3) Coordonate sferice

Fie funcţia vectorială $F : \mathbb{R}_+ \times [-\pi, \pi] \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3, F(\rho, \varphi, \theta) = (\rho \sin\varphi \cos\theta, \rho \sin\varphi \sin\theta, \rho \cos\varphi)$.

Observăm că F exprimă legătura dintre coordonatele carteziene şi coordonatele polare în spaţiu: $\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}$ $, \rho > 0, \varphi \in [-\pi, \pi], \theta \in [0, 2\pi)$.

F este diferenţiabilă pe $D_{deschis} \subset \mathbb{R}_+ \times [-\pi, \pi] \times [0, 2\pi)$ deoarece $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R}_+ \times [-\pi, \pi] \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}$ sunt diferenţiabile pe D (fiind de clasă $\mathcal{C}^1$), unde $f_1(\rho, \varphi, \theta) = \rho \sin\varphi \cos\theta, f_2(\rho, \varphi, \theta) = \rho \sin\varphi \sin\theta, f_3(\rho, \varphi, \theta) = \rho \cos\varphi$.

$$J_F(\rho, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \rho} & \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \rho} & \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f_3}{\partial \rho} & \frac{\partial f_3}{\partial \varphi} & \frac{\partial f_3}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\varphi \cos\theta & \rho \cos\varphi \cos\theta & -\rho \sin\varphi \sin\theta \\ \sin\varphi \sin\theta & \rho \cos\varphi \sin\theta & \rho \sin\varphi \cos\theta \\ \cos\varphi & \rho \sin\varphi & 0 \end{pmatrix}$$

$\det J_F(\rho, \varphi, \theta) = \frac{D(f_1, f_2, f_3)}{D(\rho, \varphi, \theta)} = \begin{vmatrix} \sin\varphi \cos\theta & \rho \cos\varphi \cos\theta & -\rho \sin\varphi \sin\theta \\ \sin\varphi \sin\theta & \rho \cos\varphi \sin\theta & \rho \sin\varphi \cos\theta \\ \cos\varphi & \rho \sin\varphi & 0 \end{vmatrix} =$
$\rho^2 \sin\varphi$.

Teoremă *(a diferenţiabilităţii compuse) (legea lanţului) Fie* $F : D_{deschis} \subseteq \mathbb{R}^n \to \Delta_{deschis} \subseteq \mathbb{R}^m, G : \Delta \to \mathbb{R}^p$ şi $a \in D$. *Dacă F este diferenţiabilă în a şi G este diferenţiabilă în $b = F(a) \in \Delta$, atunci aplicaţia compusă $G \circ F : D \to \mathbb{R}^p$ este diferenţiabilă în a şi*

$$d(G \circ F)(a) = dG(F(a)) \circ dF(a).$$

Demonstraţie. Deoarece F este diferenţiabilă în a, $\exists$ un operator liniar $T = dF(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ şi o funcţie $\alpha : D \to \mathbb{R}^m$ aşa ca $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = \alpha(a) = 0$ şi $\forall x \in D, F(x) = F(a) + T(x - a) + \alpha(x) \cdot ||x - a||$.

Analog, deoarece G este diferenţiabilă în $b = F(a)$, $\exists$ un operator liniar $S = dG(b) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ şi o funcţie $\beta : \Delta \to \mathbb{R}^p$ aşa ca $\lim\limits_{y \to b} \beta(y) = \beta(b) = 0$ şi $\forall y \in \Delta, G(y) = G(b) + S(y - b) + \beta(y) \cdot ||y - b||$.

Pentru orice $x \in D$, fie $y = F(x)$. Prin urmare, $\forall x \in D$, $(G \circ F)(x) = (G \circ F)(a) + S(F(x) - F(a)) + \beta(F(x))||F(x) - F(a)||$, de unde

$$\begin{aligned} (G \circ F)(x) &= (G \circ F)(a) + (S \circ T)(x - a) + ||x - a||S(\alpha(x)) + \\ &+ \beta(F(x))||T(x - a) + \alpha(x) \cdot ||x - a||||. \end{aligned}$$

Fie $\gamma(x) = \begin{cases} S(\alpha(x)) + \beta(F(x)) \cdot \frac{||T(x-a) + \alpha(x) \cdot ||x-a||||}{||x-a||}, x \in D \backslash \{a\} \\ 0, x = a. \end{cases}$

Deoarece $S \circ T = dG(F(a)) \circ dF(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ este operator liniar, rămâne de arătat că $\lim\limits_{x \to a} \gamma(x) = 0$.

Într-adevăr, avem: $\lim\limits_{x \to a} S(\alpha(x)) = S(0) = 0$ (S este operator liniar, deci continuu). De asemenea,

$$\frac{||T(x - a) + \alpha(x) \cdot ||x - a||||}{||x - a||} \leq \frac{||T(x - a)||}{||x - a||} + ||\alpha(x)|| \leq L + 1$$

(orice operator liniar este funcţie lipschitziană iar $\lim_{x\to a}\alpha(x) = 0$). În plus, $\lim_{x\to a}\beta(F(x)) = 0$ (deoarece $\lim_{y\to b}\beta(y) = \beta(b) = \beta(F(a)) = 0$ şi F este diferenţiabilă, deci continuă în a).

Prin urmare, $G \circ F : D \to \mathbb{R}^p$ este diferenţiabilă în a şi, mai mult, $d(G \circ F)(a) = dG(F(a)) \circ dF(a) = S \circ T$.

Consecinţa 1. În condiţiile teoremei anterioare,

$$\underbrace{J_{G\circ F}(a)}_{\in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})} = \underbrace{J_G(F(a))}_{\in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{R})} \cdot \underbrace{J_F(a)}_{\in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})}.$$

Demonstraţie. Afirmaţia rezultă imediat folosind teorema anterioară, faptul că matricea jacobiană este de fapt matricea asociată diferenţialei în punct (care este operator liniar) şi faptul că dacă $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, S : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ sunt aplicaţii liniare, atunci $S \circ T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ este aplicaţie liniară şi $A_{S\circ T} = A_S \cdot A_T$.

Observaţie. Formula anterioară exprimă concentrat toate regulile posibile de derivare (parţială) compusă pe care le vom obţine prin particularizări convenabile. Derivatele parţiale compuse se utilizează în teoremele ecuaţiilor cu derivate parţiale, la transformarea ecuaţiilor diferenţiale prin schimbări de variabile etc.

Consecinţa 2. În condiţiile teoremei anterioare, dacă în particular $m = n = p$, $F = (f_1, f_2, ..., f_n), G = (g_1, g_2, ..., g_n), H = G \circ F = (h_1, h_2, ..., h_n)$, unde
$h_i(x_1, x_2, ..., x_n) = g_i(\underbrace{f_1(x_1, x_2, ..., x_n)}_{y_1}, \underbrace{f_2(x_1, x_2, ..., x_n)}_{y_2}, ..., \underbrace{f_n(x_1, x_2, ..., x_n)}_{y_n}), \forall i = \overline{1, n}$, atunci

$$\frac{D(h_1, h_2, ..., h_n)}{D(x_1, x_2, ..., x_n)}(a) = \frac{D(g_1, g_2, ..., g_n)}{D(y_1, y_2, ..., y_n)}(b) \cdot \frac{D(f_1, f_2, ..., f_n)}{D(x_1, x_2, ..., x_n)}(a).$$

Demonstraţie. Afirmaţia rezultă imediat trecând la determinanţi în consecinţa anterioară şi folosind faptul că determinantul produsului a două matrici este egal cu produsul determinanţilor matricilor.

Consecinţa 3. Fie $f : D_{deschis} \subseteq \mathbb{R} \to \Delta_{deschis} \subseteq \mathbb{R}^2, f(t) = (u(t), v(t)), \forall t \in D, g : \Delta \to \mathbb{R}$. Dacă f este diferenţiabilă pe D şi g este diferenţiabilă pe Δ, atunci $h = g \circ f : D \to \mathbb{R}, h(t) = g(f(t)) = g(u(t), v(t))$ este derivabilă pe D şi

$$h'(t) = \frac{\partial g}{\partial u}(u(t), v(t)) \cdot u'(t) + \frac{\partial g}{\partial v}(u(t), v(t)) \cdot v'(t), \forall t \in D.$$

Demonstraţie. Din Consecinţa 1, avem $J_h(t) = J_g(f(t))\cdot\ J_f(t)$, ceea ce antrenează $h'(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = \frac{\partial g}{\partial u} \cdot u'(t) + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot v'(t), \forall t \in D$.

Consecinţa 4. Fie $F : D_{deschis} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \Delta_{deschis} \subseteq \mathbb{R}^2, F(x, y) = (u(x, y), v(x, y)), \forall (x, y) \in D, G : \Delta \to \mathbb{R}$.

Dacă F este diferenţiabilă pe D şi G este diferenţiabilă pe Δ, atunci $H = G \circ F : D \to \mathbb{R}, H(x,y) = G(F(x,y)) = G(u(x,y), v(x,y))$ este diferenţiabilă pe D şi

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial G}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial G}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}, \end{cases} \forall (x,y) \in D.$$

Demonstraţie. Din Consecinţa 1, avem $J_H(x,y) = J_G(F(x,y)) \cdot J_F(x,y)$, ceea ce antrenează $\begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial x} & \frac{\partial H}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}, \forall (x,y) \in D$, de unde concluzia.

TEOREMA LUI SCHWARZ. TEOREMA LUI YOUNG.

Aşa cum am observat anterior, nu este neapărat obligatoriu ca derivatele parţiale mixte pereche de ordin 2 ale unei funcţii într-un punct să coincidă.

Totuşi, în cele ce urmează, vom indica două condiţii suficiente diferite care asigură egalitatea derivatelor parţiale mixte pereche de ordin 2 ale unei funcţii într-un punct.

Teorema lui Schwarz. *Fie* $f : D_{deschis} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in D$. *Dacă* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} (i, j = \overline{1,n}, i \neq j) \exists$ *şi sunt finite pe o întreagă vecinătate deschisă* $V = V(a) \subset D$ *şi dacă sunt continue în* a, *atunci* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$.

Observaţie. *Condiţiile din Teorema lui Schwarz sunt suficiente, dar nu neapărat necesare*:

Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} y^2 \ln(1 + \frac{x^2}{y^2}), y \neq 0 \\ 0, y = 0 \end{cases}$.

Derivatele parţiale mixte de ordinul 2 ale lui f nu sunt continue în $(0,0)$ şi totuşi $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

Definiţie. Fie $f : D_{deschis} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Spunem că:

i) f *este de clasă* $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 2)$ *pe* D (şi notăm aceasta prin $f \in \mathcal{C}^k(D)$) dacă f este parţial derivabilă de ordin k (în raport cu toate variabilele) pe D şi toate aceste derivate parţiale de ordin k sunt continue pe D;

ii) f *este de clasă* $\mathcal{C}^\infty$ *pe* D (şi notăm aceasta prin $f \in \mathcal{C}^\infty(D)$) dacă $f \in \mathcal{C}^k(D), \forall k \geq 0$.

Consecinţă. Din Teorema lui Schwarz rezultă că dacă $f \in \mathcal{C}^2(D), D_{deschis} \subseteq \mathbb{R}^n$, atunci $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$, $\forall a \in D, \forall i, j = \overline{1,n}, i \neq j$.

Teorema lui Young. *Fie* $f : D_{deschis} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in D$. *Dacă* f *este derivabilă parţial (în raport cu toate variabilele) pe o vecinătate deschisă*

$V = V(a) \subseteq D$ a punctului a şi dacă toate derivatele parţiale $\frac{\partial f}{\partial x_i}, i = \overline{1,n}$ sunt diferenţiabile în a, atunci $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a), \forall i,j = \overline{1,n}, i \neq j$.

Consecinţă. Dacă $f \in \mathcal{C}^2(D), D_{deschis} \subseteq \mathbb{R}^n$, atunci $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$, $\forall a \in D, \forall i,j = \overline{1,n}, i \neq j$.

Interpretarea geometrică a diferenţialei.

Amintim pentru $n = 1$, interpretarea geometrică a derivatei unei funcţii într-un punct:

dreapta de ecuaţie $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ este tangenta în $(x_0, f(x_0)$ la graficul funcţiei $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile în punctul $x_0 \in D$.

Vom prezenta în cele ce urmează interpretarea geometrică a diferenţialei unei funcţii de două variabile:

Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenţiabilă în $(x_0, y_0) \in D$. Atunci graficul său admite un plan tangent în punctul $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, de ecuaţie

$$z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

DIFERENŢIALE DE ORDIN SUPERIOR**.**

Fie $f : D_{deschis} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenţiabilă într-un punct $a \in D$ şi $\forall i = \overline{1,n}$, fie $pr_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\forall h = (h_1, ..., h_n) \in \mathbb{R}^n \rightsquigarrow pr_i(h) = h_i \in \mathbb{R}$ (aplicaţiile de proiecţie).

Întrucât $df(a)(h) = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i$, rezultă că $df(a) = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) pr_i$.

Dar aplicaţiile de proiecţie fiind în mod evident operatori liniari, avem $d(pr_i)(a) = pr_i, \forall i = \overline{1,n}$, deci $df(a) = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot \underbrace{d(pr_i)(a)}_{\overset{not.\ \text{(prin convenţie)}}{=} dx_i} = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) dx_i$,

sau, scris funcţional,

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

Particularizări:

1) $n = 2 : df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy; df(a_1, a_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2)dy$,
$df(a_1, a_2)(h_1, h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2)h_2$;
2) $n = 3 : df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$;
$df(a_1, a_2, a_3) = \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2, a_3)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2, a_3)dy + \frac{\partial f}{\partial z}(a_1, a_2, a_3)dz$,
$df(a_1, a_2, a_3)(h_1, h_2, h_3) = \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2, a_3)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2, a_3)h_2 + \frac{\partial f}{\partial z}(a_1, a_2, a_3)h_3$.

Definiţie. Spunem că f este *de 2 ori diferenţiabilă în* $a \in D$ dacă f este diferenţiabilă (deci derivabilă parţial în raport cu toate variabilele) pe o vecinătate deschisă $V = V(a) \subseteq D$ şi toate derivatele parţiale (de ordinul I) sunt diferenţiabile în a.

În acest caz, numim *diferenţiala de ordinul II a lui f în punctul* a, funcţia $d^2 f(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definită pentru orice $h = (h_1, ..., h_n) \in \mathbb{R}^n$ prin

$$d^2 f(a)(h) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)}_{(=a_{ij})} h_i h_j (= (\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i)^{(2)}),$$

unde expresia din paranteză se ridică formal la "puterea" a doua după o formulă clasică de tip "binomial", în care "puterea" semnifică ordinul de derivare.

Deoarece $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a), \forall i, j = \overline{1, n}$ (datorită Criteriului lui Young), rezultă că $d^2 f(a)$ este o formă pătratică, iar matricea asociată acestei forme pătratice este

$$H_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{i,j=\overline{1,n}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & ... & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & ... & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(a) \\ & & ... & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(a) & ... & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix},$$

numită *matricea hessiană asociată funcţiei f în punctul a*.

Observăm că este o matrice pătratică simetrică.

1) Dacă f este funcţie de două variabile, atunci

$$\begin{aligned} d^2 f(a)(h) &= (h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(a) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(a))^{(2)} = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) h_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) h_2^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) h_1 h_2, \end{aligned}$$

$$d^2 f(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) dy^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) dx dy,$$

2) Dacă f este funcţie de trei variabile, atunci

$$\begin{aligned} d^2 f(a)(h) &= (h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(a) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(a) + h_3 \frac{\partial f}{\partial z}(a))^{(2)} = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) h_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) h_2^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(a) h_3^2 + \\ &\quad + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) h_1 h_2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(a) h_2 h_3 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(a) h_1 h_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d^2f(a) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)dy^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(a)dz^2 + \\ &+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a)dxdy + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(a)dydz + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(a)dxdz. \end{aligned}$$

Definiţie. Fie $a \in D$ şi $f : D_{deschis} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

i) Spunem că f este *de q ori diferenţiabilă ($q \geq 2$) în a* dacă f este diferenţiabilă de $(q-1)$ ori pe o vecinătate deschisă $V = V(a) \subseteq D$ şi toate derivatele parţiale de ordin $(q-1)$ ale lui f sunt diferenţiabile în a.

În acest caz, numim *diferenţiala de ordin q a lui f în punctul a,* aplicaţia $d^qf(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definită pentru $\forall h = (h_1, h_2, ..., h_n) \in \mathbb{R}^n$, prin

$$d^qf(a)(h) = (\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i)^{(q)},$$

unde expresia din paranteză se ridică formal la "puterea" simbolică q după o formulă clasică de tip binomial, în care "puterea" exprimă ordinul de derivare.

ii) Spunem că f este *de q ori diferenţiabilă ($q \geq 2$) pe D* dacă f este de q ori diferenţiabilă în orice punct din D.

Observaţie. i) La fel ca pentru cazul $q = 2$, din Teorema lui Young rezultă că derivatele parţiale mixte pereche de ordin $\leq q$ sunt egale (în a).

ii) Dacă $n = 2, q = 3$, $(a = (a_1, a_2), h = (h_1, h_2))$ atunci

$$\begin{aligned} d^3f(a)(h) &= (h_1\frac{\partial f}{\partial x}(a) + h_2\frac{\partial f}{\partial y}(a))^{(3)} = \\ &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a)h_1^3 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(a)h_2^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(a)h_1^2h_2 + 3\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y^2}(a)h_1h_2^2, \end{aligned}$$

$$d^3f(a) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a)dx^3 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(a)dy^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(a)dx^2dy + 3\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y^2}(a)dxdy^2.$$

FORMULA LUI TAYLOR PENTRU FUNCŢII DE MAI MULTE VARIABILE REALE.

Să reamintim pentru început formula lui Taylor cu rest Lagrange de ordin q pentru funcţii reale de o singură variabilă reală.

Teoremă (Taylor). Presupunem că $I \subseteq \mathbb{R}$ este un interval deschis, $a \in I$ şi $f : I \to \mathbb{R}$ este de $(q+1)$ ori derivabilă pe I. Atunci $\forall x \in I, \exists c \in (a, x)$ (sau (x, a)) astfel încât

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+...+\frac{f^{(q)}(a)}{q!}(x-a)^q+\underbrace{\frac{f^{(q+1}(c)}{(q+1)!}(x-a)^{q+1}}_{\text{rest Lagrange de ordin q}}.$$

Teoremă (Taylor). Presupunem că $D\subseteq\mathbb{R}^n$ este o mulţime deschisă, $a\in D$ $(\exists S(a,r)\subseteq D))$ şi $f:D\to\mathbb{R}$ este de $(q+1)$ ori diferenţiabilă pe $S(a,r)$. Atunci $\forall x\in S(a,r),\exists\xi\in(a,x)$ (sau (x,a))(segmentul deschis din $\mathbb{R}^n$ de capete a,x) astfel încât

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a)+\frac{1}{1!}df(a)(x-a)+\frac{1}{2!}d^2f(a)(x-a)+...+\frac{1}{q!}d^qf(a)(x-a)+ \\ &+\underbrace{\frac{1}{(q+1)!}d^{(q+1)}f(\xi)(x-a)}_{\text{rest Lagrange de ordin q}}. \end{aligned}$$

Probleme propuse.

1. Arătaţi că funcţiile următoare verifică ecuaţiile indicate:
i) $f(x,y)=\varphi(\frac{y}{x}):xf'_x+yf'_y=0;$
ii) $f(x,y)=xy\varphi(x^2-y^2):xy^2f'_x+x^2yf'_y=(x^2+y^2)f;$
iii) $f(x,y)=xy+x\varphi(\frac{y}{x}):xf'_x+yf'_y=xy+f.$

2. Arătaţi că funcţia $f(x,y)=\varphi(x-ay)+\psi(x+ay)$, unde funcţiile φ,ψ admit derivate parţiale de ordin II, satisface ecuaţia $f''_{y^2}=a^2f''_{x^2}$.

3. Arătaţi că funcţia $u=\frac{1}{\sqrt{y}}f(4x+\frac{z^2}{y})$ verifică relaţia $\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}=0$.

4. Arătaţi că funcţia $f(x,y,z)=\varphi(xy,x^2+y^2-z^2)$ verifică relaţia $xz\frac{\partial f}{\partial x}-yz\frac{\partial f}{\partial y}+(x^2-y^2)\frac{\partial f}{\partial z}=0$.

5. Calculaţi $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$ pentru:
i) $f(u,v)=\ln(u^2+v),u=u(x,y)=e^{x+y^2},v=v(x,y)=x^2+y;$
ii) $f(u,v)=arctg\frac{u}{v},u=u(x,y)=x\sin y,v=v(x,y)=x\cos y.$

6. Arătaţi că dacă $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ este diferenţiabilă, atunci funcţia $w=f(x+y,x-y)$ are derivate parţiale ce verifică relaţia $\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}=(\frac{\partial f}{\partial u})^2-(\frac{\partial f}{\partial v})^2$, unde $u=u(x,y)=x+y,v=v(x,y)=x-y$.

7. Calculaţi $f'(x)$ dacă $f(x)=\varphi(u(x),v(x))$, pentru:
i) $\varphi(u,v)=u+uv,u=u(x)=\cos x,v=v(x)=\sin x;$
ii) $\varphi(u,v)=e^{u-2v},u=u(x)=x^2,v=v(x)=x^2-2.$

8. Cercetaţi dacă funcţia $f(x,y)=e^y\varphi(ye^{\frac{x^2}{2y^2}})$ verifică relaţia $(x^2-y^2)\frac{\partial f}{\partial x}+xy\frac{\partial f}{\partial y}=xyf$.

9. Cercetaţi dacă funcţiile următoare verifică ecuaţiile indicate:
i) $f(x,y)=x\varphi(x+y)+y\psi(x-y):\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$;
ii) $f(x,y)=\varphi(xy)+\sqrt{xy}\psi(\frac{y}{x}):x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$.

10. Fie $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\begin{cases} y^2\ln(1+\frac{x^2}{y^2}), y\neq 0\\ 0, y=0\end{cases}$.
Arătati că:
i) derivatele parţiale mixte de ordinul 2 ale lui f nu sunt continue în $(0,0)$;
ii) $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$.

11. Fie $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}, f(x,y,z)=x\cos(y\sin z)$. Motivaţi diferenţiabilitatea funcţiei f şi, în caz afirmativ, calculaţi $df(0,\frac{\pi}{2},\pi)$.

12. a) Fie $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, f(x,y)=e^x\cos y$ şi fie (x_0,y_0) arbitrar. Calculaţi $df(x_0,y_0), d^2f(x_0,y_0), df(x_0,y_0)(h_1,h_2), d^2f(x_0,y_0)(h_1,h_2)$, $d^3f(x_0,y_0), d^3f(x_0,y_0)(h_1,h_2)$, unde $(h_1,h_2)\in\mathbb{R}^2$ este oarecare.
b) Fie $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}, f(x,y,z)=e^x\sin y\cos z$ şi fie (x_0,y_0,z_0) arbitrar. Calculaţi $df(x_0,y_0,z_0), d^2f(x_0,y_0,z_0), df(x_0,y_0,z_0)(h_1,h_2,h_3), d^2f(x_0,y_0,z_0)(h_1,h_2,h_3)$, unde $(h_1,h_2,h_3)\in\mathbb{R}^3$ este oarecare.

13. Folosind formula lui Taylor cu rest Lagrange de ordin 2, calculaţi valoarea aproximativă pentru:
i) $(0,95)^{2,01}$; ii) $(1,02)^{3,01}$; iii) $\sqrt{1,03}\cdot\sqrt[3]{0,98}$.

14. Scrieţi formula lui Taylor cu rest Lagrange de ordin 2 pentru $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, f(x,y)=e^x\sin y$ în $(0,0)$.

15. Justificaţi aproximarea $arctg(\frac{x+y}{1+xy})\simeq x+y$, în vecinătatea lui $(0,0)$.