SPAŢII METRICE

Spaţiile metrice sunt caracterizate de o distanţă între obiecte matematice de acelaşi fel: numere, puncte, funcţii etc. Constituie cadrul natural de prezentare a unor noţiuni fundamentale în Analiza Matematică: şir convergent, limita şi continuitatea funcţiilor etc.

Definiţie. Fie $X \neq \emptyset$. O aplicaţie $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ se numeşte *distanţă* sau *metrică* pe X dacă au loc:

D_1) $d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in X; d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (*pozitivitatea distanţei*);

D_2) $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X$ *(simetria);*

D_3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \forall x, y, z \in X$ *(inegalitatea triunghiulară).*

Perechea (X, d) se numeşte *spaţiu metric.*

Observaţie. Pe o aceeaşi mulţime se pot defini mai multe metrici. În raport cu fiecare, mulţimea devine un alt spaţiu, cu proprietăţi specifice.

Propoziţie. Într-un spaţiu metric (X, d) au loc:

i) $d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + ... + d(x_{n-1}, x_n), \forall x_1, x_2, ..., x_n \in X$;

ii) $|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y), \forall x, y, z \in X$;

iii) $|d(x, y) - d(x', y')| \leq d(x, x') + d(y, y'), \forall x, y, x', y' \in X$.

Demonstraţie. i) Se aplică succesiv inegalitatea triunghiulară.

ii) $\forall x, y, z \in X$, avem $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, de unde $d(x, z) - d(y, z) \leq d(x, y)$.

Procedând analog sau schimbând între ele rolurile lui x şi y şi folosind proprietatea de simetrie a metricii obţinem şi $d(y, z) - d(x, z) \leq d(y, x)$, de unde $|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y), \forall x, y, z \in X$.

iii) Folosind i) şi simetria metricii avem $d(x, y) \leq d(x, x') + d(x', y') + d(y, y'), \forall x, y, x', y' \in X$, de unde $d(x, y) - d(x', y') \leq d(x, x') + d(y, y')$.

Procedând analog sau schimbând rolurile lui x şi y cu x' şi y' şi folosind proprietatea de simetrie a metricii obţinem şi $d(x', y') - d(x, y) \leq d(x, x') + d(y, y')$, de unde $|d(x, y) - d(x', y')| \leq d(x, x') + d(y, y'), \forall x, y, x', y' \in X$.

Exemple de spaţii metrice:

i) $(\mathbb{R}, d)$, unde $d(x, y) = |x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$, este spaţiu metric.

Demonstraţia este imediată.

ii) Fie A o mulţime oarecare nevidă şi $\mathcal{B}(A) = \{f : A \to \mathbb{R};\ f$ mărginită pe $A\}$. Atunci funcţia $d : \mathcal{B}(A) \times \mathcal{B}(A) \to \mathbb{R}_+, d(f, g) = \sup\limits_{x \in A} |f(x) - g(x)|, \forall f, g \in \mathcal{B}(A)$, este o metrică pe $\mathcal{B}(A)$.

Demonstraţie. d este bine definită.

$D_1 : \forall f, g \in \mathcal{B}(A), d(f, g) \geq 0$ şi $d(f, g) = 0 \Leftrightarrow f = g$ (pe A);

$D_2 : d(f, g) = d(g, f), \forall f, g \in \mathcal{B}(A)$;

$D_3 : \forall f, g, h \in \mathcal{B}(A), \forall x \in A,$

$$\begin{aligned}|f(x) - h(x)| &\leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)| \leq \\ &\leq \sup_{x\in A}|f(x) - g(x)| + \sup_{x\in A}|g(x) - h(x)| = d(f, g) + d(g, h).\end{aligned}$$

Trecând la supremum în membrul stâng, avem

$\sup\limits_{x\in A}|f(x) - h(x)| = d(f, h) \leq d(f, g) + d(g, h).$

iii) Fie X o mulţime nevidă oarecare. Funcţia $d : X \times X \to \mathbb{R}_+, d(x, y) = \begin{cases} 1, x \neq y \\ 0, x = y \end{cases}$ este metrică pe X, numită *metrica discretă*.

Demonstraţie. $D_1 : \forall x, y \in X, d(x, y) \geq 0$ şi $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

$D_2 : d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X$;

$D_3 : \forall x, y, z \in X,$

$\cdot$ dacă $x \neq y \neq z \neq x$, atunci $d(x, z) = 1 < d(x, y) + d(y, z) = 2$

$\cdot$ dacă $x = z \neq y$, atunci $d(x, z) = 0 < d(x, y) + d(y, z) = 1$

$\cdot$ dacă $x \neq y = z$, atunci $d(x, z) = 1 = d(x, y) + d(y, z) = 1$

$\cdot$ dacă $x = y \neq z$, atunci $d(x, z) = 1 = d(x, y) + d(y, z) = 1$

$\cdot$ dacă $x = y = z$, atunci $d(x, z) = 0 = d(x, y) + d(y, z)$.

SPAŢII VECTORIALE NORMATE.

Fie $(X, +, \cdot)$ un spaţiu vectorial (liniar) real (peste $\mathbb{R}$) ("+" - adunarea, "$\cdot$" - înmulţirea cu scalari reali). Sunt satisfăcute deci următoarele axiome:

1) asociativitatea: $x + (y + z) = (x + y) + z, \forall x, y, z \in X$;

2) existenţa elementului neutru (*originea*): $\exists\theta \in X$ astfel încât $\forall x \in X, x + \theta = \theta + x = x$;

3) $\forall x \in X, \exists -x \in X$ (*opusul* lui x) astfel încât $x + (-x) = (-x) + x = \theta$;

4) comutativitatea: $x + y = y + x, \forall x, y \in X$.

5) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y, \forall x, y \in X, \forall\lambda \in \mathbb{R}$;

6) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x, \forall x \in X, \forall\lambda, \mu \in \mathbb{R}$;

7) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x, \forall x \in X, \forall\lambda, \mu \in \mathbb{R}$;

8) $1 \cdot x = x, \forall x \in X$.

Definiţie. O funcţie $|| \cdot || : X \to \mathbb{R}_+$ se numeşte *normă* pe spaţiul vectorial X dacă:

N_1 $||x|| \geq 0, \forall x \in X; ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$ *(pozitivitatea normei);*

N_2 $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||, \forall x \in X, \forall\lambda \in \mathbb{R}$ *(omogenitatea);*

N_3 $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||, \forall x, y \in X$ *(inegalitatea triunghiulară).*

Perechea $(X, ||\cdot||)$ se numeşte *spaţiu normat.*

Observaţie. În raport cu fiecare normă definită pe un acelaşi spaţiu vectorial, acesta devine un alt spaţiu, cu proprietăţi specifice.

Propoziţie. Fie $(X, ||\cdot||)$ un spaţiu liniar normat. Atunci:
I)

$$\begin{aligned} \text{i) } |||x|| - ||y||| &\leq ||x-y||, \forall x, y \in X; \\ \text{ii) } ||\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_n u_n|| &\leq |\lambda_1|\cdot||u_1|| + |\lambda_2|\cdot||u_2|| + ... + |\lambda_n|\cdot||u_n||, \\ \forall \lambda_i &\in \mathbb{R}, \forall u_i \in X, i = \overline{1,n}; \end{aligned}$$

II) Funcţia $d(x,y) = ||x-y||, \forall x, y \in X$, este o distanţă pe X, cu proprietăţile:
i) $d(x+z, y+z) = d(x,y), \forall x, y, z \in X$;
ii) $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|\cdot d(x,y), \forall x, y \in X, \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Demonstraţie. I) i) $\forall x, y \in X, ||x|| = ||(x-y)+y|| \leq ||x-y|| + ||y||$, deci $||x|| - ||y|| \leq ||x-y||$. Schimbând rolurile între x şi y sau repetând procedeul: $||y|| = ||(y-x)+x|| \leq ||y-x|| + ||x|| = ||x-y|| + ||x||$, deci $||y|| - ||x|| \leq ||x-y||$, se obţine concluzia.
I) ii) Se aplică succesiv omogenitatea şi inegalitatea triunghiulară.
II) Afirmaţiile sunt imediate, folosind proprietăţile normei.

Observaţie. Orice spaţiu liniar normat poate fi organizat ca spaţiu metric (aşa cum am observat anterior, orice normă $||\cdot||$ induce o distanţă d. În plus, $||x|| = d(x,\theta)), \forall x \in X$.
Reciproca nu este adevărată (pentru definirea noţiunii de metrică nu se cere structură de spaţiu liniar; chiar dacă X ar fi spaţiu liniar, se pot defini metrici care să nu provină din norme, *vezi seminar*).

Exemple de spaţii normate.
i) $(\mathbb{R}, ||\cdot||)$ ($(\mathbb{R}, +, \cdot)$ este spaţiu liniar), $||x|| = |x|, \forall x \in \mathbb{R}$.
Demonstraţia este imediată.

ii) Fie A o mulţime oarecare nevidă. Se observă cu uşurinţă că $(\mathcal{B}(A), +, \cdot)$ este spaţiu liniar.
Funcţia $||\cdot|| : \mathcal{B}(A) \to \mathbb{R}_+, ||f|| = \sup\limits_{x\in A}|f(x)|, \forall f \in \mathcal{B}(A)$, este o normă, numită *norma uniformă*, care induce distanţa $d(f,g) = \sup\limits_{x\in A}|f(x) - g(x)|, \forall f, g \in \mathcal{B}(A)$.

Demonstraţie. $N_1 : \forall f \in \mathcal{B}(A), ||f|| \geq 0$ şi $||f|| = 0 \Leftrightarrow f = 0$ (0 este aici funcţia identic nulă);
$N_2 : ||\lambda f|| = \sup\limits_{x\in A}|\lambda f(x)| = |\lambda|\sup\limits_{x\in A}|f(x)| = |\lambda|\cdot||f||, \forall f \in \mathcal{B}(A)$;

$N_3 : \forall f, g \in \mathcal{B}(A), \forall x \in A,$

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \sup_{x \in A} |f(x)| + \sup_{x \in A} |g(x)| = ||f|| + ||g||.$$

Trecând la supremum în membrul stâng, avem
$\sup_{x \in A} |f(x) + g(x)| = ||f + g|| \leq ||f|| + ||g||.$

SPAŢIUL $\mathbb{R}^k$

Fie $\mathbb{R}$, mulţimea numerelor reale, iar $k \in \mathbb{N}^*$ un număr natural fixat.

Prin definiţie, spaţiul $\mathbb{R}^k$ este produsul cartezian $\underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}}_{k \text{ ori}}$.

(amintim că produsul cartezian al două mulţimi A şi B este $A \times B = \{(a, b); a \in A, b \in B\}$).

Prin urmare, un element $x \in \mathbb{R}^k$ dacă şi numai dacă $x = (x_1, x_2, ..., x_k)$, unde $x_i \in \mathbb{R}$, $\forall i = \overline{1, k}$ se numesc *componentele* lui x.

Elementele spaţiului $\mathbb{R}^k$ se numesc *vectori.*

Observăm următoarele:

Pentru $k = 1$, se obţine $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$, care reprezintă din punct de vedere geometric punctele axei reale (dreapta reală);

Pentru $k = 2$, se obţine $\mathbb{R}^2$, care reprezintă mulţimea punctelor din plan (raportat la un sistem ortogonal de axe) (planul)

$$x = (x_1, x_2) \overset{\text{corespondenţă biunivocă}}{\leftrightarrows} P(x_1, x_2) \leftrightarrows \overrightarrow{OP} \text{ (vector de poziţie);}$$

Pentru $k = 3$, se obţine $\mathbb{R}^3$, care reprezintă mulţimea punctelor din spaţiu (raportat la un sistem triortogonal de axe) (spaţiul)

$$x = (x_1, x_2, x_3) \overset{\text{corespondenţă biunivocă}}{\leftrightarrows} P(x_1, x_2, x_3) \leftrightarrows \overrightarrow{OP} \text{ (vector de poziţie).}$$

Fie $x, y \in \mathbb{R}^k$. Atunci $x = (x_1, x_2, ..., x_k)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_k)$.

Egalitatea a doi vectori: $x = y \Leftrightarrow x_i = y_i$, $\forall i = \overline{1, k}$ (pe componente).

Vom defini în cele ce urmează suma (adunarea) vectorilor:

După cum este cunoscut, în $\mathbb{R}^2$, adunarea a doi vectori $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$ se face după regula paralelogramului, rezultând vectorul sumă, $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$.

După acelaşi model, se defineşte *adunarea în* $\mathbb{R}^k$: $\forall x, y \in \mathbb{R}^k$, definim *suma vectorilor x şi y*, ca fiind vectorul

(1) : $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_k + y_k)$ (se defineşte pe componente).

Înmulţirea cu scalari (reali): $\forall x \in \mathbb{R}^k, \forall \lambda \in \mathbb{R}$, definim

(2) $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_k)$ (pe componente).

Teoremă. *Spaţiul* $\mathbb{R}^k$ *înzestrat cu operaţiile de adunare a vectorilor şi înmulţire a unui vector cu un scalar are structură de spaţiu liniar (sau vectorial) real.*

Demonstraţie. $(\mathbb{R}^k, +)$ este grup comutativ:

1) asociativitatea: $x + (y + z) = (x + y) + z, \forall x, y, z \in \mathbb{R}^k$;

2) existenţa elementului neutru: $\exists 0 = (0, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^k$ (numit *vectorul nul* sau *originea spaţiului* $\mathbb{R}^k$) astfel încât $\forall x \in \mathbb{R}^k, x + 0 = 0 + x = x$;

3) $\forall x = (x_1, x_2, ..., x_k) \in \mathbb{R}^k, \exists -x = (-x_1, -x_2, ..., -x_k) \in \mathbb{R}^k$ (opusul lui x) astfel încât $x + (-x) = (-x) + x = 0$;

4) comutativitatea: $x + y = y + x, \forall x, y \in \mathbb{R}^k$.

$(\mathbb{R}^k, \cdot)$:

5) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y, \forall x, y \in \mathbb{R}^k, \forall \lambda \in \mathbb{R}$;

6) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x, \forall x \in \mathbb{R}^k, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

Într-adevăr, $(\lambda+\mu)x = (\lambda+\mu)(x_1, x_2, ..., x_k) = ((\lambda+\mu)x_1, (\lambda+\mu)x_2, ..., (\lambda+\mu)x_k) =$

$= (\lambda x_1 + \mu x_1, \lambda x_2 + \mu x_2, ..., \lambda x_k + \mu x_k) = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_k)+$

$+(\mu x_1, \mu x_2, ..., \mu x_k) = \lambda x + \mu x$;

7) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x, \forall x \in \mathbb{R}^k, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$;

8) $1 \cdot x = x, \forall x \in \mathbb{R}^k$.

Norma euclidiană (în $\mathbb{R}^k$)

Introducem în cele ce urmează următoarea normă remarcabilă pe $\mathbb{R}^k$, numită *normă euclidiană*, despre care vom vedea că reprezintă generalizarea naturală la $\mathbb{R}^k$ a funcţiei modul din $\mathbb{R}$ (distanţa de la un punct la origine).

$||\cdot|| : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}_+ : \forall x \in \mathbb{R}^k, x = (x_1, x_2, ..., x_k)$,

$$||x|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_k^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} x_i^2}.$$

Observaţie. i) Pentru $k = 1$, $||x|| = \sqrt{x^2} = |x|-$distanţa de la punct la origine;

Pentru $k = 2$, $||x|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ - distanţa de la punct la origine;

Pentru $k = 3$, $||x|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ - distanţa de la punct la origine.

ii) Norma euclidiană satisface toate proprietăţile $N_1 - N_3$ ale unei norme:

N_1 : Fie $x = (x_1, x_2, ..., x_k), x_i \in \mathbb{R}$, $\forall i = \overline{1, k}$, oarecare. Evident, $||x|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_k^2} \geq 0$.

De asemenea, $||x|| = 0 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + ... + x_k^2 = 0 \Leftrightarrow x_i = 0$, $\forall i = \overline{1, k} \Leftrightarrow x = (x_1, x_2, ..., x_k) = 0$.

$N_2 : \forall x \in \mathbb{R}^k, \forall \lambda \in \mathbb{R}, ||\lambda x|| = ||(\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_k)|| = \sqrt{\lambda^2 x_1^2 + \lambda^2 x_2^2 + ... + \lambda^2 x_k^2} =$

$= \sqrt{\lambda^2(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_k^2)} = |\lambda|||x||$.

$N_3 : \forall x, y \in \mathbb{R}^k, ||x+y|| \leq ||x||+||y|| \Leftrightarrow \sqrt{(x_1+y_1)^2+(x_2+y_2)^2+...+(x_k+y_k)^2} \leq \sqrt{x_1^2+x_2^2+...+x_k^2}+\sqrt{y_1^2+y_2^2+...+y_k^2}$ (inegalitatea lui Minkowski) $\Leftrightarrow (x_1+y_1)^2+(x_2+y_2)^2+...+(x_k+y_k)^2 \leq (x_1^2+x_2^2+...+x_k^2)+(y_1^2+y_2^2+...+y_k^2)+$
$+2\sqrt{x_1^2+x_2^2+...+x_k^2} \cdot \sqrt{y_1^2+y_2^2+...+y_k^2} \Leftrightarrow x_1y_1+x_2y_2+...+x_ky_k \leq \sqrt{x_1^2+x_2^2+...+x_k^2} \cdot \sqrt{y_1^2+y_2^2+...+y_k^2}$ (A) (inegalitatea lui Cauchy -Buniakowski-Schwartz).

Astfel, $(\mathbb{R}^k, ||\cdot||)$ formează un **spaţiu vectorial (liniar) real normat** ($||\cdot||$ fiind aici norma euclidiană).

Teoremă. *Norma euclidiană are, de asemenea, următoarele proprietăţi*:

$$\begin{aligned} N_4\ |x_i| &\leq ||x|| \leq |x_1|+|x_2|+...+|x_k|, \forall i=\overline{1,k}; \\ N_5\ ||x+y||^2+||x-y||^2 &= 2(||x||^2+||y||^2), \forall x,y \in \mathbb{R}^k \end{aligned}$$

(*identitatea paralelogramului*, datorită interpretării evidente în plan).

Demonstraţie. $N_4 : \forall x \in \mathbb{R}^k, x=(x_1,x_2,...,x_k), x_i \in \mathbb{R}, \forall i=\overline{1,k}, |x_i| = \sqrt{x_i^2} \leq ||x||$, iar $||x|| = \sqrt{x_1^2+x_2^2+...+x_k^2} \leq |x_1|+|x_2|+...+|x_k|$ (se verifică imediat prin ridicare la pătrat).
$N_5 : \forall x,y \in \mathbb{R}^k, x=(x_1,x_2,...,x_k), y=(y_1,y_2,...,y_k), x_i, y_i \in \mathbb{R}, \forall i=\overline{1,k}$,
$||x+y||^2+||x-y||^2 = \sum\limits_{i=1}^{k}(x_i+y_i)^2+\sum\limits_{i=1}^{k}(x_i-y_i)^2 = 2(\sum\limits_{i=1}^{k}x_i^2+\sum\limits_{i=1}^{k}y_i^2) = 2(||x||^2+||y||^2)$.

Definiţie. Numim *versor,* un vector $x \in \mathbb{R}^k$, cu (norma euclidiană) $||x||=1$.

Dacă $k=3$, versorii $i=(1,0,0); j=(0,1,0); k=(0,0,1)$ formează o bază în $\mathbb{R}^3$. Orice vector $x=(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$ se exprimă în mod unic în funcţie de aceşti versori: $x = x_1 i + x_2 j + x_3 k$.
În general (în $\mathbb{R}^k$), versorii $e_1=(1,0,0,...,0); e_2=(0,1,0,...,0),...,e_k=(0,0,0,...,0,1)$ formează o bază în $\mathbb{R}^k$. Orice vector $x=(x_1,x_2,...,x_k) \in \mathbb{R}^k$ se exprimă în mod unic în funcţie de aceşti versori: $x = x_1e_1+x_2e_2+...+x_ke_k$.

Probleme propuse.

I. 1. Determinaţi toate normele pe $\mathbb{R}$.

2. Fie $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, d(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$. Arătaţi că d este o metrică pe $\mathbb{R}$ care nu provine dintr-o normă. Generalizare: $d : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}_+$, $d(x,y) = \sum\limits_{i=1}^{k} \frac{1}{2^i} \frac{|x_i-y_i|}{1+|x_i-y_i|}, \forall x,y \in \mathbb{R}^k$, este o metrică pe $\mathbb{R}^k$, care nu provine dintr-o normă.

3. Arătaţi că:

i) $d_1 : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}_+, d_1(x,y) = \max\limits_{i=\overline{1,k}} |x_i - y_i|$,

$d_2 : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}_+, d_2(x,y) = \sum\limits_{i=1}^{k} |x_i - y_i|$,

$\forall x = (x_1, x_2, ..., x_k), y = (y_1, y_2, ..., y_k) \in \mathbb{R}^k$

sunt distanţe pe $\mathbb{R}^k$;

ii) $|| \cdot ||_1 : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}_+, ||x||_1 = \max\limits_{i=\overline{1,k}} |x_i|, \forall x \in \mathbb{R}^k$,

$|| \cdot ||_2 : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}_+, ||x||_2 = \sum\limits_{i=1}^{k} |x_i|, \forall x \in \mathbb{R}^k$,

sunt norme pe $\mathbb{R}^k$ care induc distanţele de mai sus.

4. Fie $(X_i, d_i), i = \overline{1,n}$, spaţii metrice oarecare. Considerăm $X = X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ şi definim $d(x,y) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} d_i^2(x_i, y_i)}, \forall x = (x_1, x_2, ..., x_n), y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in X, x_i, y_i \in X_i, \forall i = \overline{1,n}$. Arătaţi că d este metrică pe spaţiul produs al celor n spaţii metrice ((X, d) se numeşte *spaţiul metric produs)*.

5. Fie (X, d) un spaţiu metric. Arătaţi că $d_1 : X \times X \to \mathbb{R}_+, d_1(x,y) = \ln(1 + d(x,y)), \forall x, y \in X$, este o metrică pe X.

6. Fie $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, d(x,y) = |arctgx - arctgy|, \forall x, y \in \mathbb{R}$. Arătaţi că:

i) d este metrică pe $\mathbb{R}$;

ii) $d(n+p, n) < \frac{1}{n}, \forall n, p \in \mathbb{N}^*$.

7. i) Fie $\mathcal{C}^1([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R}, f, f' \text{ continue pe } [a,b]\}$. Arătaţi că:

i) $d : \mathcal{C}^1([a,b]) \times \mathcal{C}^1([a,b]) \to \mathbb{R}_+$,

$d(f,g) = \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)| + \max\limits_{x\in[a,b]} |f'(x) - g'(x)|, \forall f, g \in \mathcal{C}^1([a,b])$, este o metrică pe $\mathcal{C}^1([a,b])$.

ii) Calculaţi distanţa în $\mathcal{C}^1([0,1])$ pentru $f(x) = x^2, g(x) = x^3, x \in [0,1]$.

iii) Este aplicaţia $|| \cdot || : \mathcal{C}^1([0,1]) \to \mathbb{R}_+, ||f|| = \sup\limits_{t\in[0,1]} |f(t) + f'(t)|$ o normă pe $\mathcal{C}^1([0,1])$? ($\mathcal{C}^1([0,1])$ este spaţiu liniar).

8. Fie $l^2 = \{x = (x_n)_{n\geq 1}, x_n \in \mathbb{R}, \forall n \geq 1, \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty\}$ (mulţimea şirurilor $x = (x_n)_{n\geq 1}$ cu proprietatea că $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$) (o generalizare infinit dimensională a spaţiului $\mathbb{R}^n$).

I) Arătaţi că:

i) $(l^2, +, \cdot)$ (adunare şi înmulţire cu scalari la şiruri) este spaţiu liniar real.

ii) Funcţia $|| \cdot ||_2 : l^2 \to \mathbb{R}_+, ||x||_2 = \sqrt{\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2}, \forall x \in l^2$, este o normă pe l^2.

iii) Calculaţi distanţa în l^2 dintre şirurile $x = (x_n = \frac{1}{n})_{n\geq 1}$ şi $y = (y_n = \frac{1}{n(n+1)})_{n\geq 1}$.

II) Generalizare pentru $l^p (p \in \mathbb{N}^*, p \geq 2)$.

9. Fie l^∞, spaţiul şirurilor mărginite.

i) Arătaţi că $(l^\infty, +, \cdot)$ este spaţiu liniar real, iar aplicaţia $||\cdot||_\infty : l^\infty \to \mathbb{R}_+, ||x||_\infty = \sup\limits_n |x_n|, \forall x = (x_n)_{n\geq 1} \in l^\infty$, este o normă pe l^∞.

ii) Calculaţi distanţa în l^∞ dintre şirurile $x = (x_n = \frac{1}{n})_{n\geq 1}$ şi $y = (y_n = \frac{1+(-1)^{n+1}}{n})_{n\geq 1}$.

10. Fie $\mathcal{C}([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R}, f$ continuă pe $[a,b]\}$. Arătaţi că:

i) Aplicaţia $||\cdot|| : \mathcal{C}([a,b]) \to \mathbb{R}_+, ||f|| = \sqrt{\int\limits_a^b f^2(x)dx}$ este o normă pe $\mathcal{C}([a,b])$ (spaţiu liniar real);

ii) Funcţia $d : \mathcal{C}([a,b]) \times \mathcal{C}([a,b]) \to \mathbb{R}_+, d(f,g) = \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|, \forall f, g \in \mathcal{C}([a,b])$ este o distanţă pe $\mathcal{C}([a,b])$ şi calculaţi $d(f,g)$ pentru $f(x) = x, g(x) = \ln x, x \in [\frac{1}{e}, e]$.

11. Găsiţi interpretări în plan ale inegalităţilor următoare şi justificaţi-le:

i) $|d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y), \forall x, y, z \in X$;

ii) $|d(x,y) - d(x',y')| \leq d(x,x') + d(y,y'), \forall x, y, x', y' \in X$ (*inegalitatea patrulaterului*).

(pentru i): Lungimea oricărei laturi a unui triunghi este cel puţin egală cu diferenţa lungimilor celorlalte două;

pentru ii): Într-un patrulater, diferenţa lungimilor a două laturi este cel mult egală cu suma lungimilor celorlalte două laturi).

II. 1. Determinaţi domeniile de definiţie ale funcţiilor următoare şi figuraţi-le:

i) $f(x) = \arcsin(\ln x) + 2\sqrt{1 - \ln^2 x}$;

ii) $f(x,y) = \sqrt{(x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2)}$;

iii) $f(x,y) = \sqrt{y - x}$;

iv) $f(x,y) = \sqrt{x^2 - y^2}$;

v) $f(x,y) = \arcsin \frac{x}{y^2} + \arcsin(1 - y)$;

vi) $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}$.

2. Figuraţi următoarele mulţimi:

i) $A = \{(x,y); x^2 + y^2 < 4, y \neq x + 1\}$;

ii) $A = \{(x,y); 0 < y < x + 1\}$;

iii) $A = \{(x,y); x^2 + y^2 \leq 4, x^2 + \frac{1}{4}y^2 \geq 1, x \geq 0\}$;

iv) $A = \{(x,y); 1 \leq xy \leq 3, 1 \leq \frac{y}{x} \leq 4, x > 0\}$;

v) $A = \{(x,y); 1 \leq x \leq e, 0 \leq y \leq \ln x\}$;

vi) $A = \{(x,y); 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$;

vii) $A = \{(x,y); x^2 + y^2 \leq 2, x \geq 0\}$;

viii) $A = \{(x,y); x^2 + y^2 \leq 2, x \leq y^2, x \geq -y^2, y \leq 0\}$;

ix) $A = \{(x,y); 1 \leq x \leq 2, 2 - x \leq y \leq \sqrt{2x - x^2}\}$;

x) $A = \{(x,y); x^2 + y \geq 1, x + y \leq \sqrt{2}, x - y \leq \sqrt{2}, x \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\}$;

xi) $A = \{(x,y,z); x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$;

xii) $A = \{(x_1,x_2); \max\{|x_1|, |x_2|\} < 1\}$;

xiii) $A = \{(x_1,x_2); |x_1| + |x_2| < 1\}$;

xiv) $A = \{(x, y); xy \neq 0, xy \geq -1\}$;
xv) $A = \{(x, y, z); x + y + z < 1, x > 0, y > 0, z \geq 0\}$;
xvi) $A = \{(x, y, z); x + y + z < 1\}$.