Teoremă (Cantor) (de caracterizare a spaţiilor metrice complete). *Un spaţiu metric* (X, d) *este complet dacă şi numai dacă* $\forall (F_n)_n$ *un şir descendent de mulţimi nevide, închise, cu* $\lim\limits_{n\to\infty} \delta(F_n) = 0$, *avem* $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$.

Demonstraţie. *Necesitatea.* Fie $(F_n)_n$ un şir descendent de mulţimi nevide, închise, cu $\lim\limits_{n\to\infty} \delta(F_n) = 0$. Deoarece $\forall n \in \mathbb{N}, F_n \neq \emptyset$, rezultă că $\exists x_n \in F_n$. În cursul anterior, am demonstrat că şirul $(x_n)_n$ este Cauchy în spaţiul metric complet (X, d), deci există $x \in X$ aşa ca $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Vom arăta că $x \in F_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Într-adevăr, $\forall n \in \mathbb{N}, A_n = \{x_n, x_{n+1}, ...x_{n+p}, ...\} \subseteq F_n$, deci $\overline{A_n} \subseteq \overline{F_n} = F_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Deoarece $x_n \to x$, rezultă că şi $x_n, x_{n+1}, ...x_{n+p}, ... \to x$, deci $x \in \overline{A_n} \subseteq F_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Prin urmare, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$.

De altfel, remarcăm că mulţimile F_n pot avea în comun doar un punct deoarece dacă ar exista $y \neq x$ aşa ca $y \in F_n, \forall n \in \mathbb{N}$, am avea $0 < d(x, y) \leq \delta(F_n) \to 0$, deci $d(x, y) = 0$, contradicţie.

Suficienţa. Fie $(x_n)_n$ un şir Cauchy oarecare în (X, d). $\forall n \in \mathbb{N}$, notăm $A_n = \{x_n, x_{n+1}, ...x_{n+p}, ...\}$ şi $F_n = \overline{A_n}$. Atunci $(F_n)_n$ este un şir descendent de mulţimi nevide, închise.

Deoarece $(x_n)_n$ este Cauchy, rezultă că $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall m, n \geq n_0$, $d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$, de unde $\delta(F_n) \leq \delta(F_{n_0}) = \delta(A_{n_0}) = \sup\limits_{m,n \geq n_0} d(x_n, x_m) \leq \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall n \geq n_0$, ceea ce antrenează că $\lim\limits_{n\to\infty} \delta(F_n) = 0$, deci din ipoteză $\exists x \in F_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Atunci $d(x_n, x) \leq \delta(F_n) < \varepsilon, \forall n \geq n_0$, ceea ce înseamnă că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, deci (X, d) este complet.

Spaţii Banach.

Definiţie. Spunem că un spaţiu normat $(X, || \cdot ||)$ este *spaţiu Banach* dacă este spaţiu metric complet în raport cu metrica indusă de normă.

Observaţie. Aşa acum am remarcat deja, $\mathbb{R}^k, k \geq 1$, cu norma euclidiană este spaţiu Banach.

Alte exemple de spaţii Banach.

I) $(\mathcal{B}(A), || \cdot ||)$ este spaţiu Banach ($(\mathcal{B}(A), +, \cdot)$ este spaţiu liniar normat),

$$d(f, g) = \sup_{x \in A} |f(x) - g(x)|, \forall f, g \in \mathcal{B}(A),$$

distanţa indusă de norma uniformă

$$||f|| = \sup_{x \in A} |f(x)|, \forall f \in \mathcal{B}(A).$$

Într-adevăr, fie $(f_n)_n \subset \mathcal{B}(A)$ un şir Cauchy oarecare în $(\mathcal{B}(A), d)$. Trebuie să arătăm că există $f \in \mathcal{B}(A)$ astfel ca $f_n \overset{\mathcal{B}(A)}{\to} f$. Întrucât $(f_n)_n$ este şir Cauchy, pentru orice $\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n, m \geq n_0, d(f_n, f_m) < \frac{\varepsilon}{2}$, ceea ce înseamnă că pentru orice $x \in A$,

$$(*)\ |f_n(x) - f_m(x)| \leq \sup_{x \in A} |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

deci $\forall x \in A, (f_n(x))_n$ este şir numeric Cauchy, deci convergent. Prin urmare, $\forall x \in A, \exists f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$.

Astfel, este bine definită o funcţie f. Arătăm că $f \in \mathcal{B}(A)$ şi $f_n \stackrel{\mathcal{B}(A)}{\rightarrow} f$.

În $(*)$ facem $m \to \infty$ şi rezultă că

$$(**)\ \forall n \geq n_0, |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \forall x \in A$$

(rezultă astfel că şirul $(f_n)_n$ converge uniform pe A - de aceea terminologia de norma convergenţei uniforme).

Prin urmare,

$$|f(x)| \leq |f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f(x)| \leq |f_{n_0}(x)| + \frac{\varepsilon}{2}, \forall x \in A.$$

Pe de altă parte, întrucât $f_{n_0} \in \mathcal{B}(A), \exists M > 0$ aşa ca $|f_{n_0}(x)| \leq M, \forall x \in A$. De aici, $|f(x)| \leq M + \frac{\varepsilon}{2}, \forall x \in A$, deci $f \in \mathcal{B}(A)$.

Trecând în $(**)$ la supremum, rezultă că

$$\forall n \geq n_0, d(f_n, f) = ||f_n - f|| = \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

de unde $f_n \stackrel{\mathcal{B}(A)}{\rightarrow} f$.

II) $(l^2, +, \cdot)$ este spaţiu Banach, cu metrica

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (x_n - y_n)^2}, \forall x = (x_n)_n, y = (y_n)_n \in l^2$$

indusă de norma

$$||x|| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2}, \forall x = (x_n)_n \in l^2.$$

Într-adevăr, $\forall (x^k)_k$ şir Cauchy în l^2, să arătăm că este convergent în l^2 $x \in l^2$.

$\forall \varepsilon > 0, \exists k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ încât $\forall k, l \geq k_\varepsilon, ||x^k - x^l|| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (x_n^k - x_n^l)^2} < \frac{\varepsilon}{2}$, deci

$$(*)|x_n^k - x_n^l|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} (x_n^k - x_n^l)^2 < (\frac{\varepsilon}{2})^2, \forall n \geq 1.$$

Prin urmare, $\forall \varepsilon > 0, \exists k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ încât $\forall k, l \geq k_\varepsilon, |x_n^k - x_n^l| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n \geq 1$, ceea ce înseamnă că pentru $\forall n \geq 1$, şirul $(x_n^k)_k$ este Cauchy, deci convergent (în $\mathbb{R}$). Pentru $\forall n \geq 1$, fie atunci $x_n = \lim\limits_{k\to\infty} x_n^k$ şi fie $x = (x_n)_n$.

Arătăm că $x^k \xrightarrow{l^2} x \in l^2$. Într-adevăr, din $(*)$, $\sum\limits_{n=1}^{p} (x_n^k - x_n^l)^2 < (\frac{\varepsilon}{2})^2, \forall p \geq 1$. Facem $l \to \infty$ şi obţinem $\sum\limits_{n=1}^{p} (x_n^k - x_n)^2 \leq (\frac{\varepsilon}{2})^2, \forall p \geq 1$, de unde, făcând $p \to \infty$,

$$(**)\sum_{n=1}^{\infty}(x_n^k - x_n)^2 \leq (\frac{\varepsilon}{2})^2,$$

ceea ce înseamnă că $x^k - x \in l^2$, deci $x = x^k - (x^k - x) \in l^2$.

În plus, din $(**)$, $||x^k - x|| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \forall k \geq k_\varepsilon$, deci $x^k \xrightarrow{l^2} x \in l^2$.

FUNCŢII ÎNTRE SPAŢII METRICE

LIMITA UNEI FUNCŢII ÎNTR-UN PUNCT

Fie $f : D \subset (X, d_1) \to (Y, d_2), a \in D'$ (deci ne putem apropia oricât de mult de a prin şiruri de elemente din D).

Definiţie. *(cu vecinătăţi)* Spunem că *funcţia f are limita $l \in Y$ în punctul* $a \in D'$ dacă $\forall V \in \mathcal{V}(l), \exists U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $\forall x \in U \cap D\backslash\{a\}, f(x) \in V$ (sau, echivalent, $f(U \cap D\backslash\{a\}) \subseteq V$).

(cu alte cuvinte, o funcţie f are limită l într-un punct $a \in D'$ dacă de îndată ce se consideră puncte $x \in D\backslash\{a\}$ *suficient* de apropiate de a, $f(x)$ se apropie *oricât* de mult de l).

Notăm aceasta prin $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ (sau $f(x) \underset{x\to a}{\to} l$).

Teoremă *(unicitatea limitei). Dacă există, limita unei funcţii într-un punct este unică.*

Demonstraţie. Presupunem, prin reducere la absurd, că există $l_1, l_2 \in Y, l_1 \neq l_2$ astfel încât $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l_1$ şi $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l_2$. Datorită proprietăţii de separare Hausdorff, există $V_1 \in \mathcal{V}(l_1)$ şi $V_2 \in \mathcal{V}(l_2)$ astfel încât $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Folosind definiţia cu vecinătăţi, $\exists U_1 \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $\forall x \in U_1 \cap D\backslash\{a\}, f(x) \in V_1$ şi $\exists U_2 \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $\forall x \in U_2 \cap D\backslash\{a\}, f(x) \in V_2$. Prin urmare, $\exists U_0 = U_1 \cap U_2 \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $\forall x \in U_0 \cap D\backslash\{a\}, f(x) \in V_1 \cap V_2$, deci $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$, contradicţie.

Teoremă. *(de caracterizare a noţiunii de limită) Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

i) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ *(definiţia cu vecinătăţi);*

ii) (definiţia cu sfere) $\forall S_Y(l,\varepsilon), \exists S_X(a,\delta)$ *astfel încât* $\forall x \in S_X(a,\delta) \cap D\backslash\{a\}, f(x) \in S_Y(l,\varepsilon)$;

iii) (caracterizarea analitică cu $\varepsilon - \delta$*)* $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ *astfel încât* $\forall x \in D\backslash\{a\}$, *cu* $d_1(x,a) < \delta$, *avem* $d_2(f(x), l) < \varepsilon$;

iv) (caracterizarea cu şiruri) $\forall (x_n)_n \subset D\backslash\{a\}, x_n \xrightarrow{X} a \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{Y} l$.

Demonstraţie. Se observă imediat că $ii) \Leftrightarrow iii)$.

$i) \Rightarrow ii)$: Fie $S_Y(l,\varepsilon)$ oarecare. Deoarece $S_Y(l,\varepsilon) \in \mathcal{V}(l)$ şi $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$, $\exists U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $\forall x \in U \cap D\backslash\{a\}, f(x) \in S_Y(l,\varepsilon)$. Întrucât $U \in \mathcal{V}(a), \exists S_X(a,\delta) \subset U$.

Prin urmare, $\forall x \in S_X(a,\delta) \cap D\backslash\{a\}, f(x) \in S_Y(l,\varepsilon)$.

$iii) \Rightarrow iv)$: Fie $(x_n)_n \subset D\backslash\{a\}, x_n \xrightarrow{X} a$ oarecare şi fie $\varepsilon > 0$ arbitrar.

Din ipoteză, $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât $\forall x \in D\backslash\{a\}$, cu $d_1(x,a) < \delta$, avem $d_2(f(x), l) < \varepsilon$.

Deoarece $x_n \to a$, pentru $\delta(\varepsilon) > 0, \exists n_0(\delta(\varepsilon)) = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n_0, d_1(x_n, a) < \delta$, ceea ce antrenează $d_2(f(x_n), l) < \varepsilon$.

Aşadar, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n_0$, $d_2(f(x_n), l) < \varepsilon$, ceea ce exprimă faptul că $f(x_n) \xrightarrow{Y} l$.

$iv) \Rightarrow i)$: Presupunem prin reducere la absurd că $\exists V_0 \in \mathcal{V}(l)$ astfel încât $\forall U \in \mathcal{V}(a)$, $f(U \cap D\backslash\{a\}) \not\subseteq V_0$.

Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, fie în particular $U_n = S_X(a, \frac{1}{n}) \in \mathcal{V}(a)$. Atunci, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f(S_X(a, \frac{1}{n}) \cap D\backslash\{a\}) \not\subseteq V_0$, adică, $\forall n \geq 1, \exists x_n \in S_X(a, \frac{1}{n}) \cap D\backslash\{a\}$, cu $f(x_n) \notin V_0, \forall n \geq 1$.

Deoarece $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \in S_X(a, \frac{1}{n})$, rezultă că $d_1(x_n, a) < \frac{1}{n}$, de unde $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, ceea ce antrenează conform presupunerii făcute că $f(x_n) \xrightarrow{Y} l$. Cum $V_0 \in \mathcal{V}(l), \exists n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n_0, f(x_n) \in V_0$, contradicţie.

Consecinţă. În general, pentru a arăta că o funcţie nu are limită într-un punct, se construiesc două şiruri care tind la punctul respectiv, pentru care şirurile imaginilor au limite diferite.

Exemple. i) Fie $f : \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\} \to \mathbb{R}, f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}, \forall (x,y) \neq (0,0)$.

Observăm că $(\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\})' = \mathbb{R}^2$, deci are sens să ne punem problema existenţei limitei funcţiei în orice punct din $\mathbb{R}^2$.

Vom arăta că nu există $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Conform procedeului indicat mai sus, construim:

$((x_n,y_n))_n, ((x'_n,y'_n))_n \subset \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}, (x_n,y_n) = (\frac{1}{n}, 0), (x'_n,y'_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}), \forall n$.

Observăm că $(x_n,y_n) \to (0,0), (x'_n,y'_n) \to (0,0)$, dar $f(x_n,y_n) = \frac{\frac{1}{n}\cdot 0}{\frac{1}{n^2}+0} = 0 \to 0, f(x'_n,y'_n) = \frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}$ şi $0 \neq \frac{1}{2}$. Prin urmare, $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Pe de altă parte, remarcăm că $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y), \forall (x_0,y_0) \neq (0,0)$.

ii) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} y = 0$ ($\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \in [-1,1], y \to 0$).

Teoremă. *(caracterizare de tip Cauchy) Fie* $f : D \subset (X, d_1) \to (Y, d_2), a \in D', (Y, d_2)$ *spaţiu metric complet. Atunci* f *are limită în punctul* a *dacă şi numai dacă*

$(*)$ $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ *astfel încât* $\forall x, y \in D \backslash \{a\}$, *cu* $d_1(x, a) < \delta$ *şi* $d_1(y, a) < \delta$ *avem* $d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$ (adică, de îndată ce x şi y sunt suficient de aproape de a, $f(x)$ şi $f(y)$ sunt oricât de apropiate).

(se poate astfel demonstra existenţa limitei unei funcţii într-un punct fără a cunoaşte efectiv limita).

Demonstraţie. *Necesitatea*. Dacă $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = l$, atunci, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât $\forall x, y \in D\backslash\{a\}$, cu $d_1(x, a) < \delta$ şi $d_1(y, a) < \delta$, avem $d_2(f(x), l) < \frac{\varepsilon}{2}$ şi $d_2(f(y), l) < \frac{\varepsilon}{2}$, de unde $d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Suficienţa. Dacă are loc condiţia $(*)$, fie $(x_n)_n \subset D\backslash\{a\}, x_n \overset{X}{\to} a$, oarecare. Pentru orice $\varepsilon > 0$ există atunci $n_0(\delta(\varepsilon)) = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall m, n \geq n_0, d_1(x_n, a) < \delta$ şi $d_1(x_m, a) < \delta$. Prin urmare, conform presupunerii făcute, $d_2(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$, ceea ce înseamnă că $(f(x_n))_n$ este şir Cauchy, deci convergent în (Y, d_2).

Să arătăm acum că limita lui $(f(x_n))_n$ este aceeaşi, indiferent de şirul $(x_n)_n \subset D\backslash\{a\}, x_n \to a$ considerat. Pentru aceasta, fie $(x_n)_n, (y_n)_n \subset D\backslash\{a\}, x_n \to a, y_n \to a$. Construim şirul intercalat $(z_n)_n \subset D\backslash\{a\}$ definit astfel:

$$z_n = \begin{cases} x_n, n = 2k \\ y_n, n = 2k+1. \end{cases}$$

Atunci $z_n \to a$, deci, conform primei părţi, $f(z_n) \to l$, de unde $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = l$. Prin urmare, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$.

Observaţie. i) Dacă operăm cu funcţii $f : D \subset \mathbb{R} \to (Y, d)$, putem vorbi de *limita la stânga* (respectiv, *la dreapta*) *a lui* f *într-un punct* $a \in D'$, considerând doar punctele $x \in D$ situate strict la stânga (respectiv, la dreapta) lui a (o vom nota prin $\lim\limits_{x\to a, x<a} f(x)$ (respectiv, $\lim\limits_{x\to a, x>a} f(x)$)).

ii) Deoarece $(\overline{\mathbb{R}}, \overline{d})$ este spaţiu metric, teoria limitei unei funcţii într-un punct se aplică şi pentru funcţii cu valori în $\overline{\mathbb{R}}$.

Problematica în $\mathbb{R}^k$.

Fie $f : D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ o funcţie vectorială. Prin urmare,
$\forall x \in D, f(x) = (f_1, f_2, ..., f_q)(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_q(x))$
$= (f_1(x_1, x_2, ..., x_p), f_2(x_1, x_2, ..., x_p), ..., f_q(x_1, x_2, ..., x_p))$,
unde $f_i : D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}, \forall i = \overline{1, q}$ se numesc *funcţiile de coordonate ale lui* f.

Teoremă. *(caracterizarea pe componente) O funcţie $f = (f_1, f_2, ..., f_q)$ are limita $l = (l_1, l_2, ..., l_q) \in \mathbb{R}^q$ în punctul $x_0 \in D'$ dacă şi numai dacă fiecare componentă f_i are limita l_i în punctul x_0 :*
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l = (l_1, l_2, ..., l_q) \Leftrightarrow \forall i = \overline{1, q}, \lim\limits_{x \to x_0} f_i(x) = l_i.$

Demonstraţie. Rezultatul este imediat conform caracterizării cu şiruri a existenţei limitei unei funcţii într-un punct şi folosind faptul că în $\mathbb{R}^k$ convergenţa unui şir echivalează cu convergenţa tuturor şirurilor de coordonate.

Operaţii cu funcţii care au limită.

1) Fie $f, g : D \subset (X, d) \to \mathbb{R}^q$, $x_0 \in D'$ şi $l_1, l_2 \in \mathbb{R}^q$. Definim
$f + g : D \subset (X, d) \to \mathbb{R}^q, (f + g)(x) = f(x) + g(x), \forall x \in D.$

Propoziţie. Dacă $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l_1$ şi $\exists \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l_2$, atunci $\exists \lim\limits_{x \to x_0} (f + g)(x) = l_1 + l_2$.

Demonstraţie. $\forall (x_n)_n \subset D \backslash \{x_0\}, x_n \to x_0$, avem $(f + g)(x_n) = f(x_n) + g(x_n) \to l_1 + l_2$.

2) Fie $f : D \subset (X, d) \to \mathbb{R}$ şi $g : D \subset (X, d) \to \mathbb{R}^q$. Definim
$fg : D \subset (X, d) \to \mathbb{R}^q, (fg)(x) = \underbrace{f(x)}_{\in \mathbb{R}} \underbrace{g(x)}_{\in \mathbb{R}^q}, \forall x \in D.$

Propoziţie. Dacă $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l_1$ şi $\exists \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l_2$, atunci $\exists \lim\limits_{x \to x_0} (fg)(x) = l_1 \cdot l_2$.

3) Fie $\lambda \in \mathbb{R}$, $f : D \subset (X, d) \to \mathbb{R}^q$. Definim
$\lambda f : D \subset (X, d) \to \mathbb{R}^q, (\lambda f)(x) = \lambda f(x), \forall x \in D.$

Propoziţie. Dacă $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, atunci $\exists \lim\limits_{x \to x_0} (\lambda f)(x) = \lambda l$.

4) Fie $f : D \subset (X, d) \to \mathbb{R}^*$ şi $g : D \subset (X, d) \to \mathbb{R}^q$. Definim
$\frac{g}{f} : D \subset (X, d) \to \mathbb{R}^q, \frac{g}{f}(x) = \underbrace{\frac{1}{f(x)}}_{\in \mathbb{R}} \underbrace{g(x)}_{\in \mathbb{R}^q}, \forall x \in D.$

Propoziţie. Dacă $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l_1 \neq 0$ şi $\exists \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l_2$, atunci $\exists \lim\limits_{x \to x_0} (\frac{g}{f})(x) = \frac{l_2}{l_1}$.

5) **Propoziţie**. Fie $f : D \subset (X, d) \to \mathbb{R}^q$, $x_0 \in D'$. Dacă $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, atunci $\exists \lim\limits_{x \to x_0} ||f(x)|| = ||l||$ ($|| \cdot ||$ este norma euclidiană).

Demonstraţie. Se poate folosi caracterizarea cu şiruri a limitei unei funcţii într-un punct sau faptul că $||f(x) - l|| \geq |||f(x)|| - ||l|||$.

Probleme propuse.

1. Fie $f(x, y) = arctg \frac{y}{x^2}$.
i) Aflaţi mulţimea de definiţie $D \subset \mathbb{R}^2$ a funcţiei f;
ii) Determinaţi D';
iii) Cercetaţi dacă există limita funcţiei f în punctele din D'.

2. Cercetaţi existenţa limitelor următoare şi, în caz afirmativ, calculaţi limita corespunzătoare: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x-y}$; $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$; $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$; $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$; $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$; $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$; $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\arcsin(x^2+y^2)}{|x|+|y|}$; $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2^{\arcsin(x^4+y^4)}-1}{x^2+y^2}$; $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$; $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2+2x}{y^2-2x}$; $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^3}{x^4+y^4}$; $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{(x-y)^2+x^2y^2}$; $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{x^4+y^2}$; $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (\frac{1}{x^2+y^2})^{x^2y}$; $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-y^4}{\sqrt{x^2+y^2-xy}}$.

3. Folosind definiţia cu $\varepsilon - \delta$, arătaţi că:
i) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,3)} (x^2 + xy) = 4$;
ii) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|} = 0$;
iii) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,\sqrt{2})} \frac{x+1}{y^2} = \frac{1}{2}$;
iv) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x-y}{x+y} = \frac{-1}{3}$.

4. Cercetaţi existenţa limitei în $(0, 0)$ pentru funcţia $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}^2, f(x, y) = (\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin \frac{1}{x^2+y^2}, \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \cos \frac{1}{x^2+y^2}), \forall (x, y) \neq (0, 0)$.

5. Calculaţi $\lim\limits_{x\to0} f(x)$, $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^3, f(x) = (\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}, (\frac{a^x+b^x}{2})^{\frac{1}{x}}, \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x})$,
$a, b \in \mathbb{R}_+ \backslash \{1\}, \alpha, \beta > 0, m, n \in \mathbb{N}^*, m, n \geq 2$.