Observaţie. Fie $u \in \mathbb{R}^n, u \neq 0_n, v = \frac{u}{||u||}$. Atunci $\frac{df}{du}(a) = \lim\limits_{t\to 0}\frac{f(a+tu)-f(a)}{t} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{f(a+tv||u||)-f(a)}{t||u||}||u|| = ||u|| \cdot \frac{df}{dv}(a)$, deci consideraţiile referitoare la derivabilitatea după un vector se pot practic reduce la situaţia în care vectorul este un versor.

Exemplu. Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x, y, z) = \sin\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ şi $u = (2, 1, -2)$. Atunci $\frac{df}{du}(0, 4, 3) = \lim\limits_{t\to 0}\frac{f(a+tu)-f(a)}{t} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{f(2t,4+t,3-2t)-f(0,4,3)}{t} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin\sqrt{4t^2+(4+t)^2+(3-2t)^2}-\sin 5}{t} = \frac{2}{5}\cos 5$.

Propoziţie. Dacă $e_i = (0, 0, ...1, 0, ..., 0), i = \overline{1, n}$ sunt versorii bazei canonice, atunci

$$\frac{df}{de_i}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

Într-adevăr, $\frac{df}{de_i}(a) = \lim\limits_{t\to 0}\frac{f(a+te_i)-f(a)}{t} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{f(a_1,a_2,...,a_{i-1},a_i+t,a_{i+1},...,a_n)-f(a_1,a_2,...,a_{i-1},a_i,a_{i+1},...,a_n)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

Observaţie. Funcţiile derivabile într-un punct după orice versor nu sunt neapărat continue în punctul respectiv (vezi probleme propuse).

Prezentăm în cele ce urmează următoarea formă în $\mathbb{R}^n$ a teoremei lui Lagrange:

Teoremă (de medie). *Fie $D \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă şi convexă şi fie $f : D \to \mathbb{R}$, o funcţie derivabilă pe orice direcţie în orice punct din D. Atunci, $\forall a, b \in D, \exists c \in (a, b)$ (segmentul deschis din $\mathbb{R}^n$ de capete a, b) astfel încât $f(b) - f(a) = \frac{df}{d(b-a)}(c)$.*

Demonstraţie. Definim, ca şi în precedent, funcţia $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}, \varphi(t) = f(a + t(b - a)), \forall t \in [0, 1]$.

Evident, deoarece mulţimea D este convexă, atunci $\forall t \in [0, 1], a + t(b-a) \in [a, b] \subset D$, deci φ este bine definită.

Observăm că φ este derivabilă în orice punct din $[0, 1] : \forall t_0 \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to t_0}\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0} &= \lim_{t\to t_0}\frac{f(a+t(b-a))-f(a+t_0(b-a))}{t-t_0} = \\
&= \lim_{t\to t_0}\frac{f(a+t_0(b-a)+(t-t_0)(b-a))-f(a+t_0(b-a))}{t-t_0} = \\
&= \lim_{s\to 0}\frac{f(a+t_0(b-a)+s(b-a))-f(a+t_0(b-a))}{s} = \\
&= \frac{df}{d(b-a)}(a+t_0(b-a)).
\end{aligned}$$

Mai mult, $\varphi'(t) = \frac{df}{d(b-a)}(a + t(b - a)), \forall t \in [0, 1]$.

Aplicând teorema lui Lagrange funcţiei φ, $\exists \theta \in (0,1)$ astfel încât $\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\theta)$.

Notând $c = a + \theta(b-a) \in (a,b)$, rezultă că $f(b) - f(a) = \frac{df}{d(b-a)}(c)$.

Consecinţă. Dacă $D \subset \mathbb{R}^n$ este o mulţime deschisă şi convexă şi $f : D \to \mathbb{R}$ este o funcţie derivabilă cu derivata nulă pe orice direcţie, în orice punct din D, atunci f este constantă pe D.

Demonstraţie. Din teorema de medie rezultă că $f(b) = f(a), \forall a, b \in D$, de unde concluzia.

FUNCŢII DIFERENŢIABILE.

Să amintim pentru început următoarea noţiune din cazul funcţiilor reale de o variabilă reală:

Fie $f : (a,b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $t_0 \in (a,b)$. Funcţia f este *derivabilă* în t_0 dacă există şi este finită limita $\lim\limits_{t \to t_0} \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$, care se notează cu $f'(t_0)$ şi se numeşte *derivata funcţiei f în punctul t_0*.

De asemenea, se cunoaşte faptul că f este derivabilă în t_0 dacă şi numai dacă f este *diferenţiabilă* în t_0, adică există o aplicaţie liniară $T = df(t_0) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (numită *diferenţiala lui f în t_0*), $\forall h \in \mathbb{R} \rightsquigarrow T(h) = f'(t_0)h \in \mathbb{R}$, astfel încât $\lim\limits_{t \to t_0} \frac{f(t)-f(t_0)-T(t-t_0)}{t-t_0} = 0$.

Fie $D \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă, $F : D \to \mathbb{R}^m, a \in D$ (deci $\exists\ S(a,r) \subset D$). Este natural să dăm următoarea definiţie:

Definiţie. i) Funcţia F se numeşte *diferenţiabilă în punctul a* dacă există un operator liniar $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ astfel încât

$$(D) \lim_{x \to a} \frac{F(x) - F(a) - T(x-a)}{||x-a||} = 0.$$

ii) Funcţia F se numeşte *diferenţiabilă pe D* dacă este diferenţiabilă în orice punct din D.

Observaţie. i) Notând $x - a = h$, (D) se poate scrie sub forma echivalentă

$$(D') \lim_{h \to 0} \frac{F(a+h) - F(a) - T(h)}{||h||} = 0.$$

ii) Notând $\alpha(x) = \begin{cases} \frac{F(x)-F(a)-T(x-a)}{||x-a||}, x \in D, x \neq a \\ 0, x = a \end{cases}$, atunci (D) se poate scrie sub forma echivalentă: $\forall x \in D$,

$$(D'')\ F(x) = F(a) + T(x-a) + \alpha(x) \cdot ||x-a||,$$

unde $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=\alpha(a)=0$, sau, echivalent,

$$(D''')\ F(a+h)=F(a)+T(h)+\alpha(a+h)\cdot||h||,$$

$\forall h\in\mathbb{R}^n$, cu $a+h\in D$ şi $\lim\limits_{h\to 0}\alpha(a+h)=\alpha(a)=0$.

Definiţie. Numim *diferenţiala funcţiei F în punctul a*, aplicaţia liniară $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m, T\overset{not}{=}dF(a), \forall h\in\mathbb{R}^n \rightsquigarrow dF(a)(h)\in\mathbb{R}^m$ (diferenţiala lui F în punctul a calculată în h).

Observaţie. Dacă $m=1, n=1$, se obţine definiţia diferenţiabilităţii (care echivalează cu definiţia derivabilităţii) pentru funcţii reale de o variabilă reală.

Teoremă. *Dacă există, diferenţiala unei funcţii într-un punct este unică.*

Demonstraţie. Presupunem, prin reducere la absurd, că există doi operatori liniari diferiţi $T,S:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ astfel încât $\lim\limits_{x\to a}\frac{F(x)-F(a)-T(x-a)}{||x-a||}=0$ şi $\lim\limits_{x\to a}\frac{F(x)-F(a)-S(x-a)}{||x-a||}=0$. Atunci $\lim\limits_{x\to a}\frac{(T-S)(x-a)}{||x-a||}=0$, adică, echivalent, $\lim\limits_{h\to 0}\frac{(T-S)(h)}{||h||}=0\ (*)$.

Pe de altă parte, deoarece $T\neq S$, există $h_0\in\mathbb{R}^n$ $(h_0\neq 0)$ aşa încât $T(h_0)\neq S(h_0)$.

Din $(*)$ rezultă în particular că $\lim\limits_{t\to 0,t>0}\frac{(T-S)(th_0)}{||th_0||}=0$, deci $\lim\limits_{t\to 0,t>0}\frac{(T-S)(h_0)}{||h_0||}=\frac{(T-S)(h_0)}{||h_0||}=0$, de unde $T(h_0)=S(h_0)$, contradicţie.

Condiţii necesare de diferenţiabilitate.

Teoremă (*legătura dintre diferenţiabilitate şi continuitate*). *Orice funcţie $F:D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ diferenţiabilă într-un punct $a\in D$ este continuă în a.*

(Prin urmare, dacă o funcţie nu este continuă într-un punct, nu este nici diferenţiabilă în acel punct).

Demonstraţie. Deoarece F este diferenţiabilă în a, există un operator liniar $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ şi o aplicaţie $\alpha:D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, cu $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=\alpha(a)=0$, astfel încât $\forall x\in D$, $F(x)=F(a)+T(x-a)+\alpha(x)\cdot||x-a||$, de unde, întrucât operatorul liniar T este continuu, avem $\lim\limits_{x\to a}F(x)=F(a)$, adică F este continuă în a.

Observaţie. Reciproca teoremei anterioare nu este adevărată: există funcţii continue într-un punct, care nu sunt diferenţiabile în punctul respectiv, după cum se va vedea într-un exemplu următor.

Teoremă (*legătura dintre diferenţiabilitate şi derivabilitatea după o direcţie*). *Dacă* $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *este diferenţiabilă în* $a \in D$, *atunci* f *este derivabilă în* a *după orice direcţie* $u \neq 0$ *şi* $df(a)(u) = \frac{df}{du}(a)$.

Demonstraţie. Deoarece $a \in D$ şi D este mulţime deschisă, $\exists S(a, r) \subset D$.
$\forall u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \exists \delta = \frac{r}{||u||}$ astfel încât $\forall t \in \mathbb{R}$, cu $|t| < \delta, a + tu \in S(a, r) \subset D$.
Prin urmare, deoarece f este diferenţiabilă în $a \in D$,

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0} \frac{f(a + tu) - f(a)}{t} &= \lim_{t\to 0} \frac{T(tu) + \alpha(a + tu) \cdot ||tu||}{t} = \lim_{t\to 0}(T(u) + \frac{|t|}{t} \cdot \alpha(a + tu) \cdot ||u||) = \\ &= T(u) = df(a)(u)\end{aligned}$$

există şi este finită, deci f este derivabilă în a după u şi $df(a)(u) = \frac{df}{du}(a)$.

Observaţie. Reciproca acestui rezultat nu este adevărată (aşa cum am văzut deja, există funcţii derivabile după orice vector nenul, dar care nu sunt continue, deci nici diferenţiabile într-un punct).

Consecinţă (*legătura dintre diferenţiabilitate şi derivabilitatea parţială*). Dacă $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ este diferenţiabilă în $a \in D$, atunci f este derivabilă parţial în raport cu orice variabilă în a şi

$$df(a)(h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i, \forall h = (h_1, ..., h_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Demonstraţie. Conform teoremei precedente, f este derivabilă în a după orice direcţie $u \neq 0$, deci şi după versorii bazei canonice. Există aşadar $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \in \mathbb{R}, \forall i = \overline{1, n}$ şi $df(a)(e_i) = \frac{df}{de_i}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.
Atunci $\forall h = (h_1, ..., h_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$df(a)(h) = df(a)(\sum_{i=1}^{n} h_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} df(a)(e_i)h_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i.$$

Observaţie. Prin urmare,

$$T(x - a) = df(a)(x - a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i).$$

Observaţie. Reciproca teoremei anterioare nu este adevărată:

Exemplu. Fie funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

Vom arăta că deşi funcţia f este continuă şi admite derivate parţiale în $(0, 0)$, nu este diferenţiabilă în $(0, 0)$. Într-adevăr, dacă am presupune prin reducere la absurd că f este diferenţiabilă în $(0, 0)$, aceasta ar însemna că $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-[\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0)+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0)]}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$, adică $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = 0$, contradicţie, deoarece ultima limită nu există.

Condiţii suficiente de diferenţiabilitate.

După cum am remarcat, continuitatea unei funcţii, ca de altfel nici derivabilitatea sa parţială într-un punct nu garanteaza diferenţiabilitatea funcţiei în punctul respectiv. Totuşi, aşa cum vom demonstra în cele ce urmează, existenţa derivatelor parţiale pe o vecinătate a unui punct şi continuitatea acestora în punct antrenează diferenţiabilitatea funcţiei în punctul respectiv:

Teoremă (criteriu de diferenţiabilitate). *Fie $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in D$. Dacă f este parţial derivabilă în raport cu toate variabilele pe o vecinătate deschisă $V = V(a) \subset D$ şi dacă toate derivatele sale parţiale sunt continue în a, atunci f este diferenţiabilă în a.*

Demonstraţie. Pentru uşurinţa scrierii, vom presupune că $n = 3$. Deci $a = (a_1, a_2, a_3)$. Fără a restrânge generalitatea, presupunem că $V(a) = S(a, r) \subset D$.

Considerăm $x = (x_1, x_2, x_3) \in S(a, r)$ oarecare. Avem:

$f(x_1, x_2, x_3) - f(a_1, a_2, a_3) =$

$= [f(x_1, x_2, x_3) - f(a_1, x_2, x_3)] + [f(a_1, x_2, x_3) - f(a_1, a_2, x_3)] + [f(a_1, a_2, x_3) - f(a_1, a_2, a_3)]$.

Observăm că $(a_1, x_2, x_3), (a_1, a_2, x_3) \in S(a, r) \subset D$, deci scrierea de mai sus este corectă.

Fie $\varphi(t) = f(t, x_2, x_3), \forall t \in [a_1, x_1]$ (sau $[x_1, a_1]$). Deoarece f este parţial derivabilă în raport cu toate variabilele pe $S(a, r)$, rezultă că funcţia de o variabilă φ este derivabilă, deci şi continuă pe $[a_1, x_1]$ (sau $[x_1, a_1]$). Aplicând Teorema lui Lagrange funcţiei φ, $\exists \xi_1 \in (a_1, x_1)$ (sau (x_1, a_1)) astfel încât $f(x_1, x_2, x_3) - f(a_1, x_2, x_3) = \varphi(x_1) - \varphi(a_1) = \varphi'(\xi_1)(x_1 - a_1) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, x_2, x_3)(x_1 - a_1)$.

Similar, $\exists \xi_2 \in (a_2, x_2)$ (sau (x_2, a_2)), $\exists \xi_3 \in (a_3, x_3)$ (sau (x_3, a_3)) astfel încât în final avem

$$\begin{aligned}
f(x_1,x_2,x_3)-f(a_1,a_2,a_3) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1,x_2,x_3)(x_1-a_1)+\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,\xi_2,x_3)(x_2-a_2)+\\
+\frac{\partial f}{\partial x_3}(a_1,a_2,\xi_3)(x_3-a_3) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1,a_2,a_3)(x_1-a_1)+\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,a_2,a_3)(x_2-a_2)+\\
&+\frac{\partial f}{\partial x_3}(a_1,a_2,a_3)(x_3-a_3)+\\
&+\{\underbrace{[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1,x_2,x_3)-\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1,a_2,a_3)]}_{\alpha_1(x)}(x_1-a_1)+\\
&+\underbrace{[\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,\xi_2,x_3)-\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,a_2,a_3)]}_{\alpha_2(x)}(x_2-a_2)+\\
&+\underbrace{[\frac{\partial f}{\partial x_3}(a_1,a_2,\xi_3)-\frac{\partial f}{\partial x_3}(a_1,a_2,a_3)]}_{\alpha_3(x)}(x_3-a_3)\}.
\end{aligned}$$

Dacă $x=(x_1,x_2,x_3)\to a=(a_1,a_2,a_3)$, atunci $x_1\to a_1, x_2\to a_2, x_3\to a_3$, de unde $\xi_1\to a_1,\xi_2\to a_2,\xi_3\to a_3$.

Folosind continuitatea derivatelor parţiale în (a_1,a_2,a_3), rezultă că $\lim\limits_{x\to a}\alpha_i(x)=0,\forall i=\overline{1,3}$, şi, ţinând seama că $\frac{x_i-a_i}{||x-a||}$ este mărginit, $\forall i=\overline{1,3}$, rezultă că $\lim\limits_{(x_1,x_2,x_3)\to(a_1,a_2,a_3)}\frac{f(x_1,x_2,x_3)-f(a_1,a_2,a_3)-[\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1,a_2,a_3)(x_1-a_1)+\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,a_2,a_3)(x_2-a_2)+\frac{\partial f}{\partial x_3}(a_1,a_2,a_3)(x_3-a_3)]}{||(x_1,x_2,x_3)-(a_1,a_2,a_3)||}=0.$

Prin urmare, f este diferenţiabilă în a.

Definiţie. Fie $f:D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. Spunem că f *este de clasă* $\mathcal{C}^1$ *pe* D (şi notăm aceasta prin $f\in\mathcal{C}^1(D)$) dacă f este parţial derivabilă în raport cu toate variabilele pe D şi toate derivatele sale parţiale sunt continue pe D.

Consecinţă. Dacă $f\in\mathcal{C}^1(D)$, atunci f este diferenţiabilă pe D.

Reciproca acestui rezultat nu este adevărată (vezi probleme propuse).

Teoremă *(de reducere la componente pentru funcţii vectoriale). O funcţie* $F=(f_1,f_2,...,f_m):D_{deschis}\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ *este diferenţiabilă în* $a\in D$ *dacă şi numai dacă toate funcţiile componente* $f_1,f_2,...,f_m:D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ *sunt diferenţiabile în* a*. Mai mult, diferenţierea se face pe componente:*

$$dF(a)(h)=(df_1(a)(h),df_2(a)(h),...,df_m(a)(h)),\forall h\in\mathbb{R}^n.$$

Demonstraţie. $F=(f_1,f_2,...,f_m)$ este diferenţiabilă în a dacă şi numai dacă există un operator liniar $T=(t_1,t_2,...,t_m):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ şi o aplicaţie

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m) : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, cu $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = \alpha(a) = 0$, astfel încât $\forall x \in D$, $F(x) = F(a) + T(x-a) + \alpha(x) \cdot ||x-a||$, adică, echivalent, $\forall x \in D$,

$$\begin{cases} f_1(x) = f_1(a) + t_1(x-a) + \alpha_1(x) \cdot ||x-a|| \\ f_2(x) = f_2(a) + t_2(x-a) + \alpha_2(x) \cdot ||x-a|| \\ \qquad ... \\ f_m(x) = f_m(a) + t_m(x-a) + \alpha_m(x) \cdot ||x-a||, \end{cases}$$

unde aplicaţiile $t_1, t_2, ..., t_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sunt liniare şi $\lim\limits_{x \to a} \alpha_i(x) = \alpha_i(a) = 0, \forall i = \overline{1, m}$.

Aceasta înseamnă că, echivalent, $\forall i = \overline{1, m}$, f_i este diferenţiabilă în a.

În plus, $T = dF(a) = (t_1, t_2, ..., t_m) = (df_1(a), df_2(a), ..., df_m(a))$.

Exemplu. Fie $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, F(x, y) = (x^2y, xy + y^2, x^3 - 2)$. Să calculăm $dF(1, 2)(h_1, h_2)$, unde $(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ este oarecare.

Fie $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f_1(x, y) = x^2y, f_2(x, y) = xy + y^2, f_3(x, y) = x^3 - 2$.

Evident, $f_1, f_2, f_3 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$, deci sunt diferenţiabile pe $\mathbb{R}^2$ şi în consecinţă F este diferenţiabilă pe $\mathbb{R}^2$.

$df_1(1, 2)(h_1, h_2) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(1, 2)h_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y}(1, 2)h_2 = 4h_1 + h_2$,

$df_2(1, 2)(h_1, h_2) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(1, 2)h_1 + \frac{\partial f_2}{\partial y}(1, 2)h_2 = 2h_1 + 5h_2$,

$df_3(1, 2)(h_1, h_2) = \frac{\partial f_3}{\partial x}(1, 2)h_1 + \frac{\partial f_3}{\partial y}(1, 2)h_2 = 3h_1$,

de unde $dF(1, 2)(h_1, h_2) = (4h_1 + h_2, 2h_1 + 5h_2, 3h_1)$.

Operaţii cu funcţii diferenţiabile.

Propoziţie. Fie $D \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă.

i) Dacă $F, G : D \to \mathbb{R}^m$ sunt diferenţiabile în $a \in D$, atunci:

a) $F + G$ este diferenţiabilă în a şi

$$d(F + G)(a) = dF(a) + dG(a);$$

b) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda F$ este diferenţiabilă în a şi $d(\lambda F)(a) = \lambda dF(a)$;

ii) Dacă $F : D \to \mathbb{R}, G : D \to \mathbb{R}^m$ sunt diferenţiabile în $a \in D$, atunci FG este diferenţiabilă în a şi

$$d(F \cdot G)(a) = F(a) \cdot dG(a) + G(a) \cdot dF(a).$$

Demonstraţie. i) a) Fie $T = dF(a)$ şi $S = dG(a)$.

Avem: $\lim\limits_{h \to 0} \frac{F(a+h) - F(a) - T(h)}{||h||} = 0$ şi $\lim\limits_{h \to 0} \frac{G(a+h) - G(a) - S(h)}{||h||} = 0$, de unde $\lim\limits_{h \to 0} \frac{(F+G)(a+h) - (F+G)(a) - (T+S)(h)}{||h||} = 0$, deci concluzia are loc, deoarece $T + S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este de asemenea operator liniar.

b) se raţionează asemănător.

ii) Din ipoteză, există $\alpha : D \to \mathbb{R}$, cu $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = \alpha(a) = 0$, astfel încât $\forall x \in D$, $F(x) = F(a) + dF(a)(x-a) + \alpha(x) \cdot ||x-a||$ şi există $\beta : D \to \mathbb{R}^m$, cu

$\lim\limits_{x\to a}\beta(x)=\beta(a)=0$, astfel încât $\forall x\in D$, $G(x)=G(a)+dG(a)(x-a)+\beta(x)\cdot ||x-a||$.

$T=dF(a)$ şi $S=dG(a)$ sunt operatori liniari, $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}, S:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$.

Atunci $\forall x\in D\backslash\{a\}$,

$$\begin{aligned}(F\cdot G)(x) &= F(x)\cdot G(x)=\\ &= (F(a)+T(x-a)+\alpha(x)\cdot||x-a||)\cdot\\ \cdot(G(a)+S(x-a)+\beta(x)\cdot||x-a||) &= \\ &= (F\cdot G)(a)+[F(a)\cdot S+G(a)\cdot T](x-a)+\\ &\quad +||x-a||\gamma(x),\text{ unde}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma(x) &= G(a)\cdot\alpha(x)+\alpha(x)\cdot S(x-a)+||x-a||\cdot\alpha(x)\cdot\beta(x)+\\ &\quad +F(a)\cdot\beta(x)+\beta(x)\cdot T(x-a)+\frac{T(x-a)\cdot S(x-a)}{||x-a||}.\end{aligned}$$

Deoarece $F(a)\cdot\overbrace{dG(a)}^{=S}+\overbrace{dF(a)}^{=T}\cdot G(a)$ este un operator liniar, rămâne să arătăm că $\lim\limits_{x\to a}\gamma(x)=0$. Într-adevăr, deoarece orice operator liniar este continuu, avem

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\gamma(x) &= G(a)\cdot\lim_{x\to a}\alpha(x)+F(a)\cdot\lim_{x\to a}\beta(x)+\\ &\quad +\lim_{x\to a}[\alpha(x)\cdot S(x-a)+\beta(x)\cdot T(x-a)+\\ &\quad +\alpha(x)\cdot\beta(x)\cdot||x-a||]+\\ +\lim_{x\to a}\frac{T(x-a)\cdot S(x-a)}{||x-a||} &= \\ &= \lim_{x\to a}T(x-a)\cdot\frac{S(x-a)}{||x-a||}=0,\end{aligned}$$

deoarece $\lim\limits_{x\to a}T(x-a)=T(0)=0$, iar $||\frac{S(x-a)}{||x-a||}||=\frac{||S(x-a)||}{||x-a||}\le L$ (S fiind operator liniar, deci funcţie lipschitziană).

Matrice jacobiană

Fie acum $F=(f_1,f_2,...,f_m):D_{deschis}\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ diferenţiabilă în punctul $a\in D$. Atunci $\forall i=\overline{1,m}$, $f_i:D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ este diferenţiabilă, deci derivabilă parţial în raport cu toate variabilele în $a\in D$.

Introducem matricea asociată diferenţialei $T=dF(a):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ (care este operator liniar) a funcţiei F în punctul $a\in D:$

$$J_F(a)=\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & ...\frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a)\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & ...\frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a)\\ & ... & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & ...\frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a)\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$$

numită *matricea jacobiană a funcţiei F în punctul a.*
(denumirea este dată în onoarea matematicianului german Carl Jacobi).
Evident, dacă $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, atunci $J_f(a) = f'(a)$.
În situaţia în care $m = n$, $J_F(a)$ este matrice pătratică, iar

$$\det J_F(a) = \frac{D(f_1,...f_n)}{D(x_1,...x_n)}(a) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) \ \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) \ ... \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) \ \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) \ ... \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ ... \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) \ \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(a) \ ... \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(a) \end{vmatrix}$$

se numeşte *determinantul jacobian (jacobianul) (determinantul funcţional) al lui F în a.*

Exemple.
1) Coordonate polare.

Fie funcţia vectorială $F : \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2, F(\rho, \theta) = (\rho \cos\theta, \rho \sin\theta), \forall(\rho, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi)$.

Observăm că F exprimă legătura dintre coordonatele carteziene şi coordonatele polare în plan: $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta, \end{cases} \rho > 0, \theta \in [0, 2\pi)$.

F este diferenţiabilă pe $D_{deschis} \subset \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi)$ deoarece $f_1, f_2 : \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}$ sunt diferenţiabile pe D (fiind de clasă $\mathcal{C}^1$), unde $f_1(\rho, \theta) = \rho\cos\theta, f_2(\rho, \theta) = \rho\sin\theta$.

$$J_F(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \rho} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \rho} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix},$$

$$\det J_F(\rho, \theta) = \frac{D(f_1, f_2)}{D(\rho, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = \rho.$$

2) Coordonate cilindrice

Fie funcţia vectorială $F : \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, F(\rho, \theta, z) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)$.

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases}, \rho > 0, \theta \in [0, 2\pi), z \in \mathbb{R}.$$

Observăm că F exprimă legătura dintre coordonatele carteziene şi coordonatele cilindrice în spaţiu.

F este diferenţiabilă pe $D_{deschis} \subset \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R}$ deoarece $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt diferenţiabile pe D (fiind de clasă $\mathcal{C}^1$), unde $f_1(\rho, \theta, z) = \rho\cos\theta, f_2(\rho, \theta, z) = \rho\sin\theta, f_3(\rho, \theta, z) = z$.

$$J_F(\rho, \theta, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \rho} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \rho} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial \rho} & \frac{\partial f_3}{\partial \theta} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$\det J_F(\rho,\theta,z) = \frac{D(f_1,f_2,f_3)}{D(\rho,\theta,z)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho(\cos^2\theta + \sin^2\theta) =$
$\rho.$

Probleme propuse.

1. Fie funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0). \end{cases}$

i) Arătaţi că funcţia f *este continuă şi admite derivate parţiale în* $(0,0)$, *dar nu este diferenţiabilă în* $(0,0)$.

ii) Arătaţi că funcţia f este diferenţiabilă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

2. Fie funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Arătaţi că f *este diferenţiabilă pe* $\mathbb{R}^2$, *dar nu este de clasă* $\mathcal{C}^1$ *pe* $\mathbb{R}^2$.

3. Studiaţi diferenţiabilitatea pe $\mathbb{R}^2$ a funcţiilor următoare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

i) $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$;

ii) $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$;

iii) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt[3]{x^4+y^4}}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0); \end{cases}$

iv) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^6+y^2}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0); \end{cases}$

v) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0). \end{cases}$

4. Pornind de la definiţie, arătaţi ca funcţia $f(x,y) = x^3 + xy + y^2$ este diferenţiabilă în $(1,1)$. Cum se poate stabili altfel, mai simplu, acest rezultat?

Este funcţia diferenţiabilă şi în rest?

5. Dacă $a \in \mathbb{R}^n$, iar $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este, pe rând:

a) o funcţie constantă;

b) un operator liniar,

arătaţi că F este diferenţiabilă şi calculaţi $dF(a)$.

6. Fie $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, F(x,y) = (x^2y, xy+y^2, x^3-2)$. Scrieţi $J_F(1,2)$.

7. Arătaţi că funcţia $f : S((0,0),r) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ îndeplinind condiţia $|f(x,y)| \leq x^2+y^2, \forall (x,y) \in S((0,0),r)$, este diferenţiabilă în $(0,0)$.

8. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y}{x^6+y^2}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Studiaţi:

i) diferenţiabilitatea lui f în $(0,0)$;

ii) continuitatea în $(0,0)$ pentru funcţia $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, g(x,y) = (\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y))$.

9. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2+1}$. Arătaţi că f este diferenţiabilă pe $\mathbb{R}^2$.

10. Cercetaţi dacă $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0) \end{cases}$ este diferenţiabilă în $(0,0)$.

11. Studiaţi dacă derivatele parţiale mixte de ordin 2 în $(0,0)$ coincid pentru funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Cercetaţi dacă funcţia este diferenţiabilă pe $\mathbb{R}^2$.

12. Scrieţi matricea jacobiană şi calculaţi determinantul (dacă este posibil) pentru următoarele funcţii vectoriale:
i) $F(x,y) = (x^2 + y^2, xy), (x,y) \in \mathbb{R}^2$;
ii) $F(x,y) = (x + \cos y, y \sin x), (x,y) \in \mathbb{R}^2$;
iii) $F(x,y) = (xe^y, e^{xy}, y^2), (x,y) \in \mathbb{R}^2$;
iv) $F(x,y,z) = (x^2 + z^2, y^2 + z^2), (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

13. Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x,y,z) = x \cos(y \sin z)$. Motivaţi diferenţiabilitatea funcţiei f şi, în caz afirmativ, calculaţi $df(0, \frac{\pi}{2}, \pi)$.