Teoremă. *Orice izometrie* $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ *este un homeomorfism* $(Y = f(X))$.

Demonstraţie. f este continuă pe X: $\forall x_0 \in X, \forall S_Y(f(x_0), \varepsilon), \exists S_X(x_0, \varepsilon)$ aşa ca $f(S_X(x_0, \varepsilon)) = S_Y(f(x_0), \varepsilon)$:

$$\begin{aligned} y &= f(x) \in S_Y(f(x_0), \varepsilon) \Leftrightarrow d_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \Leftrightarrow \\ d_1(x, x_0) &< \varepsilon \Leftrightarrow x \in S_X(x_0, \varepsilon) \Leftrightarrow y = f(x) \in f(S_X(x_0, \varepsilon)). \end{aligned}$$

$f^{-1} : f(X) \to X$ este continuă pe $f(X)$: $\forall y_0 = f(x_0) \in f(X), \forall S_X(f^{-1}(y_0), \varepsilon), \exists S_Y(f(x_0), \varepsilon)$ aşa ca $f^{-1}(S_Y(f(x_0), \varepsilon)) = S_X(x_0, \varepsilon)$:

$$\begin{aligned} x &\in S_X(x_0, \varepsilon) \Leftrightarrow d_1(x, x_0) < \varepsilon \Leftrightarrow d_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \Leftrightarrow \\ f(x) &\in S_Y(f(x_0), \varepsilon) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(S_Y(f(x_0), \varepsilon)). \end{aligned}$$

Observaţie. i) Reciproca nu este adevărată: $f : (\mathbb{R}, d_u) \to ((-1, 1), d_u), f(x) = \frac{x}{1+|x|}, \forall x \in \mathbb{R}$ este homeomorfism al lui $(\mathbb{R}, d_u)$ pe $((-1, 1), d_u)$, dar nu este izometrie: $\exists x, y \in \mathbb{R}$ astfel ca $|f(x) - f(y)| \neq |x - y|$.

ii) Funcţia limitativă a lui Baire $f : (\overline{\mathbb{R}}, \overline{d}) \to ([-1, 1], d_u), f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+|x|}, x \in \mathbb{R} \\ 1, x = \infty \\ -1, x = -\infty \end{cases}$ este o izometrie între $(\overline{\mathbb{R}}, \overline{d})$ şi $([-1, 1], d_u)$, unde $\overline{d}(x, y) = |f(x) - f(y)|, \forall x, y \in \overline{\mathbb{R}}$ (deci $(\overline{\mathbb{R}}, \overline{d})$ poate fi identificat cu $([-1, 1], d_u)$).

Compararea topologiilor

Definiţie. Fie $X, d_1, d_2, \tau_{d_1}, \tau_{d_2}$. Spunem că *topologia* τ_{d_1} este *mai puţin fină decât topologia* τ_{d_2} (sau τ_{d_2} este *mai fină decât* τ_{d_1}) dacă $\tau_{d_1} \subseteq \tau_{d_2}$. Notăm aceasta prin $\tau_{d_1} \preccurlyeq \tau_{d_2}$.

Observaţie. Relaţia de fineţe pe mulţimea topologiilor induse de metrici pe un spaţiu X este o relaţie de ordine parţială deoarece este definită cu ajutorul incluziunii între clase de mulţimi.

Exemplu. Fie $\mathbb{R}, d_u, d_0$. Atunci $\tau_{d_u} \preccurlyeq \tau_{d_0}$ (deoarece $\tau_{d_u} \subseteq \tau_{d_0} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$). Prin urmare, topologia discretă este cea mai fină topologie care se poate introduce pe un spaţiu.

Teoremă. X, d_1, d_2. *Atunci* $\tau_{d_1} \preccurlyeq \tau_{d_2} \Leftrightarrow$ *aplicaţia identică* $i : (X, d_2) \to (X, d_1)$ *este continuă pe* X.

Demonstraţie. $i : (X, d_2) \to (X, d_1)$ este continuă pe $X \Leftrightarrow \forall D \in \tau_{d_1} \Rightarrow i^{-1}(D) = D \in \tau_{d_2} \Leftrightarrow \tau_{d_1} \subseteq \tau_{d_2} \Leftrightarrow \tau_{d_1} \preccurlyeq \tau_{d_2}$.

Definiţie. Spunem că două *metrici* d_1, d_2 definite pe un acelaşi spaţiu sunt *echivalente* dacă induc aceeaşi topologie ($\tau_{d_1} = \tau_{d_2}$).

Observaţie. $\tau_{d_1} = \tau_{d_2} \Leftrightarrow \tau_{d_1} \preccurlyeq \tau_{d_2}$ şi $\tau_{d_2} \preccurlyeq \tau_{d_1} \Leftrightarrow$ aplicaţia identică $i : (X, d_2) \to (X, d_1)$ este bicontinuă $\Leftrightarrow i : (X, d_2) \to (X, d_1)$ este homeomorfism.

Teoremă. *Fie X, d_1, d_2. i) Dacă există $m, M > 0$ astfel ca*

$$(*)\ md_1(x,y) \le d_2(x,y) \le Md_1(x,y), \forall x, y \in X,$$

atunci metricile d_1 şi d_2 sunt echivalente ($\tau_{d_1} = \tau_{d_2}$).

ii) Mai mult, dacă d_1 şi d_2 provin din norme, atunci $\tau_{d_1} = \tau_{d_2}$ dacă şi numai dacă are loc $(*)$.

Exemplu. Fie $X = \mathbb{R}^k$ şi distanţele următoare pe $\mathbb{R}^k$ definite pentru $\forall x, y \in \mathbb{R}^k$ prin $d_1(x,y) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{k}(x_i - y_i)^2}$, $d_2(x,y) = \max\limits_{i=\overline{1,k}}|x_i - y_i|$, $d_3(x,y) = \sum\limits_{i=1}^{k}|x_i - y_i|$. Vom arăta că aceste trei metrici sunt echivalente, deci induc aceeaşi topologie (topologia uzuală) pe $\mathbb{R}^k$. Într-adevăr,

$$\begin{aligned} d_2(x,y) &= \max_{i=\overline{1,k}}|x_i - y_i| \le d_1(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{k}(x_i - y_i)^2} \le \\ &\le \sqrt{k \max_{i=\overline{1,k}}(x_i - y_i)^2} = \sqrt{k}\max_{i=\overline{1,k}}|x_i - y_i| = \sqrt{k}d_2(x,y), \end{aligned}$$

deci $d_2(x,y) \le d_1(x,y) \le \sqrt{k}d_2(x,y), \forall x, y \in \mathbb{R}^k$, de unde $\tau_{d_1} = \tau_{d_2}$.

Apoi,

$$d_2(x,y) = \max_{i=\overline{1,k}}|x_i - y_i| \le d_3(x,y) = \sum_{i=1}^{k}|x_i - y_i| \le k\max_{i=\overline{1,k}}|x_i - y_i| = kd_2(x,y),$$

$\forall x, y \in \mathbb{R}^k$, de unde $\tau_{d_2} = \tau_{d_3}$.

Funcţii uniform continue.

Definiţie. O funcţie $f : A \subset (X, d_1) \to (Y, d_2)$ se numeşte *uniform continuă pe A* dacă pentru $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât $\forall x, y \in A$, cu $d_1(x,y) < \delta$, avem $d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Observaţie. f este continuă pe mulţimea $A \subset X$ dacă f este continuă în orice punct din A :

$\forall x_0 \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ astfel încât $\forall x \in A$, cu $d_1(x, x_0) < \delta$, avem $d_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.

Observăm astfel că proprietatea de uniformă continuitate înseamnă îndeplinirea proprietăţii de continuitate cu acelaşi δ pentru toate punctele mulţimii. Dacă δ depinde efectiv de trecerea de la un punct la altul, atunci f nu este uniform continuă.

Folosind definiţia, se poate arăta imediat:

Teoremă. (caracterizare cu şiruri a uniformei continuităţi) *O funcţie* $f : A \subseteq (X, d_1) \to (Y, d_2)$ *este uniform continuă pe* A *dacă şi numai dacă* $\forall (x_n)_n, (y_n)_n \subset A$, *cu* $d_1(x_n, y_n) \underset{n\to\infty}{\to} 0$, *avem* $d_2(f(x_n), f(y_n)) \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Observaţie. Orice funcţie uniform continuă pe o mulţime este evident continuă pe acea mulţime. Reciproca nu este în general adevărată. De exemplu, funcţia $f : (0, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}, \forall x \in (0, 1]$, este continuă, dar nu este uniform continuă pe $(0, 1]$.

Propoziţie. Orice funcţie lipschitziană $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ este uniform continuă pe X.

Demonstraţie. Deoarece f este lipschitziană pe X, $\exists L > 0$ astfel încât $d_2(f(x), f(y)) \leq L d_1(x, y), \forall x, y \in X$. Prin urmare, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{L} > 0$ astfel încât $\forall x, y \in X$, cu $d_1(x, y) < \delta$, avem $d_2(f(x), f(y)) \leq L d_1(x, y) < L\frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon$, ceea ce înseamnă că f este uniform continuă pe X.

Reciproca nu este în general adevărată. De exemplu, funcţia $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, f(x) = \sqrt{x}, \forall x \in \mathbb{R}_+$ este uniform continuă, dar nu este lipschitziană pe $\mathbb{R}_+$.

Teoremă (caracterizarea pe componente a funcţiilor vectoriale cu norma euclidiană) Fie $f : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q, f = (f_1, f_2, ..., f_q)$. *Atunci* f *este uniform continuă pe* A *dacă şi numai dacă toate funcţiile de coordonate* f_i, $i = \overline{1, q}$ *sunt uniform continue pe* A.

Demonstraţie. *Necesitatea.* Dacă f este uniform continuă pe A, atunci $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât $\forall x, y \in A$, cu $||x - y|| < \delta$, avem $||f(x) - f(y)|| < \varepsilon$, de unde, cu atât mai mult, $\forall i = \overline{1, q}, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât $\forall x, y \in A$, cu $||x - y|| < \delta$, avem $|f_i(x) - f_i(y)| \leq ||f(x) - f(y)|| < \varepsilon$, deci toate funcţiile de coordonate f_i, $i = \overline{1, q}$ sunt uniform continue pe A.

Suficienţa. Dacă toate funcţiile de coordonate f_i, $i = \overline{1, q}$ sunt uniform continue pe A, atunci, $\forall i = \overline{1, q}, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_i(\varepsilon) > 0$ astfel încât $\forall x, y \in A$, cu $||x - y|| < \delta_i$, avem $|f_i(x) - f_i(y)| < \frac{\varepsilon}{q}$.

Prin urmare, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \min\limits_{i=\overline{1,q}} \delta_i > 0$ astfel ca $\forall x, y \in A$, cu $||x - y|| < \delta$, avem $||f(x) - f(y)|| \leq \sum\limits_{i=1}^{q} |f_i(x) - f_i(y)| < \frac{\varepsilon}{q} \cdot q = \varepsilon$, ceea ce arată că f este uniform continuă pe A.

Observaţie. Analog se obţine:

Teoremă. Fie $f : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q, f = (f_1, f_2, ..., f_q)$. Atunci f este lipschitziană pe A dacă şi numai dacă toate funcţiile de coordonate f_i, $i = \overline{1, q}$ sunt lipschitziene pe A.

Aplicaţii liniare.

Vom prezenta în cele ce urmează o clasă importantă de aplicaţii continue.

Definiţie. O funcţie $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ se numeşte *aplicaţie liniară (*sau *operator liniar)* dacă:

$$\begin{cases} i)\ T(x+y) = T(x) + T(y), \forall x, y \in \mathbb{R}^k \text{ (aditivitatea)}, \\ ii)\ T(\lambda x) = \lambda T(x), \forall x \in \mathbb{R}^k, \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ (omogenitatea)}. \end{cases}$$

Propoziţie. Dacă $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l, T = (T_1, T_2, ..., T_l)$ este un operator liniar, atunci:

i) $T(0) = 0$;

ii) $T(x - y) = T(x) - T(y), \forall x, y \in \mathbb{R}^k$;

iii) $\forall j = \overline{1, l}$, funcţiile de coordonate $T_j : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ sunt aplicaţii liniare.

Demonstraţie. i) Din definiţie, $T(0) = T(0) + T(0)$, deci $T(0) = 0$.

ii) $\forall x \in \mathbb{R}^k, T(0) = T(x) + T(-x)$, de unde $T(x) = -T(-x)$. Prin urmare, $T(x - y) = T(x) - T(y), \forall x, y \in \mathbb{R}^k$.

iii) Afirmaţia se verifică imediat pe componente.

Observaţie. Fie $(e_1, e_2, ..., e_k)$ baza canonică a lui $\mathbb{R}^k$, iar $(f_1, f_2, ..., f_l)$ baza canonică a lui $\mathbb{R}^l$.

Dacă $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l, T = (T_1, T_2, ..., T_l)$ este un operator liniar, atunci, $\forall x = (x_1, x_2, ..., x_k) \in \mathbb{R}^k$, $T(x) = T(\sum\limits_{i=1}^{k} x_i e_i) = \sum\limits_{i=1}^{k} x_i T(e_i)$.

$\forall i = \overline{1, k}, T(e_i) \in \mathbb{R}^l$, deci $T(e_i) = \sum\limits_{j=1}^{l} a_{ij} f_j$.

Prin urmare, $T(x) = \sum\limits_{i=1}^{k} (\sum\limits_{j=1}^{l} a_i^j x_i f_j) = \sum\limits_{j=1}^{l} (\sum\limits_{i=1}^{k} a_{ij} x_i) f_j$.

Calcule matriciale ne permit să obţinem că operatorul liniar T are forma

$$\begin{aligned} T(x) &= A_T x, \forall x \in \mathbb{R}^k, \text{ unde matricea} \\ A_T &= \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ ...a_{1k} \\ a_{21}\ a_{22}\ ...a_{2k} \\ ... \\ a_{l1}\ a_{l2}\ ...a_{lk} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{l,k}(\mathbb{R}) \text{ se numeşte } \textit{matricea asociată aplicaţiei liniare } T. \end{aligned}$$

Reciproc, orice aplicaţie $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$, $T(x) = Ax, \forall x \in \mathbb{R}^k$, cu $A \in \mathcal{M}_{l,k}(\mathbb{R})$, este un operator liniar.

Prin urmare, o aplicaţie $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ este operator liniar dacă şi numai dacă $T(x) = Ax, \forall x \in \mathbb{R}^k$, cu $A \in \mathcal{M}_{l,k}(\mathbb{R})$.

Exemplu. Aplicaţiile liniare $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ sunt de forma $T(x) =$
$= (\underbrace{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1k}x_k}_{T_1(x)}, \underbrace{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2k}x_k}_{T_2(x)}, ..., \underbrace{a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + ... + a_{lk}x_k}_{T_l(x)}),$
$\forall x = (x_1, x_2, ..., x_k) \in \mathbb{R}^k$.

Aplicaţiile liniare $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ sunt de forma $T(x) = a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_kx_k, \forall x = (x_1, x_2, ..., x_k) \in \mathbb{R}^k$.

Aplicaţiile liniare $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt de forma $T(x) = ax, \forall x \in \mathbb{R}$, cu $a \in \mathbb{R}$ fixat.

Propoziţie. (Operaţii cu aplicaţii liniare)
1) Dacă $T, S : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ sunt aplicaţii liniare, atunci:
i) $T + S$ este aplicaţie liniară şi $A_{T+S} = A_T + A_S$;
ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda T$ este aplicaţie liniară şi $A_{\lambda T} = \lambda A_T$;
2) Dacă $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l, S : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^m$ sunt aplicaţii liniare, atunci $S \circ T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ este aplicaţie liniară şi $A_{S \circ T} = A_S \cdot A_T$.

Propoziţie. Orice aplicaţie liniară $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ este lipschitziană (deci uniform continuă şi deci continuă).

Demonstraţie. $\forall x \in \mathbb{R}^k, ||T(x)|| = ||\sum\limits_{i=1}^{k} x_i T(e_i)|| \leq \sum\limits_{i=1}^{k} ||T(e_i)|| \cdot |x_i| \leq$

$\leq \underbrace{\sum_{i=1}^{k} ||T(e_i)||}_{=L} \cdot ||x|| = L \cdot ||x||$, deci, $\forall x, y \in \mathbb{R}^k, ||T(x) - T(y)|| = ||T(x-y)|| \leq$
$L \cdot ||x - y||$.

Mulţimi compacte.

Definiţie. i) Un spaţiu metric (X, d) se numeşte *compact* dacă din orice acoperire a sa cu deschişi: $X = \bigcup\limits_{i \in I} D_i, D_i \in \tau_d, \forall i \in I$, se poate extrage o subacoperire finită: $X = \bigcup\limits_{j=1}^{p} D_{i_j}, \{i_1, ..., i_p\} \subset I$.

ii) O mulţime $A \subset (X, d)$ se numeşte *compactă* dacă privită ca subspaţiu $((A, d_{/A \times A}))$, este compact.

Propoziţie. Orice submulţime finită a unui spaţiu metric este compactă.

Demonstraţie. Dacă $A = \{x_1, ..., x_k\} \subseteq \bigcup\limits_{i \in I} D_i, \ , D_i \in \tau_d, \forall i \in I$, atunci $\forall j = \overline{1, k}, \exists i_j \in I$ astfel ca $x_j \in D_{i_j}$, deci familia $\{D_{i_j}\}_{j=\overline{1,k}}$ este o subacoperire finită a lui A.

Teoremă. *Orice submulţime compactă a unui spaţiu metric este mărginită şi închisă.*

Observaţie. În $\mathbb{R}^k$ cu metrica euclidiană are loc şi reciproca, deci o mulţime este compactă dacă şi numai dacă este mărginită şi închisă. În spaţii metrice obişnuite, reciproca nu are loc: În $\mathbb{R}$ înzestrat cu metrica discretă: $\delta(\mathbb{R}) = 1 < \infty$, deci $\mathbb{R}$ este mărginită, este şi închisă, dar nu este compactă. Întradevăr, dacă am presupune prin reducere la absurd că este compactă, cum $\mathbb{R} = \bigcup_{x\in\mathbb{R}}\{x\} = \bigcup_{x\in\mathbb{R}} S(x,1)$, ar rezulta că $\mathbb{R} = \bigcup_{i=1}^{p} S(x_i,1) = \bigcup_{i=1}^{p}\{x_i\}$, fals.

Teoremă. *Orice submulţime închisă a unui spaţiu metric compact este compactă.*

Demonstraţie. Fie $A \subset (X,d)$, A închisă, X compact. Dacă $A \subseteq \bigcup_{i\in I} D_i$, $D_i \in \tau_d, \forall i \in I$, întrucât $cA \in \tau_d$, rezultă că din $X = (\bigcup_{i\in I} D_i) \cup cA$, obţinem $X = (\bigcup_{j=1}^{p} D_{i_j}) \cup cA$, de unde $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{p} D_{i_j}$, ceea ce înseamnă că mulţimea A este compactă.

Consecinţă. Într-un spaţiu metric compact, mulţimile închise coincid cu mulţimile compacte (la fel cum, într-un spaţiu metric complet, mulţimile închise coincid cu cele complete).

Teoremă. *Fie (X,d) un spaţiu metric. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

i) (X,d) este compact;

ii) $\forall \mathcal{F} = \{F_i\}_{i\in I}$ o familie de mulţimi închise cu proprietatea intersecţiei finite (adică orice intersecţie finită de mulţimi din F este nevidă), avem $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$.

Mulţimi secvenţial compacte (compacte prin şiruri)

Definiţie. Spunem că:

i) un spaţiu metric (X,d) este *secvenţial compact (compact prin şiruri)* dacă orice şir de puncte din X conţine un subşir convergent la un punct din X.

ii) o mulţime $A \subset (X,d)$ este *secvenţial compactă (compactă prin şiruri)* dacă privită ca subspaţiu este secvenţial compact.

Teoremă. *O mulţime A dintr-un spaţiu metric (X,d) este compactă dacă şi numai dacă este secvenţial compactă.*

Teoremă. *Dacă (X,d_1) şi (Y,d_2) sunt spaţii metrice compacte, atunci spaţiul metric produs $(Z = X \times Y, d), d(z_1,z_2) = \sqrt{d_1^2(x_1,x_2) + d_2^2(y_1,y_2)}, z_1 = (x_1,y_1), z_2 = (x_2,y_2) \in X \times Y$, este compact.*

Demonstraţie. Vom arăta, echivalent, că $(X \times Y, d)$ este secvenţial compact. Fie deci $(z_n)_n \subset X \times Y, z_n = (x_n, y_n), x_n \in X, y_n \in Y, \forall n$. Deoarece (X, d_1) este compact iar $(x_n)_n \subset X, \exists x_{n_k} \to x \in X$. Întrucât (Y, d_2) este compact iar $(y_{n_k})_k \subset Y, \exists y_{n_{k_l}} \to y \in Y$. Prin urmare, $\exists (z_{n_{k_l}})_l \subset X \times Y, z_{n_{k_l}} = (x_{n_{k_l}}, y_{n_{k_l}}) \overset{X \times Y}{\to} (x, y) = z$.

Observaţie. Rezultatul anterior are loc pentru un produs cartezian finit de k spaţii metrice compacte.

Consecinţă. Orice interval închis din $\mathbb{R}^k$ $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times ... \times [a_k, b_k]$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}, a_i < b_i, \forall i = \overline{1, k}$ este mulţime compactă.

Probleme propuse.

I. 1. Fie $f : (0, \frac{1}{3}] \to (0, \frac{1}{3}], f(x) = x^2$. Arătaţi că f este o contracţie, dar f nu are nici un punct fix în spaţiul metric $((0, \frac{1}{3}], d_u)$. Explicaţi rezultatul.

2. Fie $(A = [0, \infty), d_u), f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Arătaţi că f este o contracţie pe A şi aflaţi punctul său fix.

3. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x, y) = (x - y, x + y), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.
a) Arătaţi că funcţia f este lipschitziană pe $\mathbb{R}^2$.
b) Determinaţi imaginea prin f a cercului $\mathcal{C}((0, 0), 1)$.

4. Cercetaţi dacă funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = \sin \sqrt{x^2 + y^2}$ este lipschitziană pe $\mathbb{R}^2$.

5. Arătaţi că funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ următoare sunt lipschitziene pe $\mathbb{R}$:
a) $f(x) = \sin x$; b) $f(x) = \cos x$; c) $f(x) = arctgx$.

6. Studiaţi uniforma continuitate a funcţiilor următoare:
i) $f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$;
ii) $f(x) = \ln x, x \in (0, \infty)$;
iii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = 2(x + y) - \sin x + \cos y$;
iv) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (3x, y - x)$.

II. 1. Arătaţi că în $(\mathbb{R}, d_u)$, subspaţiile $(0, 1)$ şi $[0, 1]$ nu sunt homeomorfe.

2. Arătaţi că $(\mathbb{R}, d_0)$ nu este homeomorf cu $(\mathbb{R}, d_u)$.

3. Arătaţi că orice funcţie uniform continuă $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ transformă şiruri Cauchy tot în şiruri Cauchy.

4. Fie $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ un homeomorfism al lui X pe Y. Arătaţi că dacă (Y, d_2) este complet şi f este uniform continuă pe X, atunci (X, d_1) este complet.

5. Arătaţi că dacă $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ şi $g : (Y, d_2) \to (Z, d_3)$ sunt uniform continue, atunci $g \circ f : (X, d_1) \to (Z, d_3)$ este uniform continuă.

6. Arătaţi că orice funcţie definită pe un spaţiu metric discret cu valori într-un spaţiu metric oarecare este uniform continuă.

7. Arătaţi că dacă (X, d_1) este spaţiu metric complet, iar $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ este izometrie, atunci şi (Y, d_2) este complet.

8. Fie $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ o aplicaţie bijectivă. Arătaţi că f este homeomorfism dacă şi numai dacă $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}, \forall A \subset X$.