Distanţa euclidiană (indusă de norma euclidiană) (în $\mathbb{R}^k$).

Introducem în continuare o altă aplicaţie, de această dată pe produsul cartezian $\mathbb{R}^k X \mathbb{R}^k$, aplicaţie despre care vom vedea că reprezintă generalizarea naturală a noţiunii de distanţă dintre două puncte ale dreptei reale, precum şi a distanţei dintre două puncte din plan (respectiv, spaţiu).

$\forall x, y \in \mathbb{R}^k, x - y = x + (-y) = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, ..., x_k - y_k)$.

Definim *distanţa euclidiană dintre* $x, y \in \mathbb{R}^k$, astfel:

$$d(x,y) = ||x-y||(= \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + ... + (x_k-y_k)^2}).$$

Rezultă astfel metrica veritabilă (datorită modului în care a fost definită) $d : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}_+$.

Observaţie. Pentru $k = 1$, $d(x,y) = \sqrt{(x-y)^2} = |x-y|$;
Pentru $k = 2$, $d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$;
Pentru $k = 3$, $d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + (x_3-y_3)^2}$.

Desigur, în $\mathbb{R}^k$ se pot defini şi alte norme şi metrici (*vezi seminar*).

Produs scalar (în $\mathbb{R}^k$)**.**

Aşa cum am observat până acum, în $\mathbb{R}^k$ am putut deocamdată măsura distanţele, dar nu şi unghiurile, ceea ce limitează posibilitatea de interpretare geometrică. De aceea, în continuare, vom introduce produsul scalar al doi vectori, cu ajutorul căruia vom putea exprima lungimile vectorilor, dar şi măsurile unghiurilor pe care aceştia le formează.

Aşadar, $\forall x, y \in \mathbb{R}^k, x = (x_1, x_2, ..., x_k), y = (y_1, y_2, ..., y_k)$, introducem *produsul scalar al vectorilor* x *şi* y, astfel:

$$(x,y)(=< x, y >) = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ky_k = \sum_{i=1}^{k} x_iy_i.$$

Rezultă astfel aplicaţia $< \cdot, \cdot >: \mathbb{R}^k X \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$.

Teoremă. *(proprietăţile fundamentale ale produsului scalar)*

P_1 $< x, x > \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^k; < x, x >= 0 \Leftrightarrow x = 0$ (*pozitivitatea produsului scalar*);
P_2 $< x, y >=< y, x >, \forall x, y \in \mathbb{R}^k$ *(simetria);*
P_3 $\lambda < x, y >=< \lambda x, y >, \forall x, y \in \mathbb{R}^k, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ (*omogenitatea în raport cu (prima) componentă)*;
P_4 $< x + y, z >=< x, z > + < y, z >, \forall x, y, z \in \mathbb{R}^k$ *(aditivitatea în raport cu (prima) componentă).*

Demonstraţie. P_1, P_2, P_3 rezultă imediat din definiţie;
$P_4 :< x+y, z >= (x_1+y_1)z_1 + (x_2+y_2)z_2 + ... + (x_k+y_k)z_k =$
$= (x_1z_1 + x_2z_2 + ... + x_kz_k) + (y_1z_1 + y_2z_2 + ... + y_kz_k) =< x, z > + < y, z >$.

Fie $||\cdot||$, norma euclidiană pe $\mathbb{R}^k$.

Teoremă. *Produsul scalar are, de asemenea, următoarele proprietăţi:*

$$\begin{aligned} P_5 \quad & < x, x >= ||x||^2, \forall x \in \mathbb{R}^k; \\ P_6 \quad & | < x, y > | \leq ||x|| \cdot ||y||, \forall x, y \in \mathbb{R}^k \ (\textit{inegalitatea lui Cauchy}); \\ P_7 \quad & | < x, y > | \leq \frac{1}{2}(||x||^2 + ||y||^2), \forall x, y \in \mathbb{R}^k. \end{aligned}$$

Demonstraţie. $P_5 :< x, x >= x_1^2 + x_2^2 + ... + x_k^2 = ||x||^2$.
$P_6 : \forall \lambda \in \mathbb{R}, ||\lambda x - y||^2 =< \lambda x - y, \lambda x - y >= \lambda^2 ||x||^2 - 2\lambda < x, y > + ||y||^2 \geq 0$, deci $\Delta' =< x, y >^2 - ||x||^2 \cdot ||y||^2 \leq 0$, de unde concluzia.
P_7 : Din P_6, avem $| < x, y > | \leq ||x|| \cdot ||y|| \leq \frac{1}{2}(||x||^2 + ||y||^2)$ (s-a aplicat inegalitatea mediilor).

Observaţie. Din $P_6, |\frac{<x,y>}{||x||\cdot||y||}| \leq 1, \forall x, y \in \mathbb{R}^k, x \neq 0, y \neq 0$. Există atunci şi este unic un unghi $\theta \in [0, \pi]$ astfel încât $\frac{<x,y>}{||x||\cdot||y||} = \cos\theta$, deci

$$< x, y >= ||x|| \cdot ||y|| \cdot \cos\theta, \forall x, y \in \mathbb{R}^2.$$

θ se numeşte *unghiul dintre vectorii x şi y.*

Definiţie. Spunem că *vectorii x* şi *y sunt perpendiculari* dacă $< x, y >= 0$. Notăm aceasta prin $x \perp y$.

Observaţie. Pentru $k = 2$, $< x, y >= x_1y_1 + x_2y_2$, iar

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \cos(\theta_2 - \theta_1) = \cos\theta_2 \cos\theta_1 + \sin\theta_2 \sin\theta_1 = \\ &= \frac{x_1y_1 + x_2y_2}{||x|| \cdot ||y||} = \frac{< x, y >}{||x|| \cdot ||y||}, x \neq 0, y \neq 0, \end{aligned}$$

deci regăsim faptul că $< x, y >= ||x|| \cdot ||y|| \cdot \cos\theta, \forall x, y \in \mathbb{R}^k$.

Observaţie. Identitatea paralelogramului $(||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2), \forall x, y \in \mathbb{R}^k)$ poate fi acum demonstrată şi astfel:

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 =< x+y, x+y > + < x-y, x-y >= 2(||x||^2 + ||y||^2).$$

Vecinătăţi ale unui punct într-un spaţiu metric.

Fie (X,d) un spaţiu metric oarecare şi $x_0 \in X, r > 0$ $(r \in \mathbb{R})$ arbitrare, fixate. Definim

$$S(x_0, r) = \{x \in X; d(x, x_0) < r\},$$

numită *sfera deschisă (bila) de centru* x_0 *şi rază* r,

$$T(x_0, r) = \{x \in X; d(x, x_0) \leq r\},$$

numită *sfera închisă (discul) de centru* x_0 *şi rază* r.

Exemple (de sfere deschise/închise în diverse spaţii metrice).

I) În $(\mathbb{R}^k, d)$ (d metrica euclidiană), $d(x,y) = ||x-y|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{k}(x_i - y_i)^2}, \forall x, y \in \mathbb{R}^k$, avem:

i) Dacă $k = 1$, atunci $S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}; |x - x_0| < r\}(= (x_0 - r, x_0 + r)$, adică intervalul deschis centrat în x_0 şi de rază r, iar

$T(x_0, r) = [x_0 - r, x_0 + r]$, adică intervalul închis centrat în x_0 şi de rază r.

ii) Pentru $k = 2$,

$$S(x_0, r) = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2} < r\} =$$

$= \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; (x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 < r^2\} = int\mathcal{C}((x_1^0, x_2^0), r)$,

iar $T(x_0, r) = [int\mathcal{C}((x_1^0, x_2^0), r)] \cup \mathcal{C}((x_1^0, x_2^0), r)$.

iii) Pentru $k = 3, S(x_0, r)$ devine chiar sfera centrată în x_0, de unde denumirile date noţiunilor introduse.

II) $(\mathbb{R}^2, d)$ (d metrica euclidiană), $S((0,0),1), T((0,0),1)$.

Când bilele nu sunt rotunde:

$(\mathbb{R}^2, d_1), d_1(x,y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}, \forall x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$,

$S((0,0),1), T((0,0),1)$;

$(\mathbb{R}^2, d_2)$, $d_2(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|, \forall x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$,

$S((0,0),1), T((0,0),1)$.

III) Dacă (X, d_0) este spaţiul metric discret, atunci $S(x_0, r) = \begin{cases} \{x_0\}, r \leq 1 \\ X, r > 1 \end{cases}$,

iar $T(x_0, r) = \begin{cases} \{x_0\}, r < 1 \\ X, r \geq 1 \end{cases}$.

Definiţie. O mulţime $V \subset (X, d)$ se numeşte *vecinătate a punctului* $x_0 \in X$ dacă există $r > 0$ astfel încât $S(x_0, r) \subset V$.

Notăm prin $\mathcal{V}(x_0)$, *sistemul* (*familia*) tuturor *vecinătăţilor punctului* x_0.

Teoremă (*Proprietăţi de bază ale sistemului de vecinătăţi)*

V_1) $x_0 \in V, \forall V \in \mathcal{V}(x_0)$;

V_2) $\forall V \in \mathcal{V}(x_0), \forall U \supset V \Rightarrow U \in \mathcal{V}(x_0)$ *(orice supramulţime a unei vecinătăţi a unui punct este de asemenea vecinătate a punctului)*;

$V_3)$ *$\forall V_1, V_2 \in \mathcal{V}(x_0) \Rightarrow V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}(x_0)$ (intersecţia oricăror două vecinătăţi ale unui punct este de asemenea vecinătate a punctului);*

$V_4)$ *$\forall V \in \mathcal{V}(x_0), \exists W \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel încât $\forall y \in W \Rightarrow W \in \mathcal{V}(y)$.*

Demonstraţie. $V_1)$ $\forall V \in \mathcal{V}(x_0)$, $\exists\, r > 0$ astfel încât $S(x_0, r) \subset V$, de unde $x_0 \in V$.

$V_2)$ $\forall V \in \mathcal{V}(x_0)$, $\exists\, r > 0$ astfel încât $S(x_0, r) \subset V$, deci $\forall U \supset V, S(x_0, r) \subset U$, de unde $U \in \mathcal{V}(x_0)$.

$V_3)$ $\forall V_1 \in \mathcal{V}(x_0)$, $\exists\, r_1 > 0$ astfel încât $S(x_0, r_1) \subset V_1$. Analog, $\forall V_2 \in \mathcal{V}(x_0)$, $\exists\, r_2 > 0$ astfel încât $S(x_0, r_2) \subset V_2$. Notând $r_0 = \min\{r_1, r_2\}$, rezultă că $S(x_0, r_0) \subset S(x_0, r_1) \subset V_1$ şi $S(x_0, r_0) \subset S(x_0, r_2) \subset V_2$, deci $S(x_0, r_0) \subset V_1 \cap V_2$, ceea ce implică $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}(x_0)$.

$V_4)$ $\forall V \in \mathcal{V}(x_0), \exists W = S(x_0, r) \in \mathcal{V}(x_0)$. Fie $y \in S(x_0, r)$, oarecare. Atunci $d(x_0, y) < r$, deci $r - d(x_0, y) \stackrel{\text{not.}}{=} r' > 0$. Arătăm că $S(y, r') \subset S(x_0, r) = W$ (deci va rezulta că $W \in \mathcal{V}(y)$). Într-adevăr, $\forall z \in S(y, r')$, rezultă că $z \in S(x_0, r)$ (deoarece $d(x_0, z) \leq d(x_0, y) + d(y, z) < r' + d(x_0, y) = r$).

Observaţie. Din V_4 rezultă că $S(x_0, r) \in \mathcal{V}(y), \forall y \in S(x_0, r)$ (orice sferă deschisă centrată într-un punct este vecinătate pentru orice punct al său).

Teoremă *(Proprietatea de separare Hausdorff) $\forall x, y \in (X, d), x \neq y, \exists V_x \in \mathcal{V}(x), \exists V_y \in \mathcal{V}(y)$ astfel încât $V_x \cap V_y = \emptyset$ (orice două puncte diferite dintr-un spaţiu metric (X, d) pot fi separate prin vecinătăţi disjuncte ale lor).*

Demonstraţie. Deoarece $x, y \in (X, d), x \neq y$, rezultă că $r = d(x, y) > 0$. Evident, $S(x, \frac{r}{2}) \in \mathcal{V}(x)$, iar $S(y, \frac{r}{2}) \in \mathcal{V}(y)$. Demonstrăm că $S(x, \frac{r}{2}) \cap S(y, \frac{r}{2}) = \emptyset$. Într-adevăr, dacă am presupune prin reducere la absurd că $S(x, \frac{r}{2}) \cap S(y, \frac{r}{2}) \neq \emptyset$, ar rezulta că există $z \in (X, d)$ astfel încât $z \in S(x, \frac{r}{2})$ şi $z \in S(y, \frac{r}{2})$. Prin urmare, $r = d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$, contradicţie.

Sisteme fundamentale de vecinătăţi.

Definiţie. Dat fiind $x_0 \in (X, d)$, o familie $\mathcal{U}(x_0)$ de părţi din (X, d) se numeşte *sistem fundamental de vecinătăţi (* sau *bază locală) pentru* x_0 dacă:

1) $\mathcal{U}(x_0) \subset \mathcal{V}(x_0)$ şi

2) $\forall V \in \mathcal{V}(x_0), \exists U \in \mathcal{U}(x_0)$ astfel încât $U \subset V$.

Exemple. 1) $\mathcal{U}_1(x_0) = \{S(x_0, r)\}_{r>0}$ (mulţimea tuturor sferelor deschise cu centrul într-un punct $x_0 \in (X, d)$ formează un sistem fundamental de vecinătăţi pentru x_0).

Într-adevăr, $\forall S(x_0, r) \in \mathcal{V}(x_0)$, deci $\mathcal{U}_1(x_0) \subset \mathcal{V}(x_0)$. În plus, $\forall V \in \mathcal{V}(x_0)$, conform definiţiei, $\exists S(x_0, r) \in \mathcal{U}_1(x_0)$ astfel încât $S(x_0, r) \subset V$.

2) $\mathcal{U}_2(x_0) = \{S(x_0, \frac{1}{n})\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ (într-un spaţiu metric (X, d), orice punct posedă un sistem fundamental numărabil de vecinătăţi) - se mai spune că orice spaţiu metric satisface *axioma I a numărabilităţii* (*axioma* C_1).

(mulţimea tuturor sferelor deschise cu centrul într-un punct $x_0 \in (X, d)$ şi de rază $\frac{1}{n}, n \geq 1$, formează un sistem fundamental numărabil de vecinătăţi pentru x_0).

Într-adevăr, $\forall n \geq 1, S(x_0, \frac{1}{n}) \in \mathcal{V}(x_0)$, deci $\mathcal{U}_2(x_0) \subset \mathcal{V}(x_0)$. În plus, $\forall V \in \mathcal{V}(x_0)$, $\exists S(x_0, r)$ astfel încât $S(x_0, r) \subset V$. Pe de altă parte, $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ aşa ca $\frac{1}{n_0} < r$, deci $\exists S(x_0, \frac{1}{n_0}) \in \mathcal{U}_2(x_0)$ astfel ca $S(x_0, \frac{1}{n_0}) \subset S(x_0, r) \subset V$.

Mulţimi deschise. Mulţimi închise (într-un spaţiu metric).

Definiţie. i) O *mulţime* $D \subset (X, d)$ se numeşte *deschisă* dacă fie este $\emptyset$, fie este vecinătate pentru orice punct al său.

Familia tuturor mulţimilor deschise din (X, d) se notează cu τ_d şi se numeşte *topologia indusă de metrica* d.

În particular, dacă $X = \mathbb{R}^k$ şi d este metrica euclidiană, atunci topologia indusă de d se numeşte *topologia uzuală (obişnuită) (naturală)* τ_0 pe $\mathbb{R}^k$.

ii) O *mulţime* $F \subset (X, d)$ se numeşte *închisă* dacă cF este mulţime deschisă.

Proprietăţi ale mulţimilor deschise/închise într-un spaţiu metric.

Propoziţie. i) Orice reuniune (finită sau infinită) de mulţimi deschise este mulţime deschisă;

ii) Orice intersecţie finită de mulţimi deschise este mulţime deschisă;

iii) Orice reuniune finită de mulţimi închise este mulţime închisă;

iv) Orice intersecţie (finită sau infinită) de mulţimi închise este mulţime închisă;

v) $X, \emptyset$ sunt mulţimi şi deschise şi închise.

Demonstraţie. i) Fie $(D_i)_{i \in I}$ o familie oarecare de mulţimi deschise şi considerăm $D = \bigcup\limits_{i \in I} D_i$.

Dacă $D = \emptyset$, atunci, conform definiţiei, D este deschisă.

Dacă $D \neq \emptyset$, atunci $\forall x \in D = \bigcup\limits_{i \in I} D_i, \exists i_0 \in I$ astfel ca $x \in D_{i_0}$. Cum D_{i_0} este deschisă, vom avea $D_{i_0} \in \mathcal{V}(x)$. Dar $D_{i_0} \subset D$, deci conform cu V_2) obţinem că $D \in \mathcal{V}(x)$, ceea ce antrenează în final că mulţimea D este deschisă.

ii) Fie D_1 şi D_2 mulţimi deschise oarecare. Arătăm că $D = D_1 \cap D_2$ este deschisă. Dacă $D = \emptyset$, afirmaţia este evidentă. Dacă $D \neq \emptyset$, atunci $\forall x \in D = D_1 \cap D_2$, rezultă că $x \in D_1$ şi $x \in D_2$, deci $D_1 \in \mathcal{V}(x), D_2 \in \mathcal{V}(x)$, de unde $D_1 \cap D_2 \in \mathcal{V}(x)$, ceea ce înseamnă în final că mulţimea D este deschisă.

iii) şi iv) rezultă din i) şi ii) folosind relaţiile lui de Morgan.

v) evident.

Probleme propuse.

I. Fie $|| \cdot ||$, norma euclidiană pe $\mathbb{R}^k$.

1. Fie $x, y \in \mathbb{R}^k$ oarecare. Verificaţi următoarele echivalenţe:

i) $< x, y >= 0 \Leftrightarrow ||x + y|| = ||x - y||$;

ii) $< x, y >= 0 \Leftrightarrow ||x + y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$ (generalizarea la $\mathbb{R}^k$ a Teoremei lui Pitagora);

iii) $< x + y, x - y >= 0 \Leftrightarrow ||x|| = ||y||$;

iv) $< x, y >= 0 \Leftrightarrow ||x + ty|| \geq ||x||, \forall t \in \mathbb{R}$.

2. Fie $x, y \in \mathbb{R}^k$. Arătaţi că $< x, y >= \frac{1}{2}(||x||^2 + ||y||^2 - ||x - y||^2)$.

3. Fie $e_i = (0, 0, ..., 0, 1, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^k$, unde cifra 1 este plasată pe locul $i, \forall i = \overline{1, k}$ ($e_1, e_2, ..., e_k$ sunt versorii bazei canonice în $\mathbb{R}^k$). Arătaţi că:

i) $x = \sum\limits_{i=1}^{k} < x, e_i > e_i, \forall x \in \mathbb{R}^k$;

ii) $||x||^2 = \sum\limits_{i=1}^{k} < x, e_i >^2, \forall x \in \mathbb{R}^k$ (egalitatea lui Parseval);

iii) $< x, y >= \sum\limits_{i=1}^{k} < x, e_i >< y, e_i >, \forall x, y \in \mathbb{R}^k$.

II. 1. Arătaţi că există spaţii metrice în care are loc una dintre următoarele situaţii:

i) orice sferă deschisă este mulţime închisă.

ii) nici o sferă deschisă nu este mulţime închisă.

2. Arătaţi că mulţimile $A_\varepsilon = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \max(|x|, |y|) < \varepsilon\}, \varepsilon > 0$ formează un sistem fundamental de vecinătăţi ale originii în $\mathbb{R}^2$.

Aceeaşi problemă pentru mulţimile $B_\varepsilon = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x| + |y| < \varepsilon\}, \varepsilon > 0$.

3. Fie $(X, ||\cdot||)$ un spaţiu normat. Arătaţi că $T(x', r') \subseteq T(x, r) \Leftrightarrow ||x - x'|| \leq r - r'$. Este adevărată afirmaţia în cazul spaţiilor metrice arbitrare?

4. Fie (X, d) un spaţiu metric şi $A \subset X$. Definim funcţia $d(x, A) = \inf\limits_{y \in A} d(x, y), \forall x \in X$ (distanţa de la punctul x la mulţimea A). Arătaţi că $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y), \forall x, y \in X$.

5. Arătaţi că dacă $A, D \subset (X, ||\cdot||)$ şi mulţimea D este deschisă, atunci şi mulţimea $A + D = \{a + d; a \in A, d \in D\}$ (*suma mulţimilor* A şi D) este deschisă.

6. Arătaţi că orice interval deschis din $(\mathbb{R}^k, \tau_u)$, $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times ... \times (a_k, b_k)$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}, a_i < b_i, \forall i = \overline{1, k}$, este mulţime deschisă.