Exemple. i) Într-un spaţiu metric, orice sferă deschisă este vecinătate pentru orice punct al său, deci este mulţime deschisă (ceea ce justifică terminologia).

ii) Într-un spaţiu metric, fie $x_0 \in (X, d)$ şi $r > 0$ oarecare. Mulţimea $A = \{x \in X; d(x, x_0) > r\}$ este deschisă. Într-adevăr, $\forall x \in A$ (dacă $\exists$), $\exists r' = d(x, x_0) - r$ (> 0) astfel încât $S(x, r') \subseteq A : \forall z \in S(x, r'), d(z, x_0) \geq d(x, x_0) - d(x, z) > d(x, x_0) - r' = r$.

iii) Orice mulţime finită dintr-un spaţiu metric este închisă.

Într-adevăr, dacă $A = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, să arătăm că cA este deschisă. Pentru aceasta, demonstrăm că $\forall y \in cA, \exists S(y, r) \subset cA$. Atunci $y \neq x_i, \forall i = \overline{1, n}$, deci $d(x_i, y) > 0, \forall i = \overline{1, n}$ şi fie $r = \min\limits_{i=\overline{1,n}} d(x_i, y)$. $\forall z \in S(y, r)$, avem $d(y, z) < r < d(x_i, y), \forall i = \overline{1, n}$, deci $z \neq x_i, \forall i = \overline{1, n}$, ceea ce înseamnă că $z \in cA$.

iv) Orice sferă închisă $T(x_0, r)$ dintr-un spaţiu metric (X, d) este închisă (ceea ce justifică terminologia). Să arătăm deci că $cT(x_0, r)$ este deschisă, adică, $\forall y \in cT(x_0, r)$, $\exists S(y, r') \subset cT(x_0, r)$. Într-adevăr, deoarece $d(x_0, y) > r$, fie $r' = d(x_0, y) - r$. $\forall z \in S(y, r')$ satisface $d(x_0, z) \geq d(x_0, y) - d(y, z) > d(x_0, y) - r' = r$, de unde concluzia.

Propoziţie. Orice mulţime deschisă nevidă D dintr-un spaţiu metric (X, d) se poate reprezenta ca o reuniune de sfere deschise.

Demonstraţie. $\forall x \in D, \exists S(x, r_x) \subset D$, deci $D = \bigcup\limits_{x \in D} \{x\} \subseteq \bigcup\limits_{x \in D} S(x, r_x) \subseteq D$, de unde $D = \bigcup\limits_{x \in D} S(x, r_x)$.

Observaţie. O intersecţie infinită de mulţimi deschise poate să nu fie deschisă: $X = \mathbb{R}, D_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ sunt deschise, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, dar $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} D_n = \{0\}$ nu este deschisă.

Definiţie. Fie X o mulţime oarecare nevidă.

I) O familie $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ se spune că este o *topologie* pe X dacă:

i) $\forall (D_i)_{i \in I} \subset \tau \Rightarrow D = \bigcup\limits_{i \in I} D_i \in \tau$;

ii) $\forall D_1, D_2 \in \tau \Rightarrow D = D_1 \cap D_2 \in \tau$;

iii) $X, \emptyset \in \tau$.

II) Cuplul (X, τ) se numeşte *spaţiu topologic*.

Exemplu. i) Orice spaţiu metric (X, d) este spaţiu topologic (X, τ_d) (în raport cu topologia indusă de metrică) (τ_d este familia tuturor mulţimilor deschise din (X, d)).

ii) Fie (X, d_0) spaţiul metric discret. Deoarece $\forall x \in X, S(x, 1) = \{x\}$, rezultă că $\forall A \subset X, A = \bigcup\limits_{x \in A} \{x\} = \bigcup\limits_{x \in A} S(x, 1)$, care este mulţime deschisă. Prin urmare, *orice submulţime a unui spaţiu metric discret este deschisă*, ceea ce antrenează $\mathcal{P}(X) \subset \tau_{d_0}$. Deoarece incluziunea inversă are loc întotdeauna, rezultă că $\tau_{d_0} = \mathcal{P}(X)$.

Pe de altă parte, rezultă imediat şi că *orice submulţime a unui spaţiu metric discret este închisă.*

Mulţimi mărginite.

Fie o mulţime nevidă $A \subset (X, d)$.

Definiţie. i) Numim *diametru* al mulţimii $A, \delta(A) = \sup\{d(x, y); x \in A, y \in A\}$ $(\in [0, \infty])$.

ii) Spunem că *mulţimea* A este *mărginită* dacă $\delta(A) < \infty$.

iii) Spunem că *mulţimea* A este *nemărginită* dacă $\delta(A) = \infty$.

Teoremă. *Fie* $A, B \subset (X, d), A, B \neq \emptyset$.

i) Dacă $A \subseteq B$, *atunci* $\delta(A) \leq \delta(B)$;

ii) $\delta(A) = 0 \Leftrightarrow A = \{x_0\}$;

iii) $\delta(S(x_0, r)) \leq \delta(T(x_0, r)) \leq 2r$.

Demonstraţie. i) şi ii) sunt evidente din definiţia diametrului.

iii) $\forall x, y \in T(x_0, r)$, avem $d(x, x_0) \leq r$ şi $d(y, x_0) \leq r$, de unde $d(x, y) \leq 2r$, ceea ce implică $\delta(T(x_0, r)) = \sup\{d(x, y); x \in T(x_0, r), y \in T(x_0, r)\} \leq 2r$.

Teoremă. *O mulţime nevidă* $A \subset (X, d)$ *este mărginită dacă şi numai dacă* $\exists$ *o sferă deschisă care să o cuprindă:* $\exists r > 0$ *astfel încât* $A \subset S(x_0, r)$, $x_0 \in X$.

Demonstraţie. *Necesitatea.* Întrucât A este mărginită, $\delta(A) < \infty$.

Dacă $A = \{x_0\}$, problema este terminată.

Dacă $\exists x \neq x_0, x, x_0 \in A$, fie $r > 2\delta(A) (> 0)$. Arătăm că $A \subset S(x_0, r)$. Într-adevăr, $\forall z \in A$, avem $d(x_0, z) \leq d(x, x_0) + d(x, z) \leq 2\delta(A) < r$.

Suficienţa. Presupunem că $\exists r > 0$ astfel încât $A \subset S(x_0, r)$. Atunci $\delta(A) \leq \delta(S(x_0, r)) \leq 2r < \infty$.

Teoremă. *Fie* $(X, || \cdot ||)$ *un spaţiu normat. Atunci o mulţime nevidă* $A \subset (X, || \cdot ||)$ *este mărginită dacă şi numai dacă există o sferă deschisă centrată în origine care să o cuprindă, adică,* $\exists r > 0$ *astfel încât* $A \subset S(0, r)$ (0 este originea lui X).

Demonstraţie. *Suficienţa* este imediată.

Necesitatea. Întrucât mulţimea A este mărginită, $\exists r > 0$ astfel încât $A \subset S(x_0, r)$, $x_0 \in X$. Fie $r' = ||x_0|| + r$ (> 0). Este suficient să arătăm că $S(x_0, r) \subset S(0, r')$. Într-adevăr, $\forall z \in S(x_0, r)$, avem $||z|| \leq d(x_0, z) + ||x_0|| < r + ||x_0|| = r'$.

Puncte interioare. Interiorul unei mulţimi.

Fie $A \subset (X, d)$, o mulţime oarecare, nevidă.

Definiţie. i) Un punct $x_0 \in A$ se numeşte *punct interior* mulţimii A dacă $A \in \mathcal{V}(x_0)$, adică $\exists r > 0$ astfel încât $S(x_0, r) \subset A$.

ii) Totalitatea punctelor interioare mulţimii A se numeşte *interiorul* lui A şi se notează prin $intA$ sau $\overset{\circ}{A}$.

Exemple. (în topologia uzuală din $\mathbb{R}^k$)

i) $\overset{\circ}{\widehat{[a,b]}} = \overset{\circ}{\widehat{[a,b)}} = \overset{\circ}{\widehat{(a,b]}} = \overset{\circ}{\widehat{(a,b)}} = (a,b), \forall a, b \in \mathbb{R}, a < b$;

ii) $\overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \overset{\circ}{\widehat{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}} = \emptyset$;

iii) Dacă $A = (0,1]$, atunci $\frac{1}{2} \in \overset{\circ}{A}$, iar 0 şi $1 \notin \overset{\circ}{A}$;

iv) Fie $A = \{(x,y); x^2 + y^2 \leq 4, x > y\}$. Atunci $\overset{\circ}{A} = \{(x,y); x^2 + y^2 < 4, x > y\}$.

Propoziţie. (*proprietăţi* ale interiorului unei mulţimi)

i) $\overset{\circ}{A} \subseteq A, \forall A \subset (X,d)$;

ii) $\overset{\circ}{A} \subseteq \overset{\circ}{B}, \forall A, B \subset (X,d)$, cu $A \subseteq B$;

iii) $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}, \forall A, B \subset (X,d)$;

iv) $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subseteq \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}, \forall A, B \subset (X,d)$;

Observaţie. Incluziunea poate fi strictă: $A = [0,1), B = [1,2], \overset{\circ}{A} = (0,1), \overset{\circ}{B} = (1,2), \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}} = (0,2) \supsetneq (0,1) \cup (1,2)$.

v) A este mulţime deschisă dacă şi numai dacă $A = \overset{\circ}{A}$;

vi) $\overset{\circ}{A} = \underset{D \in \tau_d, D \subset A}{\cup} D$ (interiorul unei mulţimi A este cea mai amplă mulţime (în sensul incluziunii) deschisă conţinută în A).

Demonstraţie. i) evident.

ii) $\forall x \in \overset{\circ}{A}$, rezultă că $A \in \mathcal{V}(x)$, deci pentru $\forall B \subset (X,d)$, cu $B \supseteq A$, avem $B \in \mathcal{V}(x)$, deci $x \in B$.

iii) Conform ii), $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} \subseteq \overset{\circ}{A}$ şi $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} \subseteq \overset{\circ}{B}$, deci $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} \subseteq \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.

Pentru incluziunea inversă, $\forall x \in \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$, rezultă că $A \in \mathcal{V}(x)$ şi $B \in \mathcal{V}(x)$, deci $A \cap B \in \mathcal{V}(x)$, ceea ce înseamnă că $x \in \overset{\circ}{\widehat{A \cap B}}$.

iv) rezultă imediat din ii).

v) *Necesitatea.* Din i), $\overset{\circ}{A} \subseteq A$. Pentru incluziunea inversă, deoarece A este mulţime deschisă, rezultă că $\forall x \in A$, avem $A \in \mathcal{V}(x)$, adică $x \in \overset{\circ}{A}$, deci $A \subseteq \overset{\circ}{A}$.

Suficienţa. Deoarece $A = \overset{\circ}{A}$, aceasta înseamnă că $\forall x \in A$, avem $x \in \overset{\circ}{A}$, adică $A \in \mathcal{V}(x)$, deci A este deschisă.

Puncte aderente. Aderenţa unei mulţimi.

Fie $A \subset (X,d)$ o mulţime oarecare, nevidă.

Definiţie. i) Un punct $x_0 \in (X,d)$ se numeşte *punct aderent* mulţimii A dacă $V \cap A \neq \emptyset, \forall V \in \mathcal{V}(x_0)$.

ii) Totalitatea punctelor aderente mulţimii A se numeşte *aderenţa (sau închiderea)* lui A şi se notează prin $\overline{A}$ sau clA.

Definiţie. Spunem că:

i) mulţimea A este *densă* în (X,d) dacă $\overline{A} = X$.

ii) spaţiul (X,d) este *separabil* dacă $\exists A \subset X$ numărabilă, densă în X.

Teoremă *(de caracterizare folosind sistem fundamental de vecinătăţi) $x_0 \in \overline{A}$ dacă şi numai dacă $\forall \varepsilon > 0, S(x_0,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.*

Demonstraţie. *Necesitatea.* Dacă $x_0 \in \overline{A}$, deoarece $\forall \varepsilon > 0, S(x_0,\varepsilon) \in \mathcal{V}(x_0)$, rezultă conform definiţiei că $S(x_0,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.

Suficienţa. $\forall V \in \mathcal{V}(x_0), \exists \varepsilon_0 > 0$ astfel încât $S(x_0,\varepsilon_0) \subset V$. Conform ipotezei, obţinem că $S(x_0,\varepsilon_0) \cap A \neq \emptyset$ şi întrucât $S(x_0,\varepsilon_0) \subset V$, rezultă cu atât mai mult că $V \cap A \neq \emptyset$.

Exemple (în topologia uzuală din $\mathbb{R}^k$)

i) $\overline{[a,b]} = \overline{(a,b]} = \overline{(a,b)} = \overline{[a,b)} = [a,b], \forall a,b \in \mathbb{R}, a < b$.

ii) $\overline{\mathbb{Q}} = \overline{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ (deci $\mathbb{Q}$ şi $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ sunt dense în $\mathbb{R}$). De altfel, de exemplu, în general, şi $\overline{\mathbb{Q}^k} = \mathbb{R}^k$ (deci $\mathbb{Q}^k$ este densă în $\mathbb{R}^k$). $\mathbb{R}^k$ este spaţiu separabil, $\forall k \geq 1$.

iii) Dacă $A \subset \mathbb{R}$ este o mulţime nevidă, mărginită, atunci $\sup A, \inf A \in \overline{A}$.

iv) Fie $A = \{(x,y); x^2+y^2 \leq 4, x > y\}$. Atunci $\overline{A} = \{(x,y); x^2+y^2 \leq 4, x \geq y\}$.

Teoremă (relaţiile (duale) de legătură între interior şi aderenţă).

i) $c(\overline{A}) = \overset{\circ}{\widehat{cA}}$ (complementara aderenţei este interiorul complementarei);

ii) $c(\overset{\circ}{A}) = \overline{cA}$ (complementara interiorului este aderenţa complementarei).

Demonstraţie. i) $x \in c(\overline{A}) \Leftrightarrow x \notin \overline{A} \Leftrightarrow \exists \varepsilon_0 > 0$ aşa ca $S(x,\varepsilon_0) \cap A = \emptyset \Leftrightarrow \exists \varepsilon_0 > 0$ aşa ca $S(x,\varepsilon_0) \subset cA \Leftrightarrow x \in \overset{\circ}{\widehat{cA}}$.

ii) analog sau $c(\overline{cA}) = \overset{\circ}{\widehat{ccA}} = \overset{\circ}{A} \Leftrightarrow c(\overset{\circ}{A}) = \overline{cA}$.

Propoziţie. (*proprietăţi* ale aderenţei unei mulţimi)

i) $A \subseteq \overline{A}, \forall A \subset (X,d)$;

ii) $\overline{A} \subseteq \overline{B}, \forall A,B \subset (X,d)$, cu $A \subseteq B$;

iii) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \forall A,B \subset (X,d)$;

iv) $\overline{A} \cap \overline{B} \supseteq \overline{A \cap B}, \forall A,B \subset (X,d)$;

v) A este mulţime închisă dacă şi numai dacă $A = \overline{A}$;

vi) $\overline{A} = \bigcap\limits_{cF \in \tau_d, F \supset A} F$ (aderenţa unei mulţimi A este cea mai mică mulţime (în sensul incluziunii) închisă care conţine A).

Demonstraţie. i) evident.

ii) $\forall x \in \overline{A}$, rezultă că $\forall V \in \mathcal{V}(x), V \cap A \neq \emptyset$, deci cu atât mai mult vom avea $V \cap B \neq \emptyset$, ceea ce înseamnă că $x \in \overline{B}$.

iii) $\overset{\circ}{\widehat{cA \cap cB}} = \overset{\circ}{\widehat{cA}} \cap \overset{\circ}{\widehat{cB}} \Leftrightarrow c(\overline{A \cup B}) = c(\overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}) = c\overline{A} \cap c\overline{B} = c(\overline{A} \cup \overline{B})$, deci concluzia.

iv) este imediată din ii).

v) A este închisă dacă şi numai dacă cA este deschisă, adică $cA = \overset{\circ}{\widehat{cA}} = c\overline{A}$, de unde concluzia.

Propoziţie. Dacă $A \subset (X, d)$ este o mulţime nevidă mărginită, atunci $\delta(A) = \delta(\overline{A})$.

Demonstraţie. Evident, $\delta(A) \leq \delta(\overline{A})$. Pentru inegalitatea inversă, fie $x, y \in \overline{A}$, oarecare. Atunci $\forall \varepsilon > 0, \exists z'_\varepsilon, z''_\varepsilon \in A$, încât $z'_\varepsilon \in S(x, \varepsilon)$ şi $z''_\varepsilon \in S(y, \varepsilon)$. Prin urmare, $\forall \varepsilon > 0$, $d(x, y) < 2\varepsilon + d(z'_\varepsilon, z''_\varepsilon) \leq 2\varepsilon + \delta(A)$, deci $\forall x, y \in \overline{A}$, avem $d(x, y) \leq \delta(A)$, de unde $\delta(\overline{A}) \leq \delta(A)$.

Frontiera unei mulţimi.

Fie $A \subset (X, d), A \neq \emptyset$.

Definiţie. Mulţimea $FrA = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A} (= \overline{A} \cap \overline{cA})$ se numeşte *frontiera* lui A.

Teoremă. i) $\overset{\circ}{A} = A \setminus FrA$; ii) $\overline{A} = A \cup FrA$.

Demonstraţie. i) $A \setminus FrA = A \cap c(\overline{A} \cap c\overset{\circ}{A}) = A \cap [c\overline{A} \cup \overset{\circ}{A}] = (A \cap c\overline{A}) \cup (A \cap \overset{\circ}{A}) = (A \setminus \overline{A}) \cup \overset{\circ}{A} = \overset{\circ}{A}$.

ii) $A \cup FrA = A \cup [\overline{A} \cap c\overset{\circ}{A}] = (A \cup \overline{A}) \cap (A \cup c\overset{\circ}{A}) = \overline{A} \cap X = \overline{A}$.

Propoziţie. i) FrA este mulţime închisă; ii) $FrA = Fr(cA)$.

Demonstraţie. i) rezultă imediat din definiţia frontierei, ca intersecţie de mulţimi închise.

ii) $FrA = \overline{A} \cap \overline{cA} = \overline{cA} \cap \overline{A} = \overline{cA} \cap \overline{ccA} = Fr(cA)$.

Puncte de acumulare. Derivata unei mulţimi. Puncte izolate.

Fie $A \subset (X, d)$ o mulţime oarecare, nevidă.

Definiţie. i) Un punct $x_0 \in (X,d)$ se numeşte *punct de acumulare pentru mulţimea* A dacă $[V \backslash \{x_0\}] \cap A \neq \emptyset, \forall V \in \mathcal{V}(x_0)$.

Totalitatea punctelor de acumulare pentru mulţimea A se numeşte *mulţimea derivată* lui A şi se notează prin A'.

ii) Un punct $x_0 \in A$ care nu este punct de acumulare se numeşte *punct izolat*.

Prin urmare, $x_0 \in A$ este punct izolat dacă şi numai dacă $\exists V_0 \in \mathcal{V}(x_0), V_0 \cap A = \{x_0\}$.

Teoremă *(de caracterizare cu sistem fundamental de vecinătăţi)* $x_0 \in A'$ *dacă şi numai dacă* $\forall \varepsilon > 0, [S(x_0,\varepsilon) \backslash \{x_0\}] \cap A \neq \emptyset$.

Exemple. (în topologia uzuală din $\mathbb{R}^k$)

i) $[a,b]' = (a,b]' = (a,b)' = [a,b)' = [a,b], \forall a,b \in \mathbb{R}, a < b$;

ii) $\mathbb{Q}' = (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})' = \mathbb{R}$.

iii) Fie $A = \{(x,y); x^2 + y^2 \leq 4, x > y\}$. Atunci $A' = \{(x,y); x^2 + y^2 \leq 4, x \geq y\}$.

Propoziţie. *(proprietăţi* ale mulţimii derivate)

i) $A' \subseteq \overline{A}, \forall A \subset (X,d)$ (orice punct de acumulare este punct aderent);

ii) $A' \subseteq B', \forall A, B \subset (X,d)$, cu $A \subseteq B$;

iii) $(A \cup B)' = A' \cup B', \forall A, B \subset (X,d)$;

iv) $\overline{A} = A \cup A', \forall A \subset (X,d)$.

Demonstraţie. i) este evident.

ii) $\forall x \in A'$, rezultă că $\forall V \in \mathcal{V}(x), [V \backslash \{x\}] \cap A \neq \emptyset$, deci cu atât mai mult vom avea $[V \backslash \{x\}] \cap B \neq \emptyset$, ceea ce înseamnă că $x \in B'$.

iii) Datorită ii), obţinem imediat că $A' \cup B' \subseteq (A \cup B)'$. Pentru incluziunea inversă, pentru $\forall x \in (A \cup B)'$ avem că pentru $\forall \varepsilon > 0$, $[[S(x,\varepsilon) \backslash \{x\}] \cap A] \cup [[S(x,\varepsilon) \backslash \{x\}] \cap B] \neq \emptyset$, ceea ce înseamnă că $[S(x,\varepsilon) \backslash \{x\}] \cap A \neq \emptyset$ sau $[S(x,\varepsilon) \backslash \{x\}] \cap B \neq \emptyset$, adică, $x \in A' \cup B'$ (într-adevăr, dacă presupunem prin reducere la absurd că $\exists S(x,\varepsilon_1)$ astfel ca $[S(x,\varepsilon_1) \backslash \{x_0\}] \cap A = \emptyset$ şi $\exists S(x,\varepsilon_2)$ astfel ca $[S(x,\varepsilon_2) \backslash \{x_0\}] \cap B = \emptyset$, atunci pentru $S(x,\varepsilon_0) = S(x, \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\})$ se obţine imediat contradicţia).

iv) $A \subseteq \overline{A}$ şi $A' \subseteq \overline{A}$, deci $A \cup A' \subseteq \overline{A}$. Pentru incluziunea inversă, fie $x \in \overline{A}$, oarecare. Dacă $x \in A$, atunci $x \in A \cup A'$. Dacă $x \notin A$, cum $x \in \overline{A}$, rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0, [S(x,\varepsilon) \backslash \{x\}] \cap A \neq \emptyset$, ceea ce înseamnă că $x \in A'$, deci $x \in A \cup A'$.

Probleme propuse.

I. (În $(\mathbb{R}^k, \tau_u)$)

1. Arătaţi că:

i) $\overset{\circ}{\widehat{[a,b]}} = \overset{\circ}{\widehat{[a,b)}} = \overset{\circ}{\widehat{(a,b]}} = \overset{\circ}{\widehat{(a,b)}} = (a,b), \forall a,b \in \mathbb{R}, a < b$;

ii) $\overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \overset{\circ}{\widehat{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}}} = \emptyset$;

iii) $\overline{[a,b]} = \overline{(a,b]} = \overline{(a,b)} = \overline{[a,b)} = [a,b], \forall a,b \in \mathbb{R}, a < b$;

iv) $\overline{\mathbb{Q}} = \overline{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$;

v) $[a,b]' = (a,b]' = (a,b)' = [a,b)' = [a,b], \forall a,b \in \mathbb{R}, a < b$;

vi) $\mathbb{Q}' = (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})' = \mathbb{R}$.

2. Aflaţi interiorul, aderenţa, mulţimea derivată şi frontiera următoarelor mulţimi. Specificaţi pentru fiecare mulţime în parte dacă este deschisă, închisă, mărginită:
i) $A = [2,3) \cup \{4\} \cup (5,7)$;
ii) $A = (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \cap [0,1); A = \mathbb{Q} \cap [0,1]$;
iii) $A = \{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}^*}$;
iv) $A = \{(x,y); x^2 + y^2 \leq 1\}$;
v) $A = \{(x,y); 0 < y < x+1\}$;
vi) $A = \{(x,y); x^2 + y^2 \geq 3\}$;
vii) $A = \{(x,y); x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\}$;
viii) $A = \{(x,y); x^2 + y^2 \leq 2, x \geq y\}$;
ix) $A = \{(x,y); 0 \leq y \leq x+1, x \leq 2\}$;
x) $A = \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})\}_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3. Fie mulţimile $A = [0,1)$, $B = \{\frac{n}{n+1}\sin\frac{n\pi}{3} + (1 + \frac{(-1)^n}{n})^n\}_{n\geq 1}$ şi $C = A \times B \subset \mathbb{R}^2$. Aflaţi $\overset{\circ}{A}, \overline{A}, A', FrA, \overset{\circ}{B}, \overline{B}, B', FrB, \overset{\circ}{C}, \overline{C}, C', FrC$.

4. Arătaţi că orice interval închis $[a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times ... \times [a_k,b_k] \subset \mathbb{R}^k$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}, a_i < b_i, \forall i = \overline{1,k}$, este mulţime închisă şi mărginită.

5. Arătaţi că în $\mathbb{R}^2$, diametrul sferei închise (discul) $T(x,r)$ este $2r$.

6. Arătaţi că dacă $A \subset \mathbb{R}$ este o mulţime nevidă, mărginită, atunci $\sup A, \inf A \in \overline{A}$.

II. 1. Arătaţi că într-un spaţiu metric, o mulţime finită nu poate avea puncte de acumulare (deci mulţimea derivată este vidă).

2. Fie $(\mathbb{R}, d_0)$, d_0 metrica discretă. Aflaţi $\overline{A}$ pentru $A = (0,1)$ în topologia discretă τ_0. Comparaţi cu $\overline{A}$ în topologia uzuală τ_u.

3. Arătaţi că $A \subset (X,d), A \neq \emptyset$ este deschisă dacă şi numai dacă $A \cap FrA = \emptyset$ iar A este închisă dacă şi numai dacă $FrA \subset A$.

4. Fie (X,d) un spaţiu metric şi $A \subset (X,d)$. Arătaţi că A este închisă dacă şi numai dacă $A' \subseteq A$.

5. Fie (X,d) un spaţiu metric şi $A \subset (X,d), A \neq \emptyset$.
Definim funcţia $d(x,A) = \inf_{y\in A} d(x,y), \forall x \in X$ (distanţa de la punctul x la mulţimea A).
Arătaţi că:

i) $d(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{A}$ (deci $\overline{A} = \{x \in X; d(x, A) = 0\}$);

ii) Dacă $S(A, r) = \{x \in X; d(x, A) < r\}, T(A, r) = \{x \in X; d(x, A) \leq r\}, r > 0$, atunci $\overline{A} = \bigcap\limits_{r>0} S(A, r)$.

6. Fie $A \subset (X, d), A \neq \emptyset$. Arătaţi că mulţimea A' este închisă.

7. Arătaţi că în orice spaţiu metric au loc:

i) orice mulţime închisă este G_δ (intersecţie numărabilă de mulţimi deschise);

ii) orice mulţime deschisă este F_σ(reuniune numărabilă de mulţimi închise).

8. Arătaţi că în orice spaţiu normat $(X, || \cdot ||)$, $\overline{S(x_0, r)} = T(x_0, r)$, dar rezultatul nu se păstrează pentru spaţii metrice.

9. Fie $A \subset (X, d), A \neq \emptyset$. Arătaţi că:

i) $\overset{\circ}{A} = \bigcup\limits_{D \in \tau_d, D \subset A} D$;

ii) $\overline{A} = \bigcap\limits_{cF \in \tau_d, F \supset A} F$;