Semnul local al unei funcţii care are limită.

Propoziţie. Fie $f : D \subset (X, d) \to \mathbb{R}, x_0 \in D'$. Presupunem că $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \neq 0$. Atunci f are <u>local</u> semnul lui l, adică, $\exists U_0 \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel încât $sgnf(x) = sgnl, \forall x \in U_0 \cap D \backslash \{x_0\}$.

Demonstraţie. Deoarece $l \neq 0$, folosind condiţia $\varepsilon - \delta$, cu $\varepsilon = \frac{|l|}{2} > 0$, rezultă că $\exists \delta > 0$ astfel încât $\forall x \in D \backslash \{x_0\}$, cu $d(x, x_0) < \delta$, avem $|f(x) - l| < \varepsilon$, deci $\forall x \in S(x_0, \delta) \cap D \backslash \{x_0\}, l - \frac{|l|}{2} < f(x) < l + \frac{|l|}{2}$.

Dacă $l > 0$, atunci $f(x) > \frac{l}{2} > 0$, iar dacă $l < 0$, atunci $f(x) < \frac{l}{2} < 0$, deci, în ambele situaţii, $sgnf(x) = sgnl, \forall x \in S(x_0, \delta) \cap D \backslash \{x_0\}$.

Limite iterate.

Pentru funcţiile de 2 variabile (sau, mai general, de p variabile) se pot considera de asemenea aşa-numitele *limite iterate*:

$\lim\limits_{x \to x_0} \lim\limits_{y \to y_0} f(x, y)$ şi $\lim\limits_{y \to y_0} \lim\limits_{x \to x_0} f(x, y)$, care, dacă există, nu sunt neapărat egale.

Observaţie. 1) Se poate întâmpla ca limitele iterate să existe şi să fie egale, dar limita globală (în ansamblul variabilelor): $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y)$ să nu existe.

2) Se poate întâmpla ca limitele iterate să nu existe (sau să nu existe una dintre ele), dar limita globală să existe.

3) Dacă există limita globală şi dacă există $\lim\limits_{x \to x_0} f(x, y)$ şi $\lim\limits_{y \to y_0} f(x, y)$, atunci există ambele limite iterate şi sunt egale cu limita globală.

4) Dacă există ambele limite iterate şi sunt diferite, atunci nu există limita globală.

Exemplu. Ne propunem să studiem limitele iterate şi limita globală în $(0, 0)$ pentru funcţia $f(x, y) = \frac{x - y + x^2 + y^2}{x + y}, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(x, y); x + y = 0\}$. Avem:

$\lim\limits_{x \to 0} \lim\limits_{y \to 0} f(x, y) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x + x^2}{x} = 1, \lim\limits_{y \to 0} \lim\limits_{x \to 0} f(x, y) = \lim\limits_{y \to 0} \frac{-y + y^2}{y} = -1$, deci $\nexists \lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y)$.

De altfel, acelaşi rezultat se obţine şi astfel: $f((\frac{1}{n}, 0)) = \frac{n+1}{n} \to 1$, iar $f((\frac{1}{n}, \frac{1}{n})) = \frac{1}{n} \to 0 \neq 1$.

FUNCŢII CONTINUE

Fie $f : D \subset (X, d_1) \to (Y, d_2)$ şi $a \in D$ (prin urmare, a poate fi punct izolat sau punct de acumulare pentru D).

Definiţie. i) *(cu vecinătăţi)* Spunem că funcţia f este *continuă în punctul* $a \in D$ dacă $\forall V \in \mathcal{V}(f(a)), \exists U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $\forall x \in U \cap D, f(x) \in V$ (sau, echivalent, $f(U \cap D) \subset V$)

ii) O funcţie care nu este continuă într-un punct se spune că este *discontinuă* în punctul respectiv.

iii) Funcţia f se numeşte *continuă (global) pe mulţimea* D dacă este continuă în fiecare punct din D.

Observaţie. Dacă $a \in D$ este punct izolat pentru D, atunci f este continuă în a. Într-adevăr, a fiind punct izolat, $\exists U_0 \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $U_0 \cap D = \{a\}$. Prin urmare, $\forall V \in \mathcal{V}(f(a)), \exists U_0 \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $f(U_0 \cap D) = f(\{a\}) \subseteq V$, deci f este continuă în a.

Teoremă. *Fie $f : D \subset (X, d_1) \to (Y, d_2)$ şi $a \in D \cap D'$. Atunci f este continuă în a dacă şi numai dacă $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.*

Demonstraţie. *Necesitatea.* Presupunem că f este continuă în a. Atunci, $\forall V \in \mathcal{V}(f(a)), \exists U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $f(U \cap D) \subset V$, de unde, cu atât mai mult, $f(U \cap D \backslash \{a\}) \subseteq V$, ceea ce înseamnă că $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Suficienţa. Presupunem că $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. Atunci, $\forall V \in \mathcal{V}(f(a)), \exists U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $f(U \cap D \backslash \{a\}) \subseteq V$. Întrucât şi $f(\{a\}) \subseteq V$, rezultă că $f(U \cap D) \subseteq V$, deci f este continuă în a.

Consecinţă. Fie $f : D \subset (X, d_1) \to (Y, d_2)$ şi $a \in D$. Atunci f este continuă în a dacă şi numai dacă ori a este punct izolat, ori $a \in D \cap D'$ şi $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Din teorema anterioară şi teorema de caracterizare a existenţei limitei unei funcţii într-un punct, rezultă imediat:

Teoremă (de caracterizare a continuităţii punctuale). *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

i) f este continuă în punctul a (definiţia cu vecinătăţi);

ii) (definiţia cu sfere) $\forall S_Y(f(a), \varepsilon), \exists S_X(a, \delta)$ astfel încât $\forall x \in S_X(a, \delta) \cap D, f(x) \in S_Y(f(a), \varepsilon)$;

iii) (caracterizarea analitică cu $\varepsilon - \delta$) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât $\forall x \in D$, cu $d_1(x, a) < \delta$, avem $d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon$;

iv) (caracterizarea cu şiruri) $\forall (x_n)_n \subset D, x_n \stackrel{X}{\to} a \Rightarrow f(x_n) \stackrel{Y}{\to} f(a)$.

Teoremă. *(caracterizarea pe componente pentru funcţii vectoriale) Funcţia $f = (f_1, f_2, ..., f_q) : D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ este continuă în punctul $a \in D$ dacă şi numai dacă toate componentele sale f_i, $i = \overline{1, q}$, sunt funcţii continue în a.*

Exemple. i) Orice funcţie constantă $f:(X,d)\to(X,d)$ este continuă pe X deoarece $\forall a\in X$ şi $\forall (x_n)_n\subset X, x_n\xrightarrow{X} a\Rightarrow f(x_n)=c\xrightarrow{X} f(a)=c$.

ii) Aplicaţia identică $i:(X,d)\to(X,d)$ este continuă pe X deoarece $\forall a\in X$ şi $\forall (x_n)_n\subset X, x_n\xrightarrow{X} a\Rightarrow i(x_n)=x_n\xrightarrow{X} i(a)=a$.

iii) $f:(\mathbb{R},d_0)\to(X,d)$ (d_0 metrica discretă) este continuă pe $\mathbb{R}$ deoarece $\forall a\in\mathbb{R}$ arbitrar, fixat, $\forall x_n\xrightarrow{d_0} a, \exists n_1\in\mathbb{N}$ astfel ca $\forall n\geq n_1, d_0(x_n,a)<1$, deci $x_n=a,\forall n\geq n_1$. Prin urmare, $f(x_n)=f(a),\forall n\geq n_1$, de unde $f(x_n)\xrightarrow{X} f(a)$.

iv) Fie $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2},(x,y)\neq(0,0)\\ 0,(x,y)=(0,0)\end{cases}$.

Observăm că f este continuă pe $\mathbb{R}^2$. Într-adevăr,

$\cdot$ f este continuă în $(0,0)$: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2}{x^2+y^2}y=0=f(0,0)$ şi

$\cdot$ f este continuă în orice punct din $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$: Fie $(x_n,y_n)_n\subset\mathbb{R}^2,(x_n,y_n)\to(x_0,y_0)\neq(0,0)$, oarecare. Atunci $x_0\neq 0$ sau $y_0\neq 0$, de unde, (eventual de la un loc încolo), $x_n\neq 0$ sau $y_n\neq 0$, deci $(x_n,y_n)\neq(0,0),\forall n\geq n_0$. Prin urmare, $f(x_n,y_n)=\frac{x_n^2y_n}{x_n^2+y_n^2}\to\frac{x_0^2y_0}{x_0^2+y_0^2}=f(x_0,y_0)$.

Teoremă (continuitatea compunerii). *Dacă $f:(X,d_1)\to(Y,d_2)$ este continuă în $a\in X$ şi $g:(Y,d_2)\to(Z,d_3)$ este continuă în $b=f(a)\in Y$, atunci $g\circ f:(X,d_1)\to(Z,d_3)$ este continuă în a.*

Demonstraţie. $\forall (x_n)_n\subset X, x_n\xrightarrow{X} a\Rightarrow f(x_n)\xrightarrow{Y} f(a)\Rightarrow (g\circ f)(x_n)=g(f(x_n))\xrightarrow{Z} g(f(a))=(g\circ f)(a)$.

Teoremă *(de caracterizare a continuităţii globale). Fie $f:(X,d_1)\to(Y,d_2)$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

i) f este continuă pe X;

*ii) $\forall D\in\tau_Y\Rightarrow f^{-1}(D)\in\tau_X$ (*altfel spus*, f "întoarce" mulţimi deschise în mulţimi deschise);*

*iii) $\forall F_{\hat{\imath}nchis\breve{a}}\subseteq Y\Longrightarrow f^{-1}(F)$ este închisă în X (*altfel spus*, f "întoarce" mulţimi închise în mulţimi închise);*

iv) $\forall A\subseteq X\Rightarrow f(\overline{A})\subseteq\overline{f(A)}$.

Demonstraţie. *i) $\Rightarrow$ iv)*: $\forall A\subseteq X,\forall y\in f(\overline{A}),\exists x\in\overline{A}$ astfel ca $f(x)=y$. Deoarece $x\in\overline{A},\exists (x_n)_n\subset A, x_n\to x$. Întrucât f este continuă pe X, $f(x_n)\to f(x)$. Prin urmare, $\exists (f(x_n))_n\subset f(A)$ aşa încât $f(x_n)\to f(x)=y\in\overline{f(A)}$.

iv) $\Longrightarrow$ iii): $\forall F_{\hat{\imath}nchis\breve{a}}\subseteq Y$, fie $A=f^{-1}(F)$. Avem $f(\overline{f^{-1}(F)})\subseteq\overline{f(f^{-1}(F))}\subseteq\overline{F}=F$, deci $(\overline{f^{-1}(F)})\subseteq f^{-1}(F)$, adică, echivalent, $f^{-1}(F)$ este închisă.

iii) $\Rightarrow$ ii): $\forall D\in\tau_Y, Y\backslash D$ este închisă în Y, deci din ipoteză $f^{-1}(Y\backslash D)=f^{-1}(Y)\backslash f^{-1}(D)=X\backslash f^{-1}(D)$ este închisă în X, deci $f^{-1}(D)$ este deschisă în X.

ii) $\Longrightarrow$ i): Fie $x_0\in X$ oarecare, fixat. Arătăm că f este continuă în x_0 folosind definiţia cu sfere. Fie deci $S_Y(f(x_0),\varepsilon)$ oarecare. Deoarece $S_Y(f(x_0),\varepsilon)$

este deschisă în X, conform cu ii), $f^{-1}(S_Y(f(x_0),\varepsilon))$ este deschisă în X. Întrucât $x_0 \in f^{-1}(S_Y(f(x_0),\varepsilon))$, există $S_X(x_0,\delta) \subset f^{-1}(S_Y(f(x_0),\varepsilon))$, de unde $f(S_X(x_0,\delta)) \subset S_Y(f(x_0),\varepsilon)$, ceea ce arată că f este continuă în x_0.

Principiul contracţiei

Definiţie. O funcţie $f : (X,d) \to (X,d)$ este *contracţie* dacă $\exists \lambda \in (0,1)$ (numită *constanta contracţiei*) astfel ca

$$d(f(x),f(y)) \le \lambda d(x,y), \forall x,y \in X$$

(cu alte cuvinte, prin aplicarea unei contracţii unei perechi de puncte, distanţa dintre ele se contractă).

Definiţie. O funcţie $f : (X,d_1) \to (Y,d_2)$ se numeşte *lipschitziană pe X* dacă $\exists L > 0$ astfel încât $d_2(f(x),f(y)) \le L d_1(x,y), \forall x,y \in X$.

Observaţie. Orice contracţie este evident funcţie lipschitziană.

Exemple. i) $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}_+, f(x) = ||x||$ (norma euclidiană), $\forall x \in \mathbb{R}^p$ este lipschitziană pe $\mathbb{R}^p$ (de constantă Lipschitz $L = 1$) datorită inegalităţii $|||x|| - ||y||| \le ||x-y||, \forall x,y \in \mathbb{R}^p$, care implică $|f(x) - f(y)| \le ||x-y||, \forall x,y \in \mathbb{R}^p$.

ii) în $\mathbb{R}$, orice funcţie derivabilă cu derivata mărginită pe un interval este lipschitziană pe intervalul respectiv (afirmaţia rezultă imediat în baza Teoremei lui Lagrange).

Propoziţie. Orice funcţie lipschitziană $f : (X,d_1) \to (Y,d_2)$ este continuă pe X (deci orice contracţie este lipschitziană).

Demonstraţie. Evident, $\forall a \in X$ arbitrar, fixat, f este continuă în $a : \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{L} > 0$ astfel încât $\forall x \in X$, cu $d_1(x,a) < \delta$, avem $d_2(f(x),f(a)) \le L d_1(x,a) < L\frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon$.

Definiţie. Dacă (X,d) este un spaţiu metric şi $f : (X,d) \to (X,d)$, un element $x^* \in X$ se numeşte *punct fix* al lui f dacă $f(x^*) = x^*$.

Teorema lui Banach de punct fix *(principiul contracţiei) (teoremă de existenţă şi unicitate). Fie (X,d) un spaţiu metric complet şi $f : (X,d) \to (X,d)$ o contracţie. Atunci f admite un unic punct fix.*

Demonstraţie. I. *Existenţa punctului fix.*

Întrucât f este contracţie, există $\lambda \in (0,1)$ astfel ca $d(f(x),f(y)) \le \lambda d(x,y), \forall x,y \in X$. Fie $x_0 \in X$ oarecare şi considerăm $x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1) = (f \circ f)(x_0), ..., x_n = f(x_{n-1}), ...$

$(x_n)_n$ este şir Cauchy:

$d(x_1,x_2) = d(f(x_0),f(x_1)) \le \lambda d(x_0,x_1)$,

$d(x_2,x_3) = d(f(x_1), f(x_2)) \leq \lambda d(x_1,x_2) \leq \lambda^2 d(x_0,x_1), ...,$
$d(x_n, x_{n+1}) \leq \lambda^n d(x_0,x_1), \forall n \in \mathbb{N}^*$, de unde, $\forall n, p \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}(*)\ d(x_n, x_{n+p}) &\leq d(x_n,x_{n+1}) + d(x_{n+1},x_{n+2}) + ... + d(x_{n+p-1},x_{n+p}) \leq \\ &\leq d(x_0,x_1)(\lambda^n + \lambda^{n+1} + ... + \lambda^{n+p-1}) = d(x_0,x_1)\lambda^n \frac{1-\lambda^p}{1-\lambda} \leq \\ &\leq d(x_0,x_1)\lambda^n \frac{1}{1-\lambda}.\end{aligned}$$

i) Dacă $d(x_0,x_1) = 0$, atunci $x_1 = f(x_0) = x_0$, deci x_0 este punct fix.

ii) Dacă $d(x_0,x_1) > 0$, cum $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda^n = 0$, din $(*)$ rezultă că $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel ca, $\forall n \geq n_0, \forall p \in \mathbb{N}^*$, $d(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon$, adică $(x_n)_n$ este şir Cauchy şi deci convergent în spaţiul metric complet (X,d).

Vom arăta că $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ este punct fix. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, avem:

$$\begin{aligned}d(x, f(x)) &\leq d(x,x_n) + d(x_n, f(x)) = d(x,x_n) + d(f(x_{n-1}), f(x)) \leq \\ &\leq d(x,x_n) + \lambda d(x, x_{n-1})\end{aligned}$$

şi, cum $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,x) = 0$, rezultă că $d(x,f(x)) = 0$, deci $f(x) = x$.

II. *Unicitatea punctului fix.*

Dacă ar exista $x \neq y$ puncte fixe în X, atunci am avea $d(f(x), f(y)) = d(x,y) \leq \lambda d(x,y) < d(x,y)$, fals.

Exemplu. $(l^2, +, \cdot)$ este spaţiu Banach, cu metrica $d(x,y) = \sqrt{\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_n - y_n)^2}, \forall x = (x_n)_n, y = (y_n)_n \in l^2$. Funcţia $f : l^2 \to l^2, f(x) = (\frac{x_n}{2})_n, \forall x = (x_n)_n \in l^2$, este o contracţie a lui l^2 în el însuşi şi are unicul punct fix, şirul nul $0 = (0) \in l^2$.

Homeomorfisme, izometrii

Definiţie. $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ se numeşte *homeomorfism* (*izomorfism topologic*) dacă f este bijectivă şi *bicontinuă* (f, f^{-1} sunt continue).

Dacă există un homeomorfism între două spaţii metrice, acestea se vor numi *homeomorfe*.

Observaţie. i) Dacă f este homeomorfism, atunci f^{-1} este de asemenea homeomorfism.

ii) Compunerea a două homeomorfisme este de asemenea homeomorfism.

Definiţie. $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ se numeşte *izometrie* dacă f este bijectivă şi

$$(*)\ d_2(f(x_1), f(x_2)) = d_1(x_1,x_2), \forall x_1, x_2 \in X$$

(conservă distanţele).

Două spaţii metrice se numesc *izometrice* dacă există o izometrie între ele.

Observaţie. i) Din condiţia $(*)$ rezultă că f este injectivă, deci în definiţia anterioară este suficient ca f să fie surjectivă.

ii) Dacă f este izometrie, atunci şi f^{-1} este izometrie.

Exemple. i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -x, \forall x \in \mathbb{R}$ este izometrie.

ii) $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k,\ f(x) = x + a, \forall x \in \mathbb{R}^k$ ($a \in \mathbb{R}^k$ fixat) (translaţia) este izometrie, deoarece f este bijectivă şi $||(x_1+a)-(x_2+a)|| = ||x_1-x_2||, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^k$ ($||\cdot||$ este norma euclidiană).

iii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3$ este homeomorfism.

Probleme propuse.

I. 1. Cercetaţi limitele iterate şi limita globală în $(0,0)$ pentru:

i) $f(x,y) = x \sin \frac{1}{y}, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(x,y); y = 0\}$.

ii) $f(x,y) = (x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}, \forall (x,y) \in \{(x,y); x \neq 0, y \neq 0\}$.

iii) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0). \end{cases}$

2. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2+\sin(x^3+y^5)}{x^2+y^4}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Arătaţi că deşi f are limite iterate în $(0,0)$, nu are limită în $(0,0)$ în ansamblul variabilelor.

3. Cercetaţi existenţa limitei în $(0,0)$ pentru funcţia $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2, f(x,y) = (\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin \frac{1}{x^2+y^2}, \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \cos \frac{1}{x^2+y^2}), \forall (x,y) \neq (0,0)$.

4. Calculaţi $\lim\limits_{x \to 0} f(x), f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^3, f(x) = (\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}, (\frac{a^x+b^x}{2})^{\frac{1}{x}}, \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x} - \sqrt[n]{1+\beta x}}{x})$, $a, b \in \mathbb{R}_+ \backslash \{1\}, \alpha, \beta > 0, m, n \in \mathbb{N}^*, m, n \geq 2$.

5. Studiaţi continuitatea pe mulţimea de definiţie a funcţiilor următoare:

i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 \sin y}{x^2+y^2}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0) \end{cases}$;

ii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} \frac{x \ln(1+y^2)}{x^2+y^2}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0) \end{cases}$;

iii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} \frac{x \ln(1+y^2) - x \sin y}{\sqrt{x^2+y^2}}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0) \end{cases}$;

iv) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{x \sin x + y \sin y + z \sin z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0, (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$.

II. 1. Fie $f, g : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ două aplicaţii continue. Arătaţi că mulţimea $A = \{x \in X; f(x) = g(x)\}$ este închisă.

2. Fie $f, g : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ două funcţii continue şi $A \subset X$ o mulţime densă în X. Arătaţi că dacă $f(x) = g(x), \forall x \in A$, atunci $f(x) = g(x), \forall x \in X$.

3. Arătaţi că dacă (X, d) este un spaţiu metric, atunci funcţia $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ este continuă pe X.

4. Fie (X, d_1) un spaţiu metric complet şi $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ o funcţie continuă. Arătaţi că dacă $(F_n)_n \subset X$ este un şir descendent de mulţimi închise, nevide, cu şirul diametrelor $(\delta(F_n))_n$ convergent la 0, atunci $f(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} f(F_n)$.

5. Fie $f, g : (X, d_1) \to (\mathbb{R}, d_u)$ două aplicaţii continue. Arătaţi că mulţimea $A = \{x \in X; f(x) < g(x)\}$ este deschisă, iar mulţimea $B = \{x \in X; f(x) \geq g(x)\}$ este închisă.

6. Fie $f : (X, d) \to (\mathbb{R}, d_u)$ o aplicaţie continuă. Arătaţi că mulţimea $A = \{x \in X; f(x) < 0\}$ este deschisă, iar mulţimea $B = \{x \in X; f(x) = 0\}$ este închisă.

7. Fie $f : (X, d) \to (\mathbb{R}, d_u)$. Arătaţi că dacă pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}$, mulţimile $\{x \in X; f(x) > \lambda\}$ şi $\{x \in X; f(x) < \lambda\}$ sunt deschise, atunci f este continuă pe X.

8. Fie (X, d) un spaţiu metric şi $x_0 \in X$ fixat. Dacă $0 < r < s$, atunci mulţimea $M = \{x \in X; r < d(x, x_0) < s\}$ este deschisă.

9. Fie (X, d) un spaţiu metric şi $A \subset X$. Definim funcţia $f_A(x) = d(x, A)(= \inf\limits_{y \in A} d(x, y)), \forall x \in X$ (distanţa de la punctul x la mulţimea A). Arătaţi că:

i) f_A este continuă pe X;

ii) Dacă $A, B \subset X$ sunt închise şi disjuncte, atunci mulţimile $D_A = \{x \in X; d(x, A) < d(x, B)\}$ şi $D_A = \{x \in X; d(x, A) > d(x, B)\}$ sunt deschise, disjuncte, $A \subset D_A, B \subset D_B$ (această proprietate de a separa mulţimile închise disjuncte prin mulţimi deschise disjuncte se numeşte *proprietate de normalitate* (*orice spaţiu metric este spaţiu normal*).

10. Fie $A \subset (X, d), A \neq \emptyset$,
$S(A, r) = \{x \in X; d(x, A) < r\}, T(A, r) = \{x \in X; d(x, A) \leq r\}, r > 0$.
Arătaţi că $S(A, r)$ este deschisă, iar $T(A, r)$ este închisă.

11. Precizaţi dacă funcţiile următoare sunt contracţii:

i) $(\mathbb{R}, d), d(x, y) = |x - y|, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{5} arctg x$;

ii) $(\mathbb{R}_+, d), d(x, y) = |x - y|, f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, f(x) = \sqrt{x + 1}$;

iii) $([\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}], d), d(x, y) = |x - y|, f : [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}] \to [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}], f(x) = \sqrt{\sin x}$;

iv) $([1, 9], d), d(x, y) = |x - y|, f : [1, 9] \to [1, 9], f(x) = 1 + \sqrt[3]{x + 2}$.