecuaţie $Ax + By + Cz + D = 0$, unde $A, B, C, D \in \mathbb{R}, A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Soluţie 8.2.4. *Metoda I.* Fie $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Se studiază extremele funcţiei cu condiţia $Ax + By + Cz + D = 0$, considerând funcţia lui Lagrange $L(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(Ax + By + Cz + D)$ şi se obţine punctul critic $M(-\frac{\lambda A}{2}, -\frac{\lambda B}{2}, -\frac{\lambda C}{2}), \lambda = \frac{2D}{A^2+B^2+C^2}$. Atunci $L(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + \frac{2D}{A^2+B^2+C^2}(Ax + By + Cz + D)$, de unde $d^2L = 2(dx^2 + dy^2 + dz^2) > 0$. Prin urmare, M este punct de minim local.

Observăm că $M(-\frac{A \cdot D}{A^2+B^2+C^2}, -\frac{B \cdot D}{A^2+B^2+C^2}, -\frac{C \cdot D}{A^2+B^2+C^2})$ este punct de minim absolut:

$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{D^2}{(A^2+B^2+C^2)^2}$.

Într-adevăr, deoarece $Ax + By + Cz + D = 0$, datorită inegalităţii Cauchy-Buniakowski-Schwartz avem

$D^2 = (Ax + By + Cz)^2 \overset{CBS}{\leq} (A^2 + B^2 + C^2)^2 \cdot (x^2 + y^2 + z^2)$.

Deci
$$d_{\min} = d(0, \pi) = \frac{|D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Metoda II. Fără a restrânge generalitatea, se presupune, de exemplu, că $C \neq 0$, de unde $z = -\frac{1}{C}(Ax + By + D)$, ceea ce implică $f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{1}{C^2}(Ax + By + D)^2$, căreia i se studiază minimul.

8.2.5. Determinaţi extremele funcţiei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$, variabilele fiind legate prin condiţia $x^2 + y^2 + z^2 = 3, x, y, z > 0$.

Soluţie 8.2.5. Construim funcţia lui Lagrange $L(x, y, z, \lambda) = x^3 + y^3 + z^3 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 3)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Punctele critice condiţionate:

$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_z = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 2\lambda x = 0 \\ 3y^2 + 2\lambda y = 0 \\ 3z^2 + 2\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3 \end{cases}$$

rezultând punctul critic condiţionat $M(1, 1, 1), \lambda = -\frac{3}{2}$.

$$d^2L(1, 1, 1) = (6x + 2\lambda)_{(1,1,1),\lambda=-\frac{3}{2}} dx^2 + (6y + 2\lambda)_{(1,1,1),\lambda=-\frac{3}{2}} dy^2 + \\ + (6z + 2\lambda)_{(1,1,1),\lambda=-\frac{3}{2}} dz^2 = 3(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

este formă pătratică pozitiv definită, deci $M(1, 1, 1)$ este punct de minim local condiţionat.

8.2.6. Determinaţi extremele funcţiei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x - 2y + 2z$, variabilele fiind supuse la legătura $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

Soluţie 8.2.6. Construim funcţia lui Lagrange $L(x, y, z, \lambda) = x - 2y + 2z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 9)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Punctele critice condiţionate:

$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_z = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 2\lambda x = 0 \\ -2 + 2\lambda y = 0 \\ 2 + 2\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2\lambda} \\ y = \frac{1}{\lambda} \\ z = \frac{1}{\lambda} \\ x^2 + y^2 + z^2 = 9 \end{cases},$$

pentru $\lambda_1 = 1$ rezultând punctul critic condiţionat $M_1(-\frac{1}{2}, 1, -1)$, iar pentru $\lambda_2 = -1$ rezultând punctul critic condiţionat $M_2(\frac{1}{2}, -1, 1)$.

$d^2L = 2\lambda(dx^2 + dy^2 + dz^2)$ este pozitiv definită pentru $\lambda_1 = 1$, caz în care $M_1(-\frac{1}{2}, 1, -1)$ este punct de minim local conditionat şi este negativ definită pentru $\lambda_2 = -1$, caz în care $M_1(\frac{1}{2}, -1, 1)$ este punct de maxim local conditionat.

8.2.7. Determinaţi extremele funcţiei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = xy + yz + xz$, cu legătura $xyz = 1, x > 0, y > 0, z > 0$.

Soluţie 8.2.7. Construim funcţia lui Lagrange $L(x, y, z, \lambda) = xy + yz + xz + \lambda(xyz - 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Punctele critice condiţionate:

$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_z = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + z + \lambda yz = 0 \\ x + z + \lambda xz = 0 \\ x + y + \lambda xy = 0 \\ xyz = 1 \end{cases}$$

rezultând punctul critic condiţionat $M(1, 1, 1), \lambda = -2$.

$d^2L(1, 1, 1) = -2(dxdy + dydz + dzdx)$.

Diferenţiind legatura, avem $ydx + xzdy + xydz = 0$, care în $M(1, 1, 1)$ devine $dx + dy + dz = 0$, deci $d^2L(1, 1, 1) = -2[dxdy - (dx + dy)^2] = 2(dx^2 + dy^2 + dxdy)$ care este pozitiv definită deci $M(1, 1, 1)$ este punct de minim local conditionat.

8.2.8. În elipsoidul $\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 1$ să se înscrie un paralelipiped de volum maxim.

Soluţie 8.2.8. Fie $(x, y, z), x > 0, y > 0, z > 0$, coordonatele vârfului paralelipipedului.

Volumul paralelipipedului este $V(x, y, z) = 8xyz$. Deci trebuie determinat extremul condiţionat al funcţiei $f(x, y, z) = xyz, x > 0, y > 0, z > 0$, cu condiţia $\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 1$.

Construim funcţia lui Lagrange $L(x, y, z) = xyz + \lambda(\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} - 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Punctele critice condiţionate:

$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_z = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} yz + \frac{\lambda}{2}x = 0 \\ xz + \frac{\lambda}{2}y = 0 \\ xy + \frac{2}{9}z = 0 \end{cases},$$

de unde $M(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3})$ este singurul punct critic condiţionat al funcţiei.

Evaluând $d^2L(M)$, se obţine punctul de maxim local condiţionat $M(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3})$ iar $V_{\max} = \frac{48}{\sqrt{3}}$.

8.2.9. Determinaţi punctele de extrem ale funcţiei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + 3z^2$, condiţionate de relaţiile $x^2 + y + z - 1 = 0, 2x + y + 3z = 0$.

Soluţie 8.2.9. Funcţia lui Lagrange este

$$L(x, y, z, \lambda, \mu) = 2x^2 + y^2 + 3z^2 + \lambda(x^2 + y + z - 1) + \mu(2x + y + 3z).$$

Rezolvând sistemul $\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_z = 0 \\ L'_\lambda = 0 \\ L'_\mu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + \lambda + 2\mu = 0 \\ 2y + \lambda + \mu = 0 \\ 6z + \lambda + 3\mu = 0 \\ x^2 + y + z - 1 = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \end{cases}$, se obţine $x =$

$0, y = \frac{3}{2}, z = -\frac{1}{2}, \lambda = -6, \mu = 3$, deci $M(0, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ este singurul punct critic condiţionat.

$d^2L(0, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}) = -2dx^2 + 2dy^2 + 6dz^2$.

Diferenţiind legăturile, avem $2xdx + dy + dz = 0, 2dx + dy + 3dz = 0$. În punctul $M(0, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$, acestea devin $dy + dz = 0, 2dx + dy + 3dz = 0$, de unde $dz = -dy, dx = dy$, deci $d^2L(0, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}) = 6dx^2$, care este pozitiv definită, aşadar $M(0, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ este punct de minim local condiţionat.

8.2.10. Fie $f : (0, \infty)X(0, \infty)X\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x, y, z) = xyz$. Aflaţi extremele funcţiei cu legăturile $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0$.

Soluţie 8.2.10. Funcţia lui Lagrange este

$$L(x, y, z, \lambda, \mu) = xyz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1) + \mu(x + y + z).$$

Rezolvând sistemul $\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_z = 0 \\ L'_\lambda = 0 \\ L'_\mu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} yz + 2\lambda x + \mu = 0 \\ xz + 2\lambda y + \mu = 0 \\ xy + 2\lambda z + \mu = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$, găsim $M(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}})$ punct critic condiţionat.

$d^2L(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}) = 2\lambda(dx^2 + dy^2 + dz^2) + 2ydxdz + 2xdydz + 2zdxdy$.

Diferenţiind legăturile, avem $xdx + ydy + zdz = 0, dx + dy + dz = 0$, deci în punctul $M(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}})$ obţinem $dx + dy - 2dz = 0, dx + dy + dz = 0$, de unde $dz = 0, dy = -dx$, ceea ce implică $d^2L(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}) = \frac{2}{\sqrt{6}}dx^2$ formă pătratică pozitiv definită.

În concluzie, $M(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}})$ este punct de minim local condiţionat.

8.2.11. Determinaţi punctele de cotă maximă şi minimă ale intersecţiei planului $x - 2y + z = 1$ cu cilindrul de ecuaţie $x^2 + y^2 = 1$.

Soluţie 8.2.11. $z = f(x, y) = 1 - x + 2y$. Trebuie să determinăm extremele acestei funcţii, variabilele x, y fiind legate prin condiţia $x^2 + y^2 = 1$.

Funcţia lui Lagrange este $L(x, y, \lambda) = 1 - x + 2y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$.

Rezolvând sistemul $\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 + 2\lambda x = 0 \\ 2 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$, se obţin punctele critice condiţionate $M_1(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$ pentru $\lambda_1 = -\frac{\sqrt{5}}{2}$ şi $M_2(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}})$ pentru $\lambda_2 = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

$d^2L = \lambda(dx^2 + dy^2)$, deci M_1 este punct de cotă maximă şi $f(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}) = 1 + \sqrt{5}$, iar M_2 este punct de cotă minimă şi $f(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}) = 1 - \sqrt{5}$.

8.2.12. Determinaţi extremele globale $\inf\limits_{(x,y)\in K} f(x,y)$, $\sup\limits_{(x,y)\in K} f(x,y)$ pentru funcţia $f(x,y) = x^2 - 3x + y^2 - 2y + 1$, definită pe compactul $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Soluţie 8.2.12. Deoarece funcţia f este continuă pe mulţimea compactă K, conform Teoremei lui Weierstrass rezultă că este mărginită şi îşi atinge marginile. Extremele funcţiei vor fi situate sau în $\overset{\circ}{K} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2 < 1\}$ sau pe $FrK = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$.

În primul caz, se poate aplica Teorema lui Fermat ($\overset{\circ}{K}$ este mulţime deschisă).

Soluţia sistemului $\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases}$ este $M(\frac{3}{2}, 1) \notin \overset{\circ}{K}$, deci punctele de extrem se vor găsi doar pe FrK.

Problema devine astfel una de extrem condiţionat pentru funcţia f, ale cărei variabile sunt legate prin relaţia $x^2 + y^2 = 1$.

Funcţia lui Lagrange este $L(x,y,\lambda) = x^2 - 3x + y^2 - 2y + 1 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$.

Rezolvând sistemul $\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases}$, se obţin punctele critice condiţionate $M_1(-\frac{3}{\sqrt{13}}, -\frac{2}{\sqrt{13}})$, $M_2(\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}})$.

Evaluând d^2L, se obţine că M_1 este punct de maxim local condiţionat, iar M_2 este punct de minim local condiţionat.

Prin urmare, $\inf\limits_{(x,y)\in K} f(x,y) = f(\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}) = 2 - \sqrt{13}$, $\sup\limits_{(x,y)\in K} f(x,y) = f(-\frac{3}{\sqrt{13}}, -\frac{2}{\sqrt{13}}) = 2 + \sqrt{13}$.

8.2.13. Determinaţi valoarea maximă a funcţiei $f = f(x_1, x_2..., x_n) = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n}$, dacă $x_1 + x_2 + ... + x_n = a, x_i > 0, \forall i = \overline{1,n}$ (*inegalitatea mediilor*).

Soluţie 8.2.13. Funcţia lui Lagrange este $L(x_1, x_2..., x_n, \lambda) = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n} + \lambda(x_1 + x_2 + ... + x_n - a)$.

Rezolvând sistemul $\begin{cases} L'_{x_1} = \frac{1}{n} \frac{x_2 x_3 ... x_n}{(x_1 x_2 ... x_n)^{\frac{n-1}{n}}} + \lambda = \frac{1}{n}\frac{f}{x_1} + \lambda = 0 \\ L'_{x_2} = \frac{1}{n} \frac{x_1 x_3 ... x_n}{(x_1 x_2 ... x_n)^{\frac{n-1}{n}}} + \lambda = \frac{1}{n}\frac{f}{x_2} + \lambda = 0 \\ ... \\ L'_{x_n} = \frac{1}{n} \frac{x_1 x_2 ... x_{n-1}}{(x_1 x_2 ... x_n)^{\frac{n-1}{n}}} + \lambda = \frac{1}{n}\frac{f}{x_n} + \lambda = 0 \\ L'_\lambda = x_1 + x_2 + ... + x_n - a = 0 \end{cases}$, se obţine punctul critic condiţionat $M(\frac{\lambda}{n}, \frac{\lambda}{n}, \ldots, \frac{\lambda}{n}), \lambda = a$.

$d^2L(\frac{a}{n}, \frac{a}{n}, \ldots, \frac{a}{n}) < 0$, deci $M(\frac{a}{n}, \frac{a}{n}, \ldots, \frac{a}{n})$ este punct de maxim condiţionat, deci $f_{\max} = f(M) = \frac{a}{n}$, de unde $\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \leq \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}, x_i > 0, \forall i = \overline{1,n}$, adică tocmai inegalitatea mediilor.

8.2.14. Descompuneţi un număr pozitiv dat a în trei termeni pozitivi astfel încât expresia $x^m y^n z^p$ sa fie maximă ($m, n, p > 0$ date).

Soluţie 8.2.14. Expresia $x^m y^n z^p$ este maximă dacă şi numai dacă expresia $\ln(x^m y^n z^p)$ este maximă, maximul atingându-se în aceleaşi puncte).

Fie atunci funcţia $f(x, y, z) = \ln(x^m y^n z^p) = m \ln x + n \ln y + p \ln z$ şi ne interesează extremele sale în condiţia în care $x + y + z = a$, cu $x, y, z > 0$.

Funcţia lui Lagrange este $L(x, y, z, \lambda) = m \ln x + n \ln y + p \ln z + \lambda(x + y + z - a)$.

Punctele critice condiţionate:

$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_z = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m}{x} + \lambda = 0 \\ \frac{n}{y} + \lambda = 0 \\ \frac{p}{z} + \lambda = 0 \\ x + y + z = a \end{cases}$$

8.2.15. Aflaţi distanţa minimă dintre dreapta $x - y = 5$ şi parabola $y = x^2$.

Soluţie 8.2.15. $d_{\min} = \min \sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2}$, cu condiţiile $x - y = 5$ şi $v = u^2$.

Fie deci funcţia $f(x, y, u, v) = (x - u)^2 + (y - v)^2$ şi dorim să stabilim minimul său în condiţiile în care variabilele sunt supuse la legăturile $x - y = 5$, $v = u^2$, deci problema devine una de extreme cu legături.

Funcţia lui Lagrange este $L(x, y, u, v, \lambda, \mu) = (x - u)^2 + (y - v)^2 + \lambda(x - y - 5) + \mu(u^2 - v)$.

Punctele critice condiţionate:

$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_u = 0 \\ L'_v = 0 \\ L'_\lambda = 0 \\ L'_\mu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x-u) + \lambda = 0 \\ 2(y-v) - \lambda = 0 \\ 2(u-x) + 2\mu u = 0 \\ 2(v-y) - \mu = 0 \\ x - y = 5 \\ v = u^2 \end{cases},$$

rezultând singurul punct critic condiţionat $M(\frac{23}{8}, \frac{1}{2}, -\frac{17}{8}, \frac{1}{4})$.

$d^2L(\frac{23}{8}, \frac{1}{2}, -\frac{17}{8}, \frac{1}{4}) = 2(dx^2 + dy^2 + du^2 + dv^2) - 2(dxdu + dydv)$ este formă pătratică pozitiv definită, deci $M(\frac{23}{8}, \frac{1}{2}, -\frac{17}{8}, \frac{1}{4})$ este punct de minim condiţionat, iar $d_{\min} = \sqrt{(\frac{23}{8} + \frac{17}{8})^2 + (\frac{1}{2} - \frac{1}{4})^2} = \frac{19\sqrt{2}}{8}$.

8.2.16. Aflaţi distanţa minimă dintre curbele $C_1 = \{(x, y); 2y = x^2\}$ şi $C_2 = \{(x, y); (x - 2)^2 + y^2 = 1\}$.

Soluţie 8.2.16. $d_{\min} = \min \sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2}$, cu condiţiile $x^2 = 2y$ şi $(u-2)^2 + v^2 = 1$.

Fie deci funcţia $f(x, y, u, v) = (x-u)^2 + (y-v)^2$ şi dorim să stabilim minimul său în condiţiile în care variabilele sunt supuse la legăturile $x^2 = 2y$, $(u-2)^2 + v^2 = 1$, deci problema devine una de extreme cu legături.

Funcţia lui Lagrange este $L(x, y, u, v, \lambda, \mu) = (x-u)^2 + (y-v)^2 + \lambda(x^2 - 2y) + \mu((u-2)^2 + v^2 - 1)$.

Punctele critice condiţionate:

$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_u = 0 \\ L'_v = 0 \\ L'_\lambda = 0 \\ L'_\mu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x-u) + 2\lambda x = 0 \\ 2(y-v) - 2\lambda = 0 \\ 2(u-x) + 2\mu(u-2) = 0 \end{cases},$$

rezultând

8.2.17. Determinaţi semiaxele elipsei $13x^2 - 10xy + 13y^2 - 144 = 0$.

Soluţie 8.2.17. Să observăm că elipsa are centrul în origine, iar vârfurile sale au proprietatea că se află la distanţa maximă/minimă de centru. Prin urmare, trebuie să aflăm extremele funcţiei $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, cu condiţia $13x^2 - 10xy + 13y^2 - 144 = 0$.

Funcţia lui Lagrange este $L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(13x^2 - 10xy + 13y^2 - 144)$.

Punctele critice condiţionate:

$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 26\lambda x - 10\lambda y = 0 \\ 2y + 26\lambda y - 10\lambda x = 0 \\ 13x^2 - 10xy + 13y^2 - 144 = 0 \end{cases}$$

rezultând $\lambda_1 = -\frac{1}{8}, x - y = 0, \lambda_1 = -\frac{1}{18}, x + y = 0$, adică două vârfuri ale elipsei sunt pe prima bisectoare, iar celelalte două sunt pe bisectoarea a doua.

Înlocuind în ecuaţia elipsei, găsim $x^2 = y^2 = 9$, respectiv $x^2 = y^2 = 4$, deci $a = 3\sqrt{2}, b = 2\sqrt{2}$.

8.2.18. Arătaţi că pentru orice triunghi înscris într-un cerc de rază R, avem $a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2$.

Soluţie 8.2.18. Deoarece $a = 2R \sin A, b = 2R \sin B, c = 2R \sin C$, rămâne să arătăm că $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq \frac{9}{4}$.

Să aflăm aşadar maximul funcţiei $f(x, y, z) = \sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z$, $x, y, z \in (0, \pi)$, variabilele fiind legate prin condiţia $x + y + z = \pi$.

Funcţia lui Lagrange este $L(x,y,z,\lambda) = \sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z + \lambda(x + y + z - \pi)$.

Punctele critice condiţionate:

$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_z = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x + \lambda = 0 \\ \sin 2y + \lambda = 0 \\ \sin 2z + \lambda = 0 \\ x + y + z = \pi \end{cases}$$

Singurul punct critic condiţionat este $M(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$.

$d^2L(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}) = -2(dx^2 + dy^2 + dz^2) < 0$ (este formă pătratică negativ definită), deci $M(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ este punct de maxim condiţionat, deci $\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z \leq \frac{9}{4}, x, y, z \in (0, \pi)$, $x + y + z = \pi$, de unde, concluzia.

8.3 Probleme propuse

8.3.1. Determinaţi extremele funcţiei $f(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, variabilele fiind legate prin condiţia $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}$.

8.3.2. Determinaţi extremele funcţiei $f(x,y) = xy$, cu legătura $x^2 + y^2 = a^2$.

8.3.3. Determinaţi punctele de extrem local ale funcţiilor următoare, ale căror variabile sunt supuse legăturilor indicate:

i) $f(x,y) = xy$, $x + y = a$ ($a \in \mathbb{R}$ arbitrar, fixat);

ii) $f(x,y,z) = xy + yz + xz$, $xyz = 1, x > 0, y > 0, z > 0$.

8.3.4. Fie mulţimea $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 25\}$ şi funcţia $f : A \to \mathbb{R}, f(x,y) = 9 - 8x - 6y$. Arătaţi că mulţimea $f(A)$ este un interval şi determinaţi-l. Calculaţi $\sup\limits_{(x,y)\in A} |f(x,y)|$.

8.3.5. Arătaţi că dintre toate patrulaterele care se pot forma cu patru segmente date, patrulaterul inscriptibil are aria maximă.

Soluţii

8.3.1.

8.3.2.

8.3.3.

8.3.4.

$\boxed{\textbf{8.3.5.}}$ —–

A-4 Fie $a \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in [0,\infty)$ şi A, B submulţimi nevide ale lui $\mathbb{R}^p$. Arătaţi că:

(i) $\text{diam} S(a,\varepsilon) = 2\varepsilon$;

(ii) $A \subseteq B \Rightarrow \text{diam} A \leq \text{diam} B$;

(iii) $\text{diam} A = 0 \Leftrightarrow \text{card} A = 1$.

Soluţie A-4. (i)

(ii) Din $A \subseteq B$ rezultă $\{d(x,y)|x,y \in A\} \subseteq \{d(x,y)|x,y \in B\}$, iar de aici se obţine

$$\sup\{d(x,y)|x,y \in A\} \leq \sup\{d(x,y)|x,y \in B\},$$

adică $\text{diam}\, A \leq \text{diam}\, B$.

(iii) Fie $x, y \in A$. Avem $0 \leq d(x,y) \leq \text{diam}\, A = 0$, de unde rezultă că $d(x,y) = 0$. Atunci $x = y$, oricare ar fi $x, y \in A$. Deci A conţine un singur element, adică $\text{card}\, A = 1$.

A-5 Fie $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^p$. Arătaţi că:

(i) A este mărginită dacă şi numai dacă $\text{diam} A < +\infty$;

(ii) A este nemărginită dacă şi numai dacă $\text{diam} A = +\infty$.

Sol. (i) Presupunem că A este mărginită. Atunci există $r \in (0,\infty)$ astfel încât $A \subseteq S(0,r)$. Utilizând proprietăţile diametrului din *Problema* A-4, rezultă că $\text{diam} A \leq \text{diam} S(0,r) = 2r < +\infty$. Invers, să presupunem $\text{diam} A < +\infty$ şi fixăm $a \in A$. Considerăm $r \in \mathbb{R}$, $r > \|a\| + \text{diam} A \geq 0$ şi arătăm că $A \subseteq S(0,r)$. Fie $x \in A$. Avem asfel

$$\|x - a\| \leq \text{diam} A. \tag{2}$$

Din (2) rezultă că $\|x\| = \|x - a + a\| \leq \|x - a\| + \|a\| \leq \text{diam} A + \|a\| < r$. Deci $A \subseteq S(0,r)$, care arată că A este mărginită.

Pentru (ii) rezultă imediat din (i).

B-4 Fie $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^n$. Să se arate că A este compactă dacă şi numai dacă orice acoperire deschisă a lui A conţine o subacoperire finită (adică pentru orice $(D_i)_{i\in I} \subset \tau_0$ cu $A \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} D_i$, există $n \in \mathbb{N}^*$ şi $i_1, i_2, \ldots, i_n \in I$ astfel încât $A \subseteq \bigcup\limits_{k=1}^{n} D_{i_k}$).

A-5 Fie $\emptyset A \supseteq \mathbb{R}^p$. Să se arate că A este mărginită dacă şi numai dacă există $x_0 \in \mathbb{R}^p$ şi $\alpha \in (0,\infty)$ astfel încât $A \subseteq S(x_0,\alpha)$.

Sol A-5 Presupunem că A este mărginită. Din definiţie rezultă că $r \in (0,\infty)$ astfel încât $A \subseteq S(0,r)$ şi deci vom considera $x_0 = 0$ şi $\alpha = r$.

Invers, să presupunem că există $x_0 \in \mathbb{R}^p$ şi $\alpha \in (0,\infty)$ aşa încât $A \subseteq S(x_0,\alpha)$. Să considerăm $r \in \mathbb{R}$, $r > \|x_0\| + \alpha > 0$ şi să arătăm că

$$S(x_0,\alpha) \subseteq S(0,r). \tag{1}$$

Fie $x \in S(x_0,\alpha)$. Avem astfel $\|x - x_0\| < \alpha$, de unde rezultă:

$$\|x\| = \|x - x_0 + x_0\| \leq \|x - x_0\| + \|x_0\| < \alpha + \|x_0\| < r.$$

Deci $\|x\| < r$, ceea ce arată că $x \in S(0,r)$ şi astfel are loc (1). Cum $A \subseteq S(x_0,\alpha)$, din (1) rezultă $A \subseteq S(0,r)$, adică A este mărginită.

Sol B-5 *Soluţia 1.* Vom arăta că $A+B$ este mărginită şi închisă. Din faptul că A şi B sunt mărginite, rezultă că există $r_1, r_2 \in [0,+\infty)$ astfel încât $\|x\| < r_1$, oricare ar fi $x \in A$ şi $\|y\| \leq r_2$, oricare ar fi $y \in B$. Atunci $\|z\| = \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \leq r_1 + r_2$ pentru orice $z \in A+B$. Deci $A+B$ este mărginită. Pentru a arăta că $A+B$ este închisă, vom folosi *Teorema* 1.1.33. Fie $z \in \overline{A+B}$. Conform *Teoremei ..* , există $(z_0)_{n\in\mathbb{N}} \subset A+B$ astfel încât $z_n \to z$. Dar $z_n = x_n + y_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, unde $x_n \in A$ şi $y_n \in B$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$. Cum A e compactă, conform *Teoremei...*, există $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ un subşir al şirului (x_n) astfel încât $x_{n_k} \to x \in A$. B este compactă, conform aceleaşi *Teroreme* ..., există $(y_{n_{k_l}})_{l\in\mathbb{N}}$ un subşir al şirului (y_{n_k}) aşa încât $y_{n_{k_l}} \to y \in B$. Avem $z_{n_{k_l}} = x_{n_{k_l}} + y_{n_{k_l}}$, pentru orice $l \in \mathbb{N}$ şi trecând la limită obţinem $z = x + y \in A + b$. Deci $\overline{A+B} \subseteq A+B$, care arată că $A+B$ este închisă.

Solutia 2. Vom utliza *Teorema* .... Fie $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A+B$, $z_n = x_n + y_n$, unde $x_n \in A$ şi $y_n \in B$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. A fiind compactă, există $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ un subşir al şirului (x_n) aşa încât $x_{n_k} \to x \in A$. Analog, din B compactă rezultă că există $(y_{n_{k_l}})_{l\in\mathbb{N}}$ un subşir al lui (y_{n_k}) astfel încât $y_{n_{k_l}} \to y \in B$. Considerând subşirul $z_{n_{k_k}} = x_{n_{k_l}} + y_{n_{k_l}}$, avem $z_{n_{k_l}} \to x + y \in A + B$. Conform *Teoremei...*, $A+B$ este compactă.

C-1 Fie $f(x,y) = \frac{y-2}{x^2}$, $(x,y) \in D$, $D \subset \mathbb{R}^2$.

(i) Determinaţi D şi D', unde D este domeniul maxim de definiţie pentru funcţia f.

(ii) Găsiţi un şir $c_n = (a_n, b_n) \in D$ asă încât $c_n \xrightarrow{\mathbb{R}^2} (2,1)$ şi calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n, b_n)$.

(iii) Calculaţi $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)} f(x,y)$.

(iv) Găsiţi un şir $d_n = (u_n, v_n) \in D$ aşa încât $d_n \xrightarrow{\mathbb{R}^2} (0,2)$ şi calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} f(u_n, v_n)$.

(v) Fie $z_n = (x_n, y_n)$, unde $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $y_n = \frac{2\lambda n+1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n, y_n)$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n)$. Reprezentaţi curba pe care se află termenii şirului $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

(vi) Stabiliţi dacă există $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} f(x, y)$ şi, în caz afirmativ, determinaţi valoarea limitei.

Soluţii

8.3.1.

8.3.2.

8.3.3.

8.3.4.

8.3.5. —