Puncte de extrem pentru funcţii reale de mai multe variabile reale.

Definiţie. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

i) Un punct $a \in A$ se numeşte *punct de extrem local pentru* f dacă diferenţa $f(x) - f(a)$ păstrează semn constant pe o vecinătate a lui a, adică, $\exists V \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $f(x) - f(a)$ păstrează acelaşi semn, $\forall x \in V \cap A$.

Mai precis,

dacă $f(x) - f(a) \geq 0, \forall x \in V \cap A$, atunci a se numeşte *punct de minim local pentru* f, iar

dacă $f(x) - f(a) \leq 0, \forall x \in V \cap A$, atunci a se numeşte *punct de maxim local pentru* f.

ii) Dacă $f(x) - f(a) \geq 0$, (respectiv, $f(x) - f(a) \leq 0$), $\forall x \in A$, atunci a se numeşte *punct de minim (*respectiv*, de maxim) absolut pentru* f.

Nu întotdeauna există pentru o funcţie puncte de minim (maxim) absolut.

iii) Valorile funcţiei în punctele de extrem se numesc *extremele funcţiei.*

Dacă există, $f(a) = \inf\limits_{x \in A} f(x)$ (respectiv, $f(b) = \sup\limits_{x \in A} f(x)$) se numeşte *valoare minimă* (respectiv, *maximă*) *a lui* f *pe* A.

De exemplu, dacă A este mulţime compactă şi f este continuă pe A, atunci Teorema lui Weierstrass ne asigură că există valoarea minimă şi valoarea maximă a lui f pe A.

Condiţii necesare de extrem.

Teoremă (a lui Fermat). *Fie* $f : D_{deschis} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *şi* $a \in D$. *Dacă* f *este parţial derivabilă în raport cu toate variabilele în punctul* a, *iar* a *este punct de extrem local pentru* f, *atunci* $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0, \forall i = \overline{1,n}$.

Demonstraţie. Afirmaţia este imediată aplicând Teorema lui Fermat funcţiei parţiale (reale de o variabilă reală) derivabile $x_i \rightsquigarrow f(a_1, a_2, ..., a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, ..., a_n), i = \overline{1,n}$.

Definiţie. Spunem că $a \in D$ este *punct critic* (sau *staţionar*) pentru $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (derivabilă parţial în raport cu toate variabilele în a) dacă $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0, \forall i = \overline{1,n}$.

Aşadar, Teorema lui Fermat afirmă că punctele de extrem local ale unei funcţii diferenţiabile, se găsesc printre punctele sale critice. Aşa cum vom observa în exemplul următor, incluziunea este strictă (reciproca nu are loc).

Exemplu. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = x^2 - y^2$.

Să determinăm pentru început punctele sale critice, rezolvând sistemul $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \end{cases}$

Deoarece $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$, iar $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$, obţinem unicul punct critic $M(0,0)$, care nu este însă nici punct de minim, nici punct de maxim local deoarece nu există nici o vecinătate a originii pe care diferenţa $f(x,y)-f(0,0)=x^2-y^2$ să păstreze semn constant.

Punctul $(0,0)$ se numeşte *punct şa (punct critic care nu este punct de extrem).*

Folosind formula lui Taylor se demonstrează următorul rezultat:

Teoremă. *Fie $f: D_{deschis} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^2(D)$. Dacă $a \in D$ este punct de minim local (respectiv, maxim local) pentru f (deci $df(a)=0$), atunci $d^2f(a) \geq 0$ (respectiv, $d^2f(a) \leq 0$).*

În continuare, vom pune în evidenţă **condiţii suficiente** pentru ca un punct critic să fie punct de extrem.

Lemă. Fie $(a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ o matrice simetrică de numere reale ($a_{ij}=a_{ji}, \forall i,j=\overline{1,n}$) şi $\varphi(x)=\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ ($x=(x_1,x_2,...,x_n)$), forma pătratică asociată. Dacă φ este pozitiv definită (adică $\varphi(x)>0, \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0_n$), atunci $\exists \lambda > 0$ astfel încât $\varphi(x) \geq \lambda ||x||^2, \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Demonstraţie. Fie $S=\{x \in \mathbb{R}^n, ||x||=1\}=\{(x_1,x_2,...,x_n); x_1^2+x_2^2+...+x_n^2=1\}$. S este mulţime închisă şi mărginită, deci compactă.

Întrucât funcţia $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ este funcţie polinomială în $x_1,x_2,...,x_n$, rezultă că este continuă pe mulţimea compactă S, deci conform Teoremei lui Weierstrass îşi atinge marginea inferioară. $\exists\ \xi \in S$ (deci $\xi \neq 0_n$) astfel ca $\lambda = \inf\limits_{x \in S} \varphi(x) = \varphi(\xi)$.

Deoarece φ este pozitiv definită, rezultă că $\lambda > 0$. Prin urmare, $\varphi(x) \geq \lambda > 0, \forall x \in S$.

Fie $x \in \mathbb{R}^n$ arbitrar. Dacă $x=0_n$, atunci evident $\varphi(x) \geq \lambda ||x||^2 = 0$.

Dacă $x \neq 0_n$, atunci $\frac{x}{||x||} \in S$, deci, din consideraţiile anterioare, $\varphi(\frac{x}{||x||}) \geq \lambda$. Dar $\varphi(\frac{x}{||x||}) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{x_i}{||x||}\frac{x_j}{||x||} = \frac{1}{||x||^2}\varphi(x)$, deci $\varphi(x) \geq \lambda ||x||^2$.

Teoremă *Fie $f: D_{deschis} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^2(D)$ şi $a \in D$ un punct critic pentru f.*

i) Dacă forma pătratică $d^2f(a)$ este pozitiv definită, atunci a este punct de minim local pentru f;

ii) Dacă forma pătratică $d^2f(a)$ este negativ definită, atunci a este punct de maxim local pentru f.

Demonstraţie. Deoarece $f \in \mathcal{C}^2(D)$, rezultă că f este de 2 ori diferenţiabilă pe D şi $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a), \forall i,j=\overline{1,n}$.

i) Presupunem că forma pătratică $d^2f(a)$ este pozitiv definită.

Aplicând lema anterioară pentru $\varphi = d^2f(a)$ şi $y=x-a$, $\exists\ \lambda > 0$ astfel încât $d^2f(a)(x-a) \geq \lambda ||x-a||^2, \forall x \in D$.

Conform formulei lui Taylor cu rest Lagrange $q = 1$ pentru f în jurul lui a, pentru $\forall x \in S(a,r)(\subset D), \exists \xi \in (a,x)$ (sau (x,a)) astfel ca

$$f(x) = f(a) + \underbrace{\frac{1}{1!}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i)}_{=df(a)(x-a)} + \underbrace{\frac{1}{2!}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\xi)(x_i - a_i)(x_j - a_j)}_{=d^2 f(\xi)(x-a)}.$$

Deoarece a este punct critic pentru $f, df(a)(x-a) = 0$, deci $\forall x \in S(a,r)(\subset D)$,

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= \frac{1}{2!}d^2 f(a)(x-a) + \frac{1}{2!}[d^2 f(\xi)(x-a) - d^2 f(a)(x-a)] = \\ &= \frac{1}{2!}d^2 f(a)(x-a) + \alpha(x) \cdot ||x-a||^2 \geq \\ &\geq \frac{\lambda}{2}||x-a||^2 + \alpha(x) \cdot ||x-a||^2 = (\alpha(x) + \frac{\lambda}{2}) \cdot ||x-a||^2. \end{aligned}$$

unde $\alpha(x) = \frac{1}{2!}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\xi) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)]\frac{(x_i - a_i)(x_j - a_j)}{||x-a||^2}, x \neq a$.

Deoarece derivatele parţiale de ordinul II sunt continue în a, $\xi \to a$ dacă $x \to a$, iar $||\frac{(x_i-a_i)(x_j-a_j)}{||x-a||^2}|| \leq 1, \forall i,j = \overline{1,n}$, rezultă că $\lim\limits_{x \to a}\alpha(x) = 0$.

Dar $\lambda > 0$, deci $\exists r' \in (0,r)$ astfel ca $\alpha(x) + \frac{\lambda}{2} > 0, \forall x \in S(a,r')$, de unde $f(x) - f(a) \geq 0, \forall x \in S(a,r')(\subset S(a,r) \subset D)$, ceea ce înseamnă că a este punct de minim local pentru f.

ii) Se procedează analog sau se foloseşte i) pentru $-f$.

Condiţii suficiente de extrem pentru funcţii de 2 variabile.

Teoremă. *Fie $f : D_{deschis\breve{a}} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f \in \mathcal{C}^2(D), a \in D$ punct critic pentru f.*

Fie $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a), B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a), C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$.

1) Dacă $B^2 - AC > 0, a$ nu este punct de extrem local pentru f.

2) Dacă $B^2 - AC = 0$, caz de dubiu (nu ne putem pronunţa).

3) Dacă $B^2 - AC < 0$, atunci a este punct de extrem local pentru f. Mai precis,

a) dacă $A > 0$ (sau $C > 0$), a este punct de minim local pentru f;

b) dacă $A < 0$ (sau $C < 0$), a este punct de maxim local pentru f.

Demonstraţie. Fie $a = (a_1, a_2)$ şi $(x,y) \in D$ oarecare. Atunci

$d^2 f(a)(x-a) = (x-a_1)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a_1,a_2) + (y-a_2)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a_1,a_2) + 2(x-a_1)(y-a_2)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a_1,a_2)$.

Presupunem, fără a restrânge generalitatea că, de exemplu, $y \neq a_2$. Atunci

$d^2 f(a)(x-a) = (y-a_2)^2[A(\frac{x-a_1}{y-a_2})^2 + 2B\frac{x-a_1}{y-a_2} + C]$.

Notând $\frac{x-a_1}{y-a_2} = t$, atunci $d^2 f(a)$ are semn constant dacă şi numai dacă $B^2 - AC < 0$, semnul trinomului $At^2 + 2Bt + C$ fiind dat de semnul lui A.

Prin urmare, dacă $A > 0$ (respectiv, $A < 0$), atunci $d^2 f(a)$ este pozitiv (respectiv, negativ) definită, deci conform teoremei anterioare, a este punct de minim (respectiv, maxim) local pentru f.

Dacă $B^2 - AC > 0$, atunci $d^2 f(a)$ nu are semn constant, deci nici diferenţa $f(x) - f(a)$ nu are semn constant pe nici o vecinătate a lui a, ceea ce înseamnă că a nu este punct de extrem.

Dacă $B^2 - AC = 0$, atunci semnul diferenţei $f(x) - f(a)$ depinde de semnul diferenţialelor lui f de ordin superior.

Exemple. 1) Să determinăm punctele de extrem ale funcţiei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Determinăm mai întâi punctele critice ale funcţiei, rezolvând sistemul:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x, \end{cases}$$

obţinând punctele critice $M_1(0,0)$ şi $M_2(1,1)$.

Deoarece $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3$, rezultă că pentru $M_1(0,0)$, avem $B^2 - AC = 9 > 0$, deci nu este punct de extrem, iar pentru $M_1(1,1)$, avem $B^2 - AC < 0$, $A > 0$, deci este punct de minim local pentru f.

2) Să determinăm punctele de extrem ale funcţiei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = (x-y)^2 + (y-1)^3$. Se obţine punctul critic $M(1,1)$, pentru care $B^2 - AC = 0$, deci criteriul nu stabileşte natura sa.

Dacă $M(1,1)$ ar fi punct de extrem local pentru f, ar exista $S((1,1), r_0)$ astfel ca $f(x,y) - f(1,1) \geq 0$ (sau ≤ 0), $\forall (x,y) \in S((1,1), r_0)$.

În particular, $f(x,x) - f(1,1) = (x-1)^3 \geq 0$ (sau ≤ 0), $\forall (x,x) \in S((1,1), r_0)$, fals. Deci $M(1,1)$ nu este punct de extrem local pentru f.

Condiţii suficiente de extrem pentru funcţii de n variabile, $n \geq 3$.

Teorema lui Sylvester (din teoria formelor pătratice) *Fie* $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \varphi(x) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \forall x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, *o formă pătratică oarecare* ($a_{ij} = a_{ji}, \forall i,j = \overline{1,n}$). *Fie* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \; ... \; a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \; ... \; a_{2n} \\ & ... \\ a_{n1} & a_{n2} \; ... \; a_{nn} \end{pmatrix}$ *matricea sa asociată, şi minorii principali* $\Delta_1 = a_{11}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, ..., \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \; ... \; a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \; ... \; a_{2n} \\ & ... \\ a_{n1} & a_{n2} \; ... \; a_{nn} \end{vmatrix} = \det A.$

Atunci:

i) φ este pozitiv definită ($\varphi(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0_n$) dacă şi numai dacă $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, ..., \Delta_n > 0$;

ii) φ este negativ definită ($\varphi(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0_n$) dacă şi numai dacă $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, ..., (-1)^n \Delta_n > 0$.

Fie $f : D_{deschis\breve{a}} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, f \in \mathcal{C}^2(D), a \in D$ punct critic pentru f.

Se aplică Teorema lui Sylvester pentru forma pătratică $\varphi = d^2 f(a)$, considerând matricea sa asociată, *matricea hessiană a lui f în punctul a*, care este o matrice pătratică, simetrică:

$$H_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)_{i,j=\overline{1,n}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & ... & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & ... & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(a) \\ & ... & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(a) & ... & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix},$$

având minorii principali

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a), \Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) \end{vmatrix}, ..., \Delta_n = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & ... & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & ... & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(a) \\ & ... & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(a) & ... & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{vmatrix}.$$

Obţinem astfel următorul rezultat:

Teoremă *1) Dacă toţi minorii principali ai matricei hessiene sunt strict pozitivi, atunci a este punct de minim local pentru f.*

2) *Dacă minorii principali ai matricei hessiene alternează ca semn, începând cu primul negativ, atunci a este punct de maxim local pentru f.*

3) *Dacă toţi minorii principali ai matricei hessiene sunt nenuli, dar semnele lor nu sunt ca în cazurile 1) sau 2), atunci a nu este punct de extrem local pentru f.*

4) *Dacă cel puţin unul din $\Delta_1, ..., \Delta_n$ este nul, nu se poate preciza natura punctului a. În acest caz, pentru a evalua semnul diferenţei $f(x) - f(a)$, se foloseşte definiţia sau formula lui Taylor cu rest Lagrange de ordin superior lui 2.*

Exemple. Să determinăm punctele de extrem local ale funcţiei

1) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 2z^2 - 2xy + 2xz$.

Rezolvând sistemul $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \end{cases}$, obţinem punctul critic $M(0,0,0)$.

Apoi, $H_f(0,0,0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(0,0,0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(0,0,0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(0,0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(0,0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(0,0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

$\Delta_1 = 2 > 0, \Delta_2 = 8 > 0, \Delta_3 = 8 > 0$, deci $M(0,0,0)$ este punct de minim local pentru f.

2) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x,y,z) = (x-y)^2 + (y-1)^3 + (z-1)^2$.

Rezolvând sistemul $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \end{cases}$, obţinem punctul critic $M(1,1,1)$.

$$H_f(1,1,1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1,1) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1,1) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(1,1,1) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1,1,1) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1,1) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(1,1,1) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(1,1,1) & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(1,1,1) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(1,1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

de unde $\Delta_2 = 0$, deci criteriul nu stabileşte natura punctului critic. Vom folosi atunci definiţia.

$M(1,1,1)$ este punct de extrem local pentru f dacă şi numai dacă există o sferă $S((1,1,1),r)$ aşa ca $f(x,y,z) - f(1,1,1) = (x-y)^2 + (y-1)^3 + (z-1)^2 \geq 0$ (sau ≤ 0), $\forall (x,y,z) \in S((1,1,1),r)$.

În particular, $f(x,x,1) = (x-1)^3 \geq 0$ (sau ≤ 0), $\forall (x,x,1) \in S((1,1,1),r)$, adică, echivalent, $x \geq 1$ (sau $x \leq 1$), $\forall x \in (\frac{-r}{\sqrt{2}} + 1, \frac{r}{\sqrt{2}} + 1)$, fals. Deci $M(1,1,1)$ nu este punct de extrem local pentru f.

Teorema funcţiilor implicite (TFI).

Fie ecuaţia *implicită* $F(x,y) = 0$ (termenul "implicit" a fost introdus de Leonard Euler).

Dorim să rezolvăm această ecuaţie, măcar *local*, obţinând *explicit* una dintre variabile funcţie de cealaltă. De exemplu, să obţinem local $y = \varphi(x)$ (la fel se poate pune problema pentru a obţine $x = \psi(y)$.

TFI 1.2. (o ecuaţie cu două necunoscute)

Fie ecuaţia $F(x,y) = 0$, *unde* $F : \Omega_{deschis\breve{a}} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *şi fie* $(x_0, y_0) \in \Omega$ *o soluţie a ecuaţiei.*

I. Presupunem că:

i) $F \in \mathcal{C}^1(\mathring{D})$ *unde* $D = D(x_0,y_0) \subset \Omega$ *este un dreptunghi închis cu centrul în* (x_0,y_0), *caracterizat prin inegalităţile* $D : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b$;

ii) $F'_y(x_0,y_0) \neq 0$.

Atunci $\exists V_{\text{deschisă}} = V(x_0) \subset [x_0 - a, x_0 + a]$ *şi* $\exists U_{\text{deschisă}} = U(y_0) \subset [y_0 - b, y_0 + b]$ *astfel încât* $\forall x \in V(x_0)$, *ecuaţia are soluţie unică* $y = \varphi(x) \in U(y_0)$.

Mai mult, funcţia soluţie $\varphi \in \mathcal{C}^1(V(x_0))$ *şi derivata sa este dată de formula*

$$\varphi'(x) = -\frac{F'_x(x,\varphi(x))}{F'_y(x,\varphi(x))}, \forall x \in V(x_0).$$

Verificarea formulei: $\forall x \in V(x_0), F(x,\varphi(x)) = 0$. Derivând parţial în raport cu x, obţinem $F'_x(x,\varphi(x)) + F'_y(x,\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = 0$, $\forall x \in V(x_0)$, de unde rezultă formula.

II. Dacă i) $F \in \mathcal{C}^k(D), k \geq 1$ şi ii), atunci $\varphi \in \mathcal{C}^k(V(x_0)))$.

Exemplu. Să calculăm $f'(1)$ pentru funcţia $y = f(x)$ definită implicit de ecuaţia $(x^2 + y^2)^3 - 3(x^2 + y^2) - 2 = 0$, satisfăcând condiţia $f(1) = 1$.

Fie $F(x, y) = (x^2+y^2)^3-3(x^2+y^2)-2$. Deoarece $F(1, 1) = 0$ şi $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$, conform TFI avem explicit $y = f(x)$ şi

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))} = -\frac{6x(x^2 + f^2(x))^2 - 6x}{6f(x)(x^2 + f^2(x))^2 - 6f(x)} = -\frac{x(x^2 + f^2(x))^2 - x}{f(x)(x^2 + f^2(x))^2 - f(x)},$$

de unde $f'(1) = -1$.

TFI 1.3. (o ecuaţie cu trei necunoscute)

Fie ecuaţia $F(x, y, z) = 0$, unde $F : \Omega_{deschis\breve{a}} \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ şi fie $(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$ o soluţie a ecuaţiei. Presupunem că:

i) $F \in \mathcal{C}^1(\overset{\circ}{P})$, unde $P = P(x_0, y_0, z_0) \subset \Omega$ este un paralelipiped închis cu centrul în (x_0, y_0, z_0), caracterizat prin inegalităţile $P : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b, |z - z_0| \leq c$;

ii) $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

Atunci $\exists V_{\text{deschisă}} = V(x_0, y_0) \subset D(x_0, y_0)(: |x-x_0| \leq a, |y-y_0| \leq b), \exists U_{\text{deschisă}} = U(z_0) \subset [z_0 - c, z_0 + c]$ astfel încât $\forall (x, y) \in V(x_0, y_0)$, ecuaţia $F(x, y, z) = 0$ are soluţie unică $z = \varphi(x, y) \in U(z_0)$.

Mai mult, funcţia soluţie $\varphi \in \mathcal{C}^1(V(x_0, y_0))$ şi derivatele sale parţiale sunt date de formulele

$$\begin{aligned}
\varphi'_x(x, y) &= -\frac{F'_x(x, y, \varphi(x, y))}{F'_z(x, y, \varphi(x, y))}, \\
\varphi'_y(x, y) &= -\frac{F'_y(x, y, \varphi(x, y))}{F'_z(x, y, \varphi(x, y))}, \forall (x, y) \in V(x_0, y_0).
\end{aligned}$$

Verificarea formulelor se realizează prin derivare parţială compusă:

$\forall (x, y) \in V(x_0, y_0), F(x, y, \varphi(x, y)) = 0$, de unde $F'_x(x, y, \varphi(x, y))+F'_z(x, y, \varphi(x, y))\cdot \varphi'_x(x, y) = 0$ şi $F'_y(x, y, \varphi(x, y)) + F'_z(x, y, \varphi(x, y)) \cdot \varphi'_y(x, y) = 0$, $\forall (x, y) \in V(x_0, y_0)$.

Exemplu. Dacă funcţia explicită $z = f(x, y)$ este definită implicit prin $(y+z)\sin z - y(x+z) = 0$, atunci este satisfăcută ecuaţia $z \sin z \cdot z'_x - y^2 \cdot z'_y = 0$.

Într-adevăr, fie $F(x, y, z) = (y + z)\sin z - y(x + z)$. $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$ şi $z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = \frac{y}{(y+z)\cos z+\sin z-y}$, $z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = \frac{-\sin z+x+z}{(y+z)\cos z+\sin z-y}$, deci, făcând înlocuirile se verifică relaţia cerută.

TFI 1.n. (o ecuaţie cu n necunoscute) se rezolvă recursiv.

Fie $F(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$, unde $F : \Omega_{deschis\breve{a}} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, o soluţie a acestei ecuaţii fiind $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) \in \Omega$.

Presupunând că $F \in \mathcal{C}^1, F'_{x_n}(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) \neq 0$, obţinem local $x_n = \varphi(x_1, x_2, ..., x_{n-1})$, ceea ce antrenează $F(x_1, x_2, ... x_{n-1}, \varphi(x_1, x_2, ..., x_{n-1})) = 0$, deci o ecuaţie cu $n-1$ necunoscute etc.

TFI. 2.3. (două ecuaţii cu trei necunoscute) *Fie* $F, G : \Omega_{deschis\breve{a}} \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *şi* $(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$ *o soluţie a sistemului* (1) $\left\{ \begin{array}{l} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{array} \right.$. *Presupunem că:*

i) $F, G \in \mathcal{C}^1(\overset{\circ}{P})$, *unde* $P = P(x_0, y_0, z_0) \subset \Omega$ *este un paralelipiped închis cu centrul în* (x_0, y_0, z_0), *caracterizat prin* $P : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b, |z - z_0| \leq c$.

ii) $\frac{D(F,G)}{D(y,z)}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

Atunci $\exists V_{\text{deschisă}} = V(x_0) \subset [x_0 - a, x_0 + a], \exists U_{\text{deschisă}} = U(y_0, z_0) \subset D(y_0, z_0)(: |y - y_0| \leq b, |z - z_0| \leq c)$ *astfel încât* $\forall x \in V(x_0)$, *sistemul* (1) *are soluţie unică* $(y, z) \in U(y_0, z_0) : y = \varphi(x), z = \psi(x)$, *şi funcţiile soluţie* $\varphi, \psi \in \mathcal{C}^1(V)$.

$\varphi'(x)$ şi $\psi'(x)$ se obţin prin derivare parţială compusă în raport cu x în sistemul $\left\{ \begin{array}{l} F(x, \varphi(x), \psi(x)) = 0 \\ G(x, \varphi(x), \psi(x)) = 0 \end{array} \right.$, $\forall x \in V(x_0)$, de unde

$$\left\{ \begin{array}{l} F'_x(x, \varphi(x), \psi(x)) + F'_y(x, \varphi(x), \psi(x)) \cdot \varphi'(x) + F'_z(x, \varphi(x), \psi(x)) \cdot \psi'(x) = 0 \\ G'_x(x, \varphi(x), \psi(x)) + G'_y(x, \varphi(x), \psi(x)) \cdot \varphi'(x) + G'_z(x, \varphi(x), \psi(x)) \cdot \psi'(x) = 0 \end{array} \right.,$$

rezultând în final $\varphi'(x)$ şi $\psi'(x), x \in V(x_0)$.

Exemplu. Să aplicăm TFI pentru $\left\{ \begin{array}{c} F_1(x,y,z) = x + 2y - z - 3 \\ F_2(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 2xy \end{array} \right.$, $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 0)$, pentru a obţine $y = f_1(x), z = f_2(x)$.

$F_1, F_2 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3), F_1(1,1,0) = F_2(1,1,0) = 0, \frac{D(F_1,F_2)}{D(y,z)}(1,1,0) = 7 \neq 0$, deci conform TFI există $V = V(1) \in \mathcal{V}(1), U = U(1,0) \in \mathcal{V}(1,0)$ astfel încât $\forall x \in V(1)$, sistemul are soluţie unică $(y, z) \in U(1, 0)$ şi funcţiile soluţie $y = f_1(x), z = f_2(x)$ sunt de clasă $\mathcal{C}^1$ pe $V(1)$.

Înlocuind în sistem avem $\left\{ \begin{array}{c} x + 2f_1(x) - f_2(x) - 3 = 0 \\ x^3 + f_1^3(x) + f_2^3(x) - 2xf_1(x) = 0 \end{array} \right.$

şi derivând (în raport cu x), se obţin $f_1'(x), f_2'(x)$.

TFI. m.n. (m **ecuaţii cu** n **necunoscute)** (forma generală)

Exemplu. Determinaţi extremele funcţiei $y(x)$ definită de ecuaţia implicită $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

Rezolvare. Fie $F(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$. $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$.

Aplicând TFI, obţinem explicit $y = y(x)$ din ecuaţia implicită $F(x, y) = 0$.

În plus, $y'(x) = -\frac{F'_x(x,y(x))}{F'_y(x,y(x))}$. Prin urmare,

$$y'(x) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} F'_x(x,y) = 0 \\ F(x,y) = 0 \\ F'_y(x,y) \neq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x^2 = y \\ x^3 + y^3 - 3xy = 0 \\ y^2 \neq x \end{array} \right.$$, rezultând punctul critic $M(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$. În vecinătatea acestui punct, este deci definită funcţia $y = y(x)$, iar $y'(\sqrt[3]{2}) = 0$.

Întrucât $y''(x) = -(\frac{x^2-y(x)}{y^2(x)-x})'$, vom avea

$$y''(x) = -\frac{[2x + \frac{x^2-y(x)}{y^2(x)-x}](y^2(x)-x) - (x^2-y(x))[1+2y(x)\frac{x^2-y(x)}{y^2(x)-x}]}{(y^2(x)-x)^2} = -\frac{2x}{y^2(x)-x},$$

obţinând că $y''(\sqrt[3]{2}) = \frac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{16}} = -2 < 0$, deci $x = \sqrt[3]{2}$ este punct de maxim, iar maximul funcţiei $y(x)$ este $\sqrt[3]{4}$.

TEOREMA DE INVERSARE LOCALĂ.

Reamintim pentru început următorul rezultat din cazul funcţiilor reale de o variabilă reală:

Teoremă *(derivabilitatea funcţiei inverse) Dacă $f : I_{\text{interval deschis}} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este derivabilă pe I şi $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in I$, atunci $\exists\ f^{-1} : f(I) \to I$, este derivabilă pe $f(I)$ şi $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$, $\forall y \in f(I)$.*

Vom prezenta în continuare generalizarea la $\mathbb{R}^n$ a acestui rezultat, care se obţine folosind TFI (forma generală): rolul derivatei va fi jucat de jacobianul funcţiei, despre care se va presupune că este, de clasă $\mathcal{C}^1$ (deci mai mult decât diferenţiabilă):

Teoremă (de inversare locală) *Fie $F = (f_1, f_2, .., f_n) : D_{\text{deschisă}} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $F \in \mathcal{C}^1(D)$ şi $a \in D$. Dacă $\det J_F(a) \neq 0$, atunci $\exists V_{\text{deschisă}} \in \mathcal{V}(a), V \subseteq D$ astfel ca mulţimea $F(V)$ este deschisă şi F stabileşte un difeomorfism (sau transformare regulată) între V şi $F(V)$ (adică $\exists F^{-1} : F(V) \to V$ şi $F^{-1} \in \mathcal{C}^1(F(V))$).*

Probleme propuse.

1. Determinaţi punctele de extrem local ale funcţiilor $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definite prin:
i) $f(x,y) = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 8x + 8y$;
ii) $f(x,y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}, x > 0, y > 0$;
iii) $f(x,y) = (x-y)^2 + x^3 + y^3$;
iv) $f(x,y) = x^2 - y^2 + 2x$;
v) $f(x,y) = x^2 + y^4$;
vi) $f(x,y) = x^2 - y^2$;
vii) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$;
viii) $f(x,y) = (x-y)^2 + (y-1)^3$;
ix) $f(x,y) = (x-a)(x-b)(y-a)(y-b), a, b \in \mathbb{R}$, arbitrari, fixaţi (discuţie).

2. Determinaţi punctele de extrem local ale funcţiilor $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definite prin:

i) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$;
ii) $f(x,y,z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}, x, y, z > 0$;
iii) $f(x,y,z) = \sin x + \sin y + \sin z - \sin(x+y+z), x, y, z \in (0, \pi)$;
iv) $f(x,y,z) = 2(xy+z) - x^2 - y^2 - z^2$.

3. Aflaţi triunghiul de arie maximă care se poate înscrie într-un cerc de rază dată R.

4. Determinaţi triunghiul de arie maximă şi de perimetru egal cu $2p$.

5. Dintr-o cantitate dată de tablă, se construieşte un vas fără capac, având forma unui paralelipiped dreptunghic. Determinaţi dimensiunile vasului astfel încât capacitatea sa să fie maximă.

6. Determinaţi în interiorul unui patrulater un punct, astfel ca suma pătratelor distanţelor acestui punct la vârfurile patrulaterului să fie minimă.

7. Determinaţi constanta k astfel încât funcţia f, definită prin $f(x,y) = 5x^2 + 6xy + 5y^2 - 16x - 16y + k$, să aibă un minim egal cu 0.

8. Înscrieţi într-un con circular drept, un paralelipiped dreptunghic de volum maxim.

9. Funcţiile $u = \varphi(x,y), v = \psi(x,y)$ sunt definite implicit de relaţiile $\begin{cases} u + v = x + y \\ xu + yv = 1. \end{cases}$ Calculaţi u'_x, v'_x, u'_y, v'_y.

10. Se consideră funcţia $y = f(x)$ definită implicit prin relaţia $x^2 + y^2 + 2axy = 0, a > 1$. Calculaţi $f'(x), f''(x)$.

11. Calculaţi $f'(1)$ pentru funcţia $y = f(x)$ definită implicit de ecuaţia $(x^2+y^2)^3 - 3(x^2+y^2) - 2 = 0$, satisfăcând condiţia $f(1) = 1$.

12. Arătaţi că sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x^2u^2 + xzv + y^2 = 0 \\ yzu + xyv^2 - 3x = 0 \end{cases}$ determină în mod unic u şi v ca funcţii de x, y, z într-o vecinătate a punctului $(u_0, v_0, x_0, y_0, z_0) = (0, 1, 3, 3, -3)$. Calculaţi apoi $u'_x, u'_y, u'_z, v'_x, v'_y, v'_z$.

13. Aplicaţi TFI pentru $\begin{cases} F_1(x,y,z) = x + 2y - z - 3 \\ F_2(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 2xy \end{cases}, (x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 0)$, pentru a obţine $y = f_1(x), z = f_2(x)$.

14. Fie $z = z(x,y)$ definită de ecuaţia implicită $ax^2 + by^2 + cz^2 - 1 = 0$. Calculaţi derivatele sale parţiale de ordinul 2.

15. Relaţiile $\begin{cases} x^3 + y^3 - z^3 = a^3 \\ x^2 + y^2 + z^2 = b^2 \end{cases}$ definesc implicit $y = \varphi(x), z = \psi(x)$. Calculaţi $\varphi'(x), \psi'(x)$.

16. Calculaţi derivatele parţiale $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ pentru funcţia explicită $z = z(x,y)$ definită implicit de $x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 0$.

17. Arătaţi că funcţia explicită $z = z(x,y)$ definită implicit de ecuaţia $x^2+y^2+z^2 = yf(\frac{z}{y})$ (f fiind de clasă $\mathcal{C}^1$ pe domeniul său maxim de definiţie) verifică relaţia $(x^2-y^2-z^2)\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+2xy\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = 2xz$.

18. Determinaţi punctele de extrem ale funcţiei implicite $y = f(x)$ definită prin $x^2-2xy+5y^2-2x+4y+1 = 0$ astfel încât $f(1) = 0$.

19. Determinaţi extremele funcţiei $z(x,y)$ definită de ecuaţia implicită $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10 = 0$.

20. Scrieţi ecuaţia tangentei şi normalei în punctul (x_0,y_0) al elipsei $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1 = 0$.

21. Arătaţi că, în condiţiile teoremei de existenţă şi derivabilitate a funcţiilor implicite, funcţia explicită $z = z(x,y)$, definită implicit de ecuaţia $F(\frac{z}{x},\frac{y}{x}) = 0$, satisface ecuaţia $x\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = z$.

22. Arătaţi că funcţia explicită $z = z(x,y)$, definită implicit de ecuaţia $F(\frac{x}{y},\frac{x}{x^2+y^2+z}) = 0$, verifică ecuaţia $x\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = z-x^2-y^2$.