Definiţie. Spunem că:

i) funcţia f are *derivată parţială în punctul a în raport cu variabila x_i* dacă funcţia de o variabilă $(*)$ are derivată în punctul a în sens obişnuit (ca funcţie reală de o variabilă reală):

$\exists \lim\limits_{x_i \to a_i} \frac{f(a_1,a_2,...,a_{i-1},x_i,a_{i+1},...,a_n)-f(a_1,a_2,...,a_{i-1},a_i,a_{i+1},...,a_n)}{x_i-a_i} \overset{\text{not.}}{=} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ (sau $f'_{x_i}(a))(\in \overline{\mathbb{R}})$.

În acest caz, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ se numeşte *derivata parţială a funcţiei f în raport cu variabila x_i în punctul a*.

ii) funcţia f este *parţial derivabilă în punctul a în raport cu variabila x_i* dacă $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \in \mathbb{R}$.

iii) funcţia f este *parţial derivabilă în raport cu variabila x_i pe D* dacă f este parţial derivabilă în raport cu variabila x_i în orice punct din D.

În acest caz, se obţine o funcţie $\frac{\partial f}{\partial x_i} : D \to \mathbb{R}, \forall a \in D \rightsquigarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \in \mathbb{R}$ ($i = \overline{1,n}$ arbitrar, fixat).

iv) funcţia f este *parţial derivabilă pe D* dacă f este parţial derivabilă în raport cu toate variabilele în orice punct din D.

În acest caz, se pot defini n funcţii $\frac{\partial f}{\partial x_i} : D \to \mathbb{R}, i = \overline{1,n}$, numite *derivatele parţiale ale lui f pe D*.

Observaţie. i) Spre deosebire de cazul funcţiilor reale de o singură variabilă reală, o funcţie poate să nu fie continuă într-un punct, dar să fie derivabilă parţial în raport cu toate variabilele în acel punct:

Funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} 1, x \neq 0 \text{şi } y \neq 0 \\ 0, x = 0 \text{ sau } y = 0 \end{cases}$ nu este continuă în origine, dar admite derivate parţiale în origine:

f nu este continuă în $(0,0)$ deoarece nici nu există $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$:

$(\frac{1}{n},0) \to (0,0), (\frac{1}{n},\frac{1}{n}) \to (0,0), f(\frac{1}{n},0) = 0 \to 0, f(\frac{1}{n},\frac{1}{n}) = 1 \to 1 \neq 0.$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{0-0}{x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim\limits_{y\to 0} \frac{0-0}{y} = 0$, ceea ce arată că f este parţial derivabilă în $(0,0)$.

ii) Dacă $n = 2$, atunci

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \lim_{y\to y_0} \frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}.$$

iii) Dacă $n = 3$, atunci

$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x,y_0,z_0)-f(x_0,y_0,z_0)}{x-x_0}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) = \lim\limits_{y\to y_0} \frac{f(x_0,y,z_0)-f(x_0,y_0,z_0)}{y-y_0}$,

$\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) = \lim\limits_{z\to z_0} \frac{f(x_0,y_0,z)-f(x_0,y_0,z_0)}{z-z_0}$.

Exemplu. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Avem: $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{0-0}{x}=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim\limits_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{0-0}{y}=0$, iar $\forall (x,y)\neq(0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{x^3y}{\sqrt[3]{(x^2+y^2)^2}}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{xy^3}{\sqrt[3]{(x^2+y^2)^2}}$.

Derivate parţiale de ordin superior.

Definiţie. Fie $D\subset\mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă şi $f:D\to\mathbb{R}$ o funcţie derivabilă parţial pe D. Fie $\frac{\partial f}{\partial x_i}:D\to\mathbb{R}, i=\overline{1,n}$, cele n derivate parţiale ale lui f.

Dacă există derivata parţială în $a\in D$ (respectiv, în orice $a\in D$) în raport cu variabila x_j ($j=\overline{1,n}$) a funcţiei $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ($i=\overline{1,n}$), atunci aceasta se numeşte *derivata parţială de ordin* 2 *a funcţiei* f *în punctul* a (respectiv, *pe* D).

Se notează prin: $\frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial f}{\partial x_i})=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(=(f'_{x_i})'_{x_j}=f''_{x_ix_j})$, dacă $i\neq j$ şi $\frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial f}{\partial x_i})=\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(=(f'_{x_i})'_{x_i}=f''_{x_i^2})$, dacă $i=j$.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}$, cu $i\neq j$ se numesc *derivate parţiale mixte de ordin* 2.

Observaţie. 1) Pentru $n=2$, avem derivatele parţiale de ordin 2 :
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\frac{\partial^2 f}{\partial y^2},\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$.
Pentru $n=3$, avem derivatele parţiale de ordin 2 :
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\frac{\partial^2 f}{\partial y^2},\frac{\partial^2 f}{\partial z^2},\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x},\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z},\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x},\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y},\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}$.

2) Nu este obligatoriu ca derivatele parţiale mixte ale unei funcţii într-un punct să fie egale:

Fie $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2},(x,y)\neq(0,0)\\ 0,(x,y)=(0,0).\end{cases}$

Atunci $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\frac{\partial}{\partial x}(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}}_{\overset{\text{not.}}{=}g})(0,0)=\frac{\partial g}{\partial x}(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x,0)-g(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x}$.

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim\limits_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)=\lim\limits_{y\to 0}\frac{f(x,y)-f(x,0)}{y}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}}{y}=x$,

deci $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-0}{x}=1$.

Analog,

$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=\frac{\partial}{\partial y}(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}}_{\overset{\text{not.}}{=}h})(0,0)=\frac{\partial h}{\partial y}(0,0)=\lim\limits_{y\to 0}\frac{h(0,y)-h(0,0)}{y}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y}$.

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x,y)-f(0,y)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}}{x}=-y$,

deci $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\lim\limits_{y\to 0}\frac{-y}{y}=-1$, aşadar $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

Exemplu. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \cos(2x+3y)$. Atunci $\frac{\partial f}{\partial x} = -2\sin(2x+3y)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -3\sin(2x+3y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}) = -6\sin(2x+3y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}) = -6\sin(2x+3y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -4\sin(2x+3y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -9\sin(2x+3y)$.

Pentru definirea derivatelor parţiale de ordin superior se procedează recurent în aceeaşi manieră: de exemplu, $\frac{\partial^3 f}{\partial x_j \partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k})$ etc.

Derivata după o direcţie (vector)

Fie $D \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă, $f : D \to \mathbb{R}, a \in D$. Există $S(a,r) \subset D$.

Dreapta care trece prin punctul a şi are direcţia $u \in \mathbb{R}^n$, este dreapta care trece prin punctele a şi $a+u$, adică mulţimea $\{a+tu; t \in \mathbb{R}\}$.

Definiţie. i) Spunem că *funcţia f are derivată în punctul a după direcţia (vectorul) u* (numită şi *derivată Gâteaux*) dacă există limita $\lim\limits_{t\to 0} \frac{f(a+tu)-f(a)}{t} \in \overline{\mathbb{R}}$, notată prin $f'(a;u)$ sau $\frac{\partial f}{\partial u}(a)$ sau $\frac{df}{du}(a)$.

ii) Dacă $\frac{df}{du}(a) \in \mathbb{R}$, spunem că f *este derivabilă în punctul a după direcţia (vectorul) u*.

Observaţie. 1) Dacă $n = 1$, se obţine definiţia existenţei derivatei (respectiv, a derivabilităţii) pentru funcţii reale de o variabilă reală.

2) Presupunem $u \neq 0$.

i) $\frac{df}{du}(a) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{f(a+tu)-f(a)}{t} = \lim\limits_{x\to a, x-a=tu} \frac{f(x)-f(a)}{t}$, deci practic limita acestui raport de creşteri se realizează doar pe un drum particular, şi anume, pe dreapta care trece prin a şi are direcţia u.

ii) Fie funcţia $\varphi : (-\frac{r}{||u||}, \frac{r}{||u||}) \to \mathbb{R}, \varphi(t) = f(a+tu), \forall t \in (-\frac{r}{||u||}, \frac{r}{||u||})$.

Funcţia φ este bine definită deoarece $\forall t \in (-\frac{r}{||u||}, \frac{r}{||u||}), a+tu \in S(a,r) \subset D$.

Avem: $\frac{df}{du}(a) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{f(a+tu)-f(a)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t} = \varphi'(0)$, deci f este derivabilă în punctul a după direcţia u dacă şi numai dacă φ este derivabilă în 0 (în sens obişnuit, ca funcţie reală, de o variabilă reală).

Probleme propuse.

1. Calculaţi derivatele parţiale pentru următoarele funcţii (atât funcţiile, cât şi derivatele acestora se vor considera pe domeniile maxime de existenţă):

i) $f(x,y) = (x^2+y^2) arctg \frac{x}{y}$;

ii) $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

iii) $f(x, y) = x \ln(xy)$;
iv) $f(x, y, z) = e^{x^2+y^2} \sin^2 z$;
v) $f(x, y, z) = e^{\frac{y}{z}} \ln \frac{z}{x}$;
vi) $f(x, y, z) = x^y + y^z + z^x$;
vii) $f(x, y, z) = \frac{1}{xy} + \frac{1}{x^2 z} + \frac{1}{y^3 z^2}$;
viii) $f(x, y, z) = \frac{\sqrt{x+y}}{z} \arcsin \frac{x^2-y^2}{z^2}$.

2. Arătaţi că funcţiile următoare verifică ecuaţiile indicate:
i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = e^x \cos y : \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ (*ecuaţia lui Laplace*);
ii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = e^x \sin y : \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$;
iii) $f : \mathbb{R}^3 \backslash \{(0, 0, 0)\} \to \mathbb{R}, f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \forall (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$: $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$.

3. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2+y^2}, (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

Arătaţi că $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$.

4. Studiaţi dacă derivatele parţiale mixte de ordin 2 în $(0, 0)$ coincid pentru funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}, (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

5. Fie funcţia $f : \mathbb{R}^3 \backslash \{(0, 0, 0)\} \to \mathbb{R}, f(x, y, z) = e^{\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}}$. Verificaţi dacă $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = 0$.

6. Arătaţi că $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2$, dacă $z = \ln(x^2 + xy + y^2)$.

7. Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x, y, z) = x^2 yz, a = (1, 1, 0), u = (1, 0, -3)$. Calculaţi $\frac{df}{du}(a)$.

8. Cercetaţi derivabilitatea după un vector $u \in \mathbb{R}^n$ într-un punct $a \in \mathbb{R}^n$ pentru funcţiile următoare:
i) $|| \cdot || : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$;
ii) $|| \cdot ||^2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$.

9. Fie funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

Cercetaţi dacă f are derivată în $(0, 0)$ după orice versor $v = (\cos\theta, \sin\theta), \theta \in [0, 2\pi)$.

10. Calculaţi $\frac{dT}{du}(a)$, unde $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ este un operator liniar, iar $a \in \mathbb{R}^k, u \in \mathbb{R}^k, u \neq 0$ sunt oarecare.

11. Arătaţi că funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^6+y^2}, (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, (x, y) = (0, 0), \end{cases}$

nu este continuă în $(0, 0)$, dar admite derivată în $(0, 0)$ după orice vector $u \in \mathbb{R}^2, u \neq 0$.

12. Fie funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^5}{(y-x^2)^2+x^8}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

a) Cercetaţi continuitatea lui f în $(0,0)$;

b) Studiaţi derivabilitatea în $(0,0)$ a lui f după un versor $v = (\cos\theta, \sin\theta), \theta \in [0, 2\pi)$.

13. Fie $f(x,y,z) = e^{xy} \sin z$. Arătaţi că $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial z \partial x}$.

14. Calculaţi derivatele parţiale de ordin II pentru $f(x,y) = x^2 \ln(1 - xy)$.

15. Fie $f(x,y,z) = \ln(x^3+y^3+z^3-3xyz)$. Arătaţi că $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{3}{x+y+z}$.