Dreapta reală încheiată, ca spaţiu metric

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ (dreapta reală încheiată).
În raport cu distanţa euclidiană dată de modul,
$\cdot$ dacă $x_0 \in \mathbb{R}, V \in \mathcal{V}(x_0)$ dacă $\exists (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset V$.
$\cdot$ $V \in \mathcal{V}(-\infty)$ dacă $\exists [-\infty, a) \subset V$;
$\cdot$ $V \in \mathcal{V}(+\infty)$ dacă $\exists (b, +\infty] \subset V$.

Observăm că nu putem defini în $\overline{\mathbb{R}}$ o distanţă cu ajutorul modulului, la fel cum se întâmpla în $\mathbb{R}$, deoarece, de exemplu, $d(+\infty, +\infty) = |+\infty - (+\infty)| = |\infty - \infty|$ nu are sens.

Fie atunci $f : \overline{\mathbb{R}} \to [-1, 1]$, $f(x) = \begin{cases} 1, x = \infty \\ -1, x = -\infty \\ \frac{x}{1+|x|}, x \in \mathbb{R} \end{cases}$ *(funcţia limitativă a lui Baire)*.

f este o bijecţie, iar aplicaţia $\overline{d} : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}_+, \overline{d}(x, y) = |f(x) - f(y)|, \forall x, y \in \overline{\mathbb{R}}$ este o metrică pe $\overline{\mathbb{R}}$. Astfel, $(\overline{\mathbb{R}}, \overline{d})$ devine spaţiu metric.

Subspaţii ale unui spaţiu metric.

Fie un spaţiu metric (X, d) şi $Y \subset X, Y \neq \emptyset$. $d_{/Y \times Y}$ este de asemenea o metrică, numită *metrica indusă de d pe Y*.

$(Y, d_{/Y \times Y})$ este spaţiu metric, *subspaţiu al spaţiului metric* (X, d).

Exemple. Fie $\mathbb{R}$ înzestrat cu metrica euclidiană d. $\mathbb{Q}$ înzestrat cu metrica $d(x, y) = |x - y|, \forall x, y \in \mathbb{Q}$, este subspaţiu al spaţiului metric $(\mathbb{R}, d)$.
În schimb, $\mathbb{Q}$ înzestrat cu metrica discretă d_0 nu este subspaţiu al spaţiului metric $(\mathbb{R}, d)$.

Teoremă. *Fie $Y \subset X$ un subspaţiu al spaţiului metric (X, d). O mulţime $M^* \subset Y$ este deschisă (respectiv, închisă) în Y dacă şi numai dacă există o mulţime deschisă (respectiv, închisă) $M \subset X$ aşa ca $M^* = M \cap Y$.*

Teoremă. *Fie $Y \subset X$ un subspaţiu al spaţiului metric (X, d) şi fie $x \in Y$. O mulţime $V^* \subset Y$ este vecinătate a lui x în Y dacă şi numai dacă există o vecinătate V a lui x în X aşa ca $V^* = V \cap Y$.*

ŞIRURI DE PUNCTE ÎN SPAŢII METRICE

Fie (X, d) un spaţiu metric oarecare.

Definiţie. O aplicaţie $f : \mathbb{N} \to X, \forall n \in \mathbb{N}, f(n) \overset{\text{not.}}{=} x_n \in X$, se numeşte *şir de elemente din X*.

Definiţie. i) *(cu vecinătăţi)* Spunem că un şir $(x_n)_n \subset (X, d)$ *converge* (sau *este convergent*) la un element $a \in X$ dacă orice vecinătate a lui a conţine toţi termenii şirului de la un loc încolo, adică, $\forall V \in \mathcal{V}(a), \exists n_V \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n_V, x_n \in V$.

Notăm aceasta prin $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ sau $x_n \to a$.

ii) Spunem că şirul $(x_n)_n \subset (X, d)$ *diverge* (sau *este divergent*) dacă nu este convergent.

Teoremă (de caracterizare). *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*
i) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ *(definiţia cu vecinătăţi);*
ii) (definiţia cu sfere) $\forall S(a, \varepsilon), \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *astfel încât* $\forall n \geq n_\varepsilon, x_n \in S(a, \varepsilon)$;
iii) (definiţia analitică) $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *astfel încât* $\forall n \geq n_\varepsilon, d(x_n, a) < \varepsilon$, *adică, echivalent,* $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, a) = 0$.

Demonstraţie. Evident, ii) $\Leftrightarrow$ iii).

i) $\Rightarrow$ ii): Se aplică i), ţinând seama că orice sferă deschisă centrată într-un punct este vecinătate a punctului respectiv.

ii) $\Rightarrow$ i): $\forall V \in \mathcal{V}(a), \exists S(a, \varepsilon) \subset V$ şi se foloseşte ii).

Observaţie. i) Orice şir constant este convergent.

ii) Prin adăugarea sau eliminarea unui număr finit de termeni, un şir convergent rămâne convergent la aceeaşi limită, iar un şir divergent rămâne divergent.

Definiţie. Spunem că şirul $(x_n)_n \subset (X, d)$ este *mărginit* dacă mulţimea $\{x_n\}$ a termenilor săi este mărginită.

Definiţie. Fie $(x_n)_n \subset (X, d)$. Un şir $(y_n)_n \subset (X, d)$ se numeşte *subşir al şirului* $(x_n)_n$ dacă există un şir strict crescător de numere naturale $(n_k)_k$ astfel încât $y_k = x_{n_k}, \forall k \in \mathbb{N}$.

Observăm că $\forall k \in \mathbb{N}, n_k \geq k$.

Proprietăţi ale şirurilor convergente.

Teoremă. *(unicitatea limitei) Limita oricărui şir convergent dintr-un spaţiu metric* (X, d) *este unică.*

Demonstraţie. Fie $(x_n)_n \subset (X, d)$ un şir convergent. Presupunem prin reducere la absurd că există $a, b \in X, a \neq b$, astfel încât $x_n \to a$, $x_n \to b$. Conform proprietăţii de separare Hausdorff, există $V_a \in \mathcal{V}(a)$ şi $V_b \in \mathcal{V}(b)$ astfel încât $V_a \cap V_b = \emptyset$. Deoarece $x_n \to a$, $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n_1, x_n \in V_a$. Analog, deoarece $x_n \to b$, $\exists n_2 \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n_2, x_n \in V_b$. Prin urmare, $\forall n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}, x_n \in V_a \cap V_b$, deci $V_a \cap V_b \neq \emptyset$, contradicţie.

Teoremă. *Orice şir convergent din (X, d) este mărginit.*

Demonstraţie. Fie $(x_n)_n \subset (X, d)$ un şir convergent la un punct $a \in (X, d)$. Pentru $\varepsilon = 1$, există $n_1 \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n_1, d(x_n, a) < 1$.

Notăm cu $r = \max\{1, d(x_1, a), d(x_2, a), ..., d(x_{n_1-1}, a)\}$, deci $(x_n)_{n\geq 1} \subset S(a, r)$.

Teoremă. *Orice subşir $(x_{n_k})_k$ al unui şir convergent $(x_n)_n$ din (X, d) este convergent şi are aceeaşi limită ca $(x_n)_n$.*

Demonstraţie. Fie $a = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$. Atunci $\forall \varepsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall k \geq k_0, d(x_k, a) < \varepsilon$. Dar $\forall k \geq k_0, n_k \geq k \geq k_0$, deci $d(x_{n_k}, a) < \varepsilon$, ceea ce înseamnă că $x_{n_k} \to a$.

Caracterizări ale unor elemente topologice cu ajutorul şirurilor.

Deoarece, aşa cum s-a văzut, orice punct a dintr-un spaţiu metric (X, d) admite un sistem fundamental numărabil de vecinătăţi $\mathcal{U} = \{S(a, \frac{1}{n})\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, vom da în cele ce urmează caracterizări cu ajutorul şirurilor, ale punctelor aderente/de acumulare, respectiv ale mulţimilor închise:

Teoremă. *Fie $A \subset (X, d)$ o mulţime oarecare, nevidă.*

i) $a \in \overline{A}$ dacă şi numai dacă $\exists (x_n)_n \subset A$ astfel încât $x_n \to a$.

ii) $a \in A'$ dacă şi numai dacă $\exists (x_n)_n \subset A\backslash\{a\}$ astfel încât $x_n \to a$.

iii) Mulţimea A este închisă dacă şi numai dacă $\forall (x_n)_n \subset A$, cu $x_n \to a$, rezultă că $a \in A$.

Demonstraţie. i) *Necesitatea.* Dacă $a \in \overline{A}$, atunci $\forall V \in \mathcal{V}(a), V \cap A \neq \emptyset$.

În particular, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, pentru $V = S(a, \frac{1}{n}), S(a, \frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset$, deci, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists (x_n)_n \subset A$ astfel încât $x_n \in S(a, \frac{1}{n})$, adică, echivalent, $d(x_n, a) < \frac{1}{n}$, ceea ce implică $x_n \to a$.

Suficienţa. Presupunem acum că există $(x_n)_n \subset A$ astfel încât $x_n \to a$. Fie $V \in \mathcal{V}(a)$ o vecinătate arbitrară. Deoarece $x_n \to a$, conform definiţiei cu vecinătăţi, există $n_V \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n_V, x_n \in V$. Prin urmare, $V \cap A \neq \emptyset$, deci $a \in \overline{A}$.

ii) rezultă imediat din i).

iii) *Necesitatea.* Dacă A este închisă, atunci $A = \overline{A}$. Fie $(x_n)_n \subset A$ convergent la un punct a. Atunci, conform punctului i), $a \in \overline{A} = A$.

Suficienţa. Presupunem că orice şir convergent din A are limita în A. Pe de o parte $A \subseteq \overline{A}$, iar pe de altă parte, $\forall a \in \overline{A}$, conform punctului i), $\exists (x_n)_n \subset A$ astfel încât $x_n \to a$. Dar atunci, conform presupunerii, obţinem că $a \in A$, deci $\overline{A} \subseteq A$. Prin urmare, în final, $\overline{A} = A$, adică A este închisă.

Spaţii metrice complete.

Definiţie. Spunem că un şir $(x_n)_n \subset (X, d)$ este *Cauchy* (sau *fundamental*) dacă $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n, m \geq n_\varepsilon, d(x_n, x_m) < \varepsilon$,

sau, echivalent,

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}^*, d(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon$.

Teoremă. *Orice şir convergent $(x_n)_n$ este Cauchy.*

Demonstraţie. Fie $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Atunci $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n_\varepsilon, d(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$, deci, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n, m \geq n_\varepsilon, d(x_n, x_m) \leq d(x_n, a) + d(x_m, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Teoremă. *Orice şir Cauchy $(x_n)_n$ este mărginit.*

Demonstraţie. Întrucât şirul $(x_n)_n$ este Cauchy, pentru $\varepsilon = 1, \exists n_1 \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n, m \geq n_1, d(x_n, x_m) < 1$. În particular, $d(x_n, x_{n_1}) < 1, \forall n \geq n_1$. Fie $r = \max\{1, d(x_1, x_{n_1}), d(x_2, x_{n_1}), ..., d(x_{n_1-1}, x_{n_1})\}$. Atunci $(x_n)_{n\geq 1} \subset S(x_{n_1}, r)$.

Definiţie. Un *spaţiu metric* (X, d) se spune că este *complet* dacă orice şir Cauchy este convergent (altfel spus, noţiunile de şir Cauchy şi şir convergent coincid).

Problematica în $\mathbb{R}^k$ $(k \geq 2)$ (cu metrica euclidiană indusă de norma euclidiană).

Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}^k$. Atunci
$x_1 = (x_1^1, x_1^2, ..., x_1^k)$,
$x_2 = (x_2^1, x_2^2, ..., x_2^k)$,
...,
$x_n = (x_n^1, x_n^2, ..., x_n^k)$,
....
$(x_n^i)_n \subset \mathbb{R}, i = \overline{1, k}$ se numesc *şiruri de coordonate.*

Teoremă *(convergenţa în $\mathbb{R}^k$). Un şir $(x_n)_n \subset \mathbb{R}^k$ este convergent (în $\mathbb{R}^k$) la $a = (a_1, a_2, ..., a_k) \in \mathbb{R}^k$ dacă şi numai dacă $x_n^i \to a_i$ (în $\mathbb{R}$), $\forall i = \overline{1, k}$.*

Demonstraţie. Vom folosi următoarea dublă inegalitate:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall i = \overline{1, k}, |x_n^i - a_i| \leq ||x_n - a|| \leq \sum_{i=1}^{k} |x_n^i - a_i|.$$

Necesitatea. Dacă $x_n \to a$, atunci $||x_n - a|| \to 0$, de unde $x_n^i \to a_i, \forall i = \overline{1, k}$.

Suficienţa. Dacă $x_n^i \to a_i, \forall i = \overline{1,k}$, atunci $\sum\limits_{i=1}^{k} |x_n^i - a_i| \to 0$, de unde $||x_n - a|| \to 0$, ceea ce înseamnă că $x_n \to a$.

Exemplu. Şirul $(x_n)_n \subset \mathbb{R}^3$, de termen general $x_n = (\frac{\ln(n+2)}{\ln(n+1)}, n \sin \frac{1}{n}, \frac{\sin^3 n}{\ln n}), \forall n \geq 2$, este convergent în $\mathbb{R}^3$, cu limita vectorul $(1,1,0)$.

Observaţie. Un rezultat analog are loc în general pentru spaţiul metric produs al k spaţii metrice oarecare.

Teoremă *(proprietatea Cauchy în $\mathbb{R}^k$). Un şir $(x_n)_n \subset \mathbb{R}^k$ este Cauchy în $\mathbb{R}^k$ dacă şi numai dacă $(x_n^i)_n$ este Cauchy în $\mathbb{R}, \forall i = \overline{1,k}$.*

Demonstraţie. Se raţionează ca la teorema anterioară, ţinând seama că

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, \forall i = \overline{1,k}, |x_n^i - x_m^i| \leq ||x_n - x_m|| \leq \sum_{i=1}^{k} |x_n^i - x_m^i|.$$

Teoremă *(mărginirea în $\mathbb{R}^k$). Un şir $(x_n)_n \subset \mathbb{R}^k$ este mărginit în $\mathbb{R}^k$ dacă şi numai dacă $(x_n^i)_n$ este mărginit în $\mathbb{R}, \forall i = \overline{1,k}$.*

Demonstraţie. Se raţionează asemănător, ţinând seama că

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall i = \overline{1,k}, |x_n^i| \leq ||x_n|| \leq \sum_{i=1}^{k} |x_n^i|.$$

Teoremă *(caracterizarea Cauchy). Un şir $(x_n)_n \subset \mathbb{R}^k$ este convergent dacă şi numai dacă este şir Cauchy* (deci $\mathbb{R}^k$ cu metrica euclidiană este spaţiu metric complet).

Demonstraţie. Şirul $(x_n)_n \subset \mathbb{R}^k$ este convergent în $\mathbb{R}^k$ dacă şi numai dacă $\forall i = \overline{1,k}, (x_n^i)_n \subset \mathbb{R}$ este convergent, adică, echivalent, Cauchy în $\mathbb{R}$, ceea ce echivalează cu faptul că $(x_n)_n$ este Cauchy în $\mathbb{R}^k$.

Teoremă. *(Cesaro). Orice şir mărginit din $\mathbb{R}^k$ are subşiruri convergente.*

Demonstraţie. Pentru simplificarea scrierii, vom presupune, fără a restrânge generalitatea, că $k = 2$.

Fie deci $(x_n)_n = (x_n^1, x_n^2)_n \subset \mathbb{R}^2$ un şir mărginit. Rezultă că $(x_n^1)_n, (x_n^2)_n \subset \mathbb{R}$ sunt de asemenea mărginite. Lema lui Cesaro aplicată lui $(x_n^1)_n$ antrenează existenţa unui subşir $(x_{n_k}^1)_k$ al său convergent. Aplicând din nou Lema lui Cesaro pentru şirul mărginit $(x_{n_k}^2)_k$, rezultă că există un subşir $(x_{n_{k_p}}^2)_p$ al său convergent. Prin urmare, există subşirul convergent $(x_{n_{k_p}}^1, x_{n_{k_p}}^2)_p$ al şirului $(x_n)_n$.

Teoremă. *Dacă în $\mathbb{R}^k$ cu norma euclidiană, $x_n \to a$, atunci $||x_n|| \to ||a||$.*

Demonstraţie. Avem: $|||x_n|| - ||a||| \leq ||x_n - a||, \forall n \in \mathbb{N}$. Deoarece $x_n \to a$, avem $||x_n - a|| \to 0$, şi, conform criteriului majorării, $|||x_n|| - ||a||| \to 0$, adică $||x_n|| \to ||a||$.

Observaţie. Din teorema anterioară rezultă că în $\mathbb{R}^k$ cu norma euclidiană, dacă un şir este convergent, atunci şirul normelor este de asemenea convergent. Reciproca nu este în general adevărată. Exemplul următor arată că există şi şiruri divergente pentru care şirul normelor converge:

Şirul $(x_n)_n \subset \mathbb{R}^2, x_n = (\frac{1+(-1)^{n+1}}{2}, \frac{1+(-1)^n}{2}), \forall n \geq 1$, este divergent, dar şirul $(||x_n||)_n$ este convergent.

Teoremă. *Într-un spaţiu metric complet (X, d), subspaţiile închise coincid cu cele complete.*

Demonstraţie. Fie o mulţime oarecare $A \subset (X, d)$.

Necesitatea. Presupunem că A este închisă şi fie $(x_n)_n \subset A$ un şir Cauchy. Atunci $(x_n)_n$ este de asemenea şir Cauchy în X, deci converge la $a \in X$. Prin urmare, $a \in \overline{A} = A$, ceea ce înseamnă în final că $(x_n)_n$ converge în A, deci A este subspaţiu complet.

Suficienţa. Presupunem că A este subspaţiu complet şi arătăm că este mulţime închisă, adică, echivalent, $\overline{A} \subseteq A$. Fie deci $y \in \overline{A}$, oarecare. Există atunci $(x_n)_n \subset A$, cu $x_n \to y$. Prin urmare, $(x_n)_n$ este şir Cauchy în A care este din ipoteză subspaţiu complet, deci $x_n \to z \in A$. În consecinţă, $y = z \in A$.

Exemple. i) Subspaţiul $[a, b] \subset (\mathbb{R}, d_u)$ este complet $(a, b \in \mathbb{R}, a < b)$.

ii) $(-\infty, a), (b, +\infty) \subset (\mathbb{R}, d_u)$ nu sunt spaţii metrice complete $(a, b \in \mathbb{R})$.

iii) Subspaţiul $\mathbb{Q}^k \subset (\mathbb{R}^k, d_u)$ $(k \geq 1)$ nu este complet (nu este închis).

Teoremă. *Pentru orice spaţiu metric, există un spaţiu metric complet care să îl conţină ca subspaţiu.*

Teoremă (Cantor) (de caracterizare a spaţiilor metrice complete). *Un spaţiu metric (X, d) este complet dacă şi numai dacă $\forall (F_n)_n$ un şir descendent de mulţimi nevide, închise, cu $\lim\limits_{n\to\infty} \delta(F_n) = 0$, avem $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$.*

Demonstraţie. *Necesitatea.* Fie $(F_n)_n$ un şir descendent de mulţimi nevide, închise, cu $\lim\limits_{n\to\infty} \delta(F_n) = 0$. Deoarece $\forall n \in \mathbb{N}, F_n \neq \emptyset$, rezultă că $\exists x_n \in F_n$. Deoarece $F_n \supseteq F_{n+p}, \forall p \in \mathbb{N}$, avem $d(x_n, x_{n+p}) \leq \delta(F_n), \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}$. Întrucât $\lim\limits_{n\to\infty} \delta(F_n) = 0$, rezultă că $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n_0, \forall p \in \mathbb{N}$, $d(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon$, ceea ce înseamnă că şirul $(x_n)_n$ este Cauchy în spaţiul metric complet (X, d), deci există $x \in X$ aşa ca $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Vom arăta că $x \in F_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Într-adevăr, $\forall n \in \mathbb{N}, A_n = \{x_n, x_{n+1}, ...x_{n+p}, ...\}$.

Probleme propuse

I. (În $\mathbb{R}^k$ cu norma euclidiană)

1. Stabiliţi dacă următoarele şiruri sunt convergente:

i) $(x_n)_n \subset \mathbb{R}^3, x_n = (\frac{\sin n}{n}, n \sin \frac{1}{n}, \sqrt[n]{n+1}), \forall n \geq 2;$

ii) $(x_n)_n \subset \mathbb{R}^4, x_n = (\frac{1}{1^3+2} + \frac{1}{2^3+2} + ... + \frac{1}{n^3+2}, \frac{1}{2} + \frac{-1}{3} + ... + \frac{(-1)^{n+1}}{n}, (\frac{1}{-3})^n, n(\frac{1}{4})^n), \forall n \geq 1.$

iii) $(x_n)_n \subset \mathbb{R}^2, x_n = (\sqrt[3]{n^2}(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n-1}), \frac{2^n+3^n}{3^n+4^n}), \forall n \geq 1.$

2. Fie şirul $(x_n)_n \subset \mathbb{R}^3, x_n = ((1+\frac{1}{n})^n, \sqrt[n]{n}, \frac{1}{n}\sin n), \forall n \geq 2$. Determinaţi $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ să fie la distanţă minimă în $\mathbb{R}^3$ faţă de punctul $a = (1, e^{-\lambda}, \pi)$.

3. Studiaţi convergenţa şi în caz afirmativ calculaţi limita şirului $(x_n)_n \subset \mathbb{R}^4, x_n = ((\cos \frac{a}{n^2})^{n^2}, \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}), \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}, n(2^{\arcsin \frac{\pi}{3n}} - 1)), \forall n \geq 2, a \in \mathbb{R}$ fiind arbitrar, fixat.

4. Fie şirul $(x_n)_n \subset \mathbb{R}^2, x_n = (2n \sin \frac{1}{n}, \frac{\ln n}{n}), \forall n \geq 2$. Arătaţi că sfera $S((0,0),1) \subset \mathbb{R}^2$ poate conţine doar un număr finit de termeni ai şirului.

5. Fie $A, D \subset \mathbb{R}^k$. Arătaţi că dacă mulţimea D este deschisă, atunci $D + A = D + \overline{A}$. Arătaţi că ipoteza asupra mulţimii D este esenţială.

6. Fie şirul $(x_n)_n \subset \mathbb{R}^3, x_n = ((-1)^n \frac{n+1}{n+2}, 3^n(2^{\frac{1}{n}} - 1), \cos \frac{n\pi}{2}), \forall n \geq 1$. Precizaţi dacă şirul este convergent. Studiaţi apoi mărginirea şirului.

7. Fie mulţimea $A = \{(x,y); x^2 + y^2 \leq 9, y \geq x + 1\}$. Arătaţi cu ajutorul caracterizării cu şiruri că mulţimea A este închisă. Este mulţimea $B = \{(x,y); x^2 + y^2 \leq 9, y > x + 1\}$ închisă?

8. Cercetaţi dacă mulţimea $A = \{(x,y); (x^2+y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)\} \subset \mathbb{R}^2$ este mărginită. Este închisă?

9. (Teorema lui Cauchy-Bolzano) Arătaţi că *orice mulţime mărginită şi infinită din* $\mathbb{R}^k$ are *cel puţin un punct de acumulare.*

10. *(caracterizări cu şiruri ale noţiunilor de interior/mulţime deschisă)*

Fie $A \subset \mathbb{R}^k$ o mulţime oarecare nevidă. Arătaţi că un punct $x \in \overset{\circ}{A}$ dacă şi numai dacă $\forall (x_n)_n, x_n \to x, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n_0, x_n \in A$.

Deduceţi de aici că o mulţime nevidă D este deschisă dacă şi numai dacă $\forall x \in D$ şi $\forall (x_n)_n, x_n \to x, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n_0, x_n \in D$.

II. 1. Arătaţi că dacă un şir Cauchy $(x_n)_n \subset (X, d)$ conţine un subşir convergent la un punct $x \in X$, atunci $x_n \to x$.

2. Arătaţi că orice spaţiu metric finit este complet.

3. Arătaţi că orice spaţiu metric discret este complet.

4. Fie $d : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+, d(m,n) = \begin{cases} 0, m = n \\ 1 + \frac{1}{m+n}, m \neq n \end{cases}, \forall m, n \in \mathbb{N}$.

Arătaţi că $(\mathbb{N}, d)$ este spaţiu metric complet.

5. Pe $\mathbb{R}_+$ se introduce metrica $d(x,y) = \begin{cases} x+y, x \neq y \\ 0, x = y \end{cases}, \forall x, y \in \mathbb{R}_+$.

Arătaţi că $(\mathbb{R}_+, d)$ este spaţiu metric complet.

6. Arătaţi că dacă $(X_i, d_i), i = \overline{1,k}$ sunt k spaţii metrice oarecare şi considerăm spaţiul metric produs $(X, d), X = X_1 \times ... \times X_k, d(x,y) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{k} d_i(x_i, y_i)}, \forall x, y \in X$, atunci un şir $(x_n)_n \subset (X, d), x_n = (x_n^1, ..., x_n^k), \forall n \in \mathbb{N}, (x_n^i)_n \subset X_i, \forall i = \overline{1,k}$, converge (în (X, d)) la $a = (a_1, ..., a_k), a_i \in X_i, \forall i = \overline{1,k} \Leftrightarrow (x_n^i)_n$ converge la a_i (în (X_i, d_i)), $\forall i = \overline{1,k}$.

7. Fie $d : \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}_+, d(m,n) = |\frac{1}{m} - \frac{1}{n}|, \forall m, n \in \mathbb{N}^*$.

Arătaţi că $(\mathbb{N}^*, d)$ este spaţiu metric care nu este complet.

8. Arătaţi că $(0, 1]$ privit ca subspaţiu al spaţiului $(\mathbb{R}, d_u)$ nu este spaţiu metric complet, dar înzestrat cu metrica discretă este spaţiu metric complet.

9. Arătaţi că dacă:

i) $(x_n)_n, (y_n)_n$ sunt şiruri convergente într-un spaţiu metric (X, d), atunci $(d(x_n, y_n))_n$ este şir convergent în $(\mathbb{R}, d_u)$.

ii) $(x_n)_n, (y_n)_n$ sunt şiruri Cauchy într-un spaţiu metric (X, d), atunci $(d(x_n, y_n))_n$ este şir Cauchy în $(\mathbb{R}, d_u)$.