Proprietăţi ale funcţiilor continue pe mulţimi compacte.

I. Invarianţa compactităţii.

Teoremă. *Imaginea printr-o funcţie continuă* $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ *a unei mulţimi compacte* $K \subset X$ *este de asemenea mulţime compactă* (altfel spus, *funcţiile continue duc (transformă) mulţimi compacte în mulţimi compacte*).

Demonstraţie. Dacă $f(K) \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} D_i, (D_i)_{i\in I} \subset \tau_{d_2}$, atunci $K \subseteq f^{-1}(f(K)) \subseteq f^{-1}(\bigcup\limits_{i\in I} D_i) = \bigcup\limits_{i\in I} f^{-1}(D_i)$.

Deoarece f este continuă pe K, iar $D_i \in \tau_{d_2}, \forall i \in I$, atunci $f^{-1}(D_i) \in \tau_{d_1}, \forall i \in I$.

K fiind compactă, $\exists \{D_{i_j}\}_{j=\overline{1,p}}$ aşa ca $K \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{p} f^{-1}(D_{i_j})$. Prin urmare, $f(K) \subseteq f(\bigcup\limits_{j=1}^{p} f^{-1}(D_{i_j})) = \bigcup\limits_{j=1}^{p} f(f^{-1}(D_{i_j})) \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{p} D_{i_j}$, deci $f(K) \subset Y$ este mulţime compactă.

Observaţie. În $\mathbb{R}^k$ cu metrica euclidiană, o mulţime este compactă dacă şi numai dacă este mărginită şi închisă. Dacă mulţimea K este doar mărginită sau doar închisă, atunci $f(K)$ poate să nu fie mărginită sau închisă:

i) Fie $f : (0, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$.

f este continuă pe mulţimea mărginită $(0, 1]$, dar $f((0, 1]) = [1, \infty)$ nu este mărginită;

ii) Fie $f : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), f(x) = arctgx$.

f este continuă pe mulţimea închisă $\mathbb{R}$, dar $f(\mathbb{R}) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ este mulţime deschisă.

Propoziţie. $(\overline{\mathbb{R}}, \overline{\tau_0})$ este spaţiu compact.

Demonstraţie. Funcţia limitativă a lui Baire $f : (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\tau_0}) \to ([-1, 1], \tau_u)$ este izometrie, deci $f^{-1} : ([-1, 1], \tau_u) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\tau_0})$ este de asemenea izometrie şi deci continuă. Deoarece $([-1, 1], \tau_u)$ este compact, rezultă că $(\overline{\mathbb{R}}, \overline{\tau_0})$ este compact.

Teoremă. *Dacă* (X, d_1) *este compact, iar* $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ *este continuă şi bijectivă, atunci este un homeomorfism.*

Demonstraţie. Trebuie să arătăm că $f^{-1} : (Y, d_2) \to (X, d_1)$ este continuă. Într-adevăr, $\forall F \subset X$ închisă, deoarece X este compact, rezultă că F este compactă, şi cum f este continuă, obţinem că $f(F) = (f^{-1})^{-1}(F)$ este compactă, deci închisă în Y.

II. Proprietăţi de mărginire.

Teoremă. *Orice funcţie* $f : K \subset (X, d_1) \to (Y, d_2)$ *continuă pe mulţimea compactă* K *este mărginită pe* K.

Demonstraţie. Conform teoremei precedente, $f(K) \subset (Y, d_2)$ este mulţime compactă, deci mărginită, ceea ce înseamnă că f este mărginită pe K.

Teorema lui Weierstrass. *Orice funcţie $f : K \subset (X, d) \to \mathbb{R}$ continuă pe mulţimea compactă K este mărginită şi îşi atinge marginile pe K.*

Demonstraţie. Conform teoremei anterioare, $f(K)$ este mărginită, deci $\exists M = \sup\limits_{x \in K} f(x) \in \mathbb{R}$ şi $\exists m = \inf\limits_{x \in K} f(x) \in \mathbb{R}$. În plus, $m, M \in \overline{f(K)}$ şi cum mulţimea $f(K)$ este compactă, deci şi închisă, rezultă că $m, M \in f(K)$. Prin urmare, $\exists x_m, x_M \in K$ astfel încât $m = f(x_m)$ şi $M = f(x_M)$, adică, f îşi atinge marginile pe K.

Teorema lui Cantor. *Orice funcţie $f : K \subset (X, d_1) \to (Y, d_2)$ continuă pe mulţimea compactă K este uniform continuă pe K.*

Demonstraţie. Presupunem prin reducere la absurd că $\exists \varepsilon_0 > 0$ astfel încât $\forall \delta > 0, \exists x_\delta, y_\delta \in K$, cu $d_1(x_\delta, y_\delta) < \delta$, dar $d_2(f(x_\delta), f(y_\delta)) \geq \varepsilon_0$. În particular, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*, \exists (x_n)_n, (y_n)_n \subset K$, cu $d_1(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ şi $d_2(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon_0$ $(*)$.

Deoarece $(x_n)_n \subset K$ şi mulţimea K este compactă, există un subşir $(x_{n_k})_k$ al lui $(x_n)_n$ astfel încât $x_{n_k} \to x_0 \in K$. Prin urmare, $\forall n, k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} d_1(y_{n_k}, x_0) &\leq d_1(y_{n_k}, x_{n_k}) + d_1(x_{n_k}, x_0) < \frac{1}{n_k} + \\ + d_1(x_{n_k}, x_0) &\leq \frac{1}{k} + d_1(x_{n_k}, x_0) \underset{k \to \infty}{\to} 0, \end{aligned}$$

de unde rezultă că $y_{n_k} \to x_0$. Funcţia f fiind continuă, $f(y_{n_k}) \to f(x_0)$ şi $f(x_{n_k}) \to f(x_0)$.

În relaţia $(*)$, rezultă în particular că $d_2(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \geq \varepsilon_0, \forall k \in \mathbb{N}^*$. Trecând la limită şi folosind continuitatea funcţiei distanţă, obţinem că $0 = d_2(f(x_0), f(x_0)) \geq \varepsilon_0 > 0$, contradicţie.

Teoremă. *Dacă $A \subset \mathbb{R}$ este mărginită şi $f : A \to \mathbb{R}$ este continuă pe A atunci f este uniform continuă pe A dacă şi numai dacă poate fi prelungită prin continuitate la $\overline{A}$.*

Exemple. i) $f : (-1, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = \sin x^2$ este uniform continuă pe $(-1, 1]$;
ii) $f : (0, \frac{2}{\pi}] \to \mathbb{R}, f(x) = \sin \frac{1}{x}$, nu este uniform continuă pe $(0, \frac{2}{\pi}]$.

Definiţie. O mulţime $A \subset (X, d)$ este *relativ compactă* dacă $\overline{A}$ este compactă.

Exemplu. $[0, 1), (0, 1), (0, 1]$ sunt relativ compacte.

Teoremă. *Dacă* $A \subset (X, d_1)$ *este relativ compactă,* $f : A \to (Y, d_2)$ *este continuă pe* A *şi* (Y, d_2) *este complet, atunci* f *este uniform continuă pe* A *dacă şi numai dacă poate fi prelungită prin continuitate la* $\overline{A}$.

Mulţimi conexe.

Definiţie. Un *spaţiu metric* (X, d) este:

i) *conex* dacă $\nexists D_1, D_2$ mulţimi deschise, nevide şi disjuncte astfel ca $X = D_1 \cup D_2$.

ii) *neconex* sau *disconex* dacă nu este conex.

Teoremă. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

i) (X, d) *este spaţiu metric conex;*

ii) $\nexists F_1, F_2$ *mulţimi închise, nevide şi disjuncte astfel ca* $X = F_1 \cup F_2$*;*

iii) Singura mulţime nevidă din X *simultan deschisă şi închisă este* X.

Demonstraţie. Afirmaţiile sunt imediate întrucât $cD_2 = D_1, cD_1 = D_2$, deci mulţimile D_1, D_2 sunt şi închise.

Definiţie. $A \subset (X, d)$ este *mulţime*:

i) *conexă* dacă privită ca subspaţiu al lui X este conex, adică, $\nexists D_1, D_2$ mulţimi nevide deschise în X astfel încât $D_1 \cap A \neq \emptyset, D_2 \cap A \neq \emptyset, A \subseteq D_1 \cup D_2, D_1 \cap D_2 \cap A = \emptyset$.

ii) *neconexă* sau *disconexă* dacă nu este conexă.

Intuitiv, o mulţime conexă este o mulţime "formată dintr-o singură bucată". De exemplu, o mulţime formată din două puncte diferite sau din două mulţimi deschise disjuncte nu este conexă:

Exemple. i) Presupunem că există $a, b \in X, a \neq b$. Atunci mulţimea $A = \{a, b\}$ nu este conexă, deoarece $\exists D_1 = c\{a\}, D_2 = c\{b\}$ mulţimi nevide deschise în X astfel ca $D_1 \cap A \neq \emptyset, D_2 \cap A \neq \emptyset, A \subseteq D_1 \cup D_2, D_1 \cap D_2 \cap A = \emptyset$.

ii) Fie $A = (-1, 0) \cup (1, 2) \subset X = \mathbb{R}$. Atunci A este neconexă deoarece $\exists D_1 = (-1, 0), D_2 = (1, 2)$ mulţimi nevide deschise în $\mathbb{R}$ astfel ca $D_1 \cap A = (-1, 0) \neq \emptyset, D_2 \cap A = (1, 2) \neq \emptyset, A = D_1 \cup D_2, D_1 \cap D_2 \cap A = \emptyset$.

Teoremă. *Dacă* $(A_i)_{i \in I}$ *este o familie oarecare de mulţimi conexe din* (X, d)*, cu* $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$*, atunci* $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ *este de asemenea conexă.*

Demonstraţie. Deoarece $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset, \exists a \in A_i, \forall i \in I$, deci $a \in A$.

Presupunem prin reducere la absurd că A este neconexă, deci $\exists D_1, D_2$ mulţimi nevide deschise în X astfel încât $D_1 \cap A \neq \emptyset, D_2 \cap A \neq \emptyset, A \subseteq D_1 \cup D_2, D_1 \cap D_2 \cap A = \emptyset$.

Deoarece $a \in A \subseteq D_1 \cup D_2$, presupunem pentru a face o alegere că $a \in D_1$.

Pe de alta parte, întrucât $D_2 \cap A = \bigcup\limits_{i \in I} (D_2 \cap A_i) \neq \emptyset, \exists i_0 \in I$ aşa ca $D_2 \cap A_{i_0} \neq \emptyset$.

În acelaşi timp, observăm că $a \in D_1 \cap A_{i_0}$, deci $D_1 \cap A_{i_0} \neq \emptyset$.

De asemenea, $D_1 \cap D_2 \cap A_{i_0} = \emptyset$ şi $A_{i_0} \subseteq D_1 \cup D_2$, de unde A_{i_0} este neconexă, fals.

Teoremă. *Dacă $A \subset (X, d)$ este conexă, atunci $\forall B$, cu $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$ este conexă (deci în particular, $\overline{A}$ este conexă).*

Demonstraţie. Presupunem prin reducere la absurd că $\exists B$ neconexă astfel ca $A \subset B \subset \overline{A}$ (din ipoteză, A fiind mulţime conexă).

Atunci $\exists D_1, D_2$ mulţimi nevide deschise în X astfel încât $D_1 \cap B \neq \emptyset, D_2 \cap B \neq \emptyset, B \subseteq D_1 \cup D_2, D_1 \cap D_2 \cap B = \emptyset$.

Deoarece $D_1 \cap B \neq \emptyset, \exists b_1 \in D_1 \cap B$ şi similar, deoarece $D_2 \cap B \neq \emptyset, \exists b_2 \in D_2 \cap B$.

Întrucât $B \subset \overline{A}$, rezultă că $b_1, b_2 \in \overline{A}$, deci $D_1 \cap A \neq \emptyset$ şi $D_2 \cap A \neq \emptyset$.

Pe de altă parte, obţinem evident că $D_1 \cap D_2 \cap A = \emptyset$ şi $A \subseteq D_1 \cup D_2$, deci A este neconexă, fals.

Funcţii continue pe mulţimi conexe.

Teoremă. (invarianţa conexiunii) *Dacă $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ este funcţie continuă pe X, iar A este mulţime conexă în (X, d_1), atunci $f(A)$ este de asemenea conexă în (Y, d_2) (orice funcţie continuă duce (transformă) mulţimi conexe dintr-un spaţiu metric tot în mulţimi conexe).*

Demonstraţie. Presupunem prin reducere la absurd că $f(A)$ este neconexă, deci $\exists D_1, D_2$ mulţimi nevide deschise în Y astfel încât $D_1 \cap f(A) \neq \emptyset, D_2 \cap f(A) \neq \emptyset, f(A) \subseteq D_1 \cup D_2, D_1 \cap D_2 \cap f(A) = \emptyset$.

Deoarece f este continuă pe X, rezultă că mulţimile nevide $\widetilde{D_1} = f^{-1}(D_1)$ şi $\widetilde{D_2} = f^{-1}(D_2)$ sunt deschise în X. Mai mult, $\widetilde{D_1} \cap A \neq \emptyset, \widetilde{D_2} \cap A \neq \emptyset$,

$A \subseteq f^{-1}(f(A)) \subseteq f^{-1}(D_1 \cup D_2) = \widetilde{D_1} \cup \widetilde{D_2}, \widetilde{D_1} \cap \widetilde{D_2} \cap A = f^{-1}(D_1 \cap D_2) \cap A = \emptyset$, deci A este neconexă, fals.

Definiţie. Spunem că o funcţie $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ are *proprietatea lui Darboux* pe X dacă transformă orice mulţime conexă din X într-o mulţime conexă din Y.

Consecinţă. Orice funcţie continuă $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ are proprietatea lui Darboux pe X.

Propoziţie. O mulţime nevidă $A \subset (\mathbb{R}, d_u)$ este conexă dacă şi numai dacă este interval.

Probleme propuse.

1. Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aplicaţii continue pe $\mathbb{R}$ şi fie $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, h(x,y) = (f(x), g(y)), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Arătaţi că funcţia h este continuă pe $\mathbb{R}^2$.

2. Arătaţi că mulţimea $K = \{(x,y); (x^2+y^2)^2 = 2(x^2-y^2)\} \subset \mathbb{R}^2$ este compactă.

3. Fie mulţimea $A = \{(x,y); x^2+y^2 \leq 4, y \geq x+1\}$ şi fie funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} \frac{x\sin y + y \sin x}{\sqrt{x^2+y^2}}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0). \end{cases}$ Arătaţi că:

a) Mulţimea A este compactă.
b) Funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}^2$.
c) Este f uniform continuă pe A?
d) Este mulţimea $f(A)$ compactă?

4. Arătaţi că funcţiile următoare sunt uniform continue pe domeniul de definiţie:

i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0) \end{cases}$;
ii) $f : (1,2) \times (1,2) \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \frac{x}{y}$.

5. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = (y,x), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Arătaţi că funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}^2$.

6. Fie (X, d_0) (d_0 fiind metrica discretă). Arătaţi că A este compactă dacă şi numai dacă este finită.

7. Cercetaţi dacă un spaţiu liniar normat $X \neq \{0\}$ poate fi compact.

5. Arătaţi că dacă $(x_n)_n \subset (X,d)$, $x_n \to x$, atunci mulţimea termenilor şirului poate să nu fie compactă, dar mulţimea $A = \{x_n\} \cup \{x\}$ este întotdeauna compactă.

6. Fie A, B două submulţimi nevide ale unui spaţiu normat X. Fie suma lor $A + B = \{a+b; a \in A, b \in B\}$. Arătaţi că:

i) Dacă A şi B sunt închise şi cel puţin una din ele este compactă, atunci $A+B$ este închisă. Suma a două mulţimi închise este în general mulţime închisă?
ii) Dacă A şi B sunt compacte, atunci $A+B$ este compactă.

7. Arătaţi că o reuniune infinită de mulţimi compacte nu este neapărat compactă.

8. Studiaţi uniforma continuitate a funcţiilor următoare:

i) $f(x) = \begin{cases} \frac{x \ln x}{x^2-1} - \frac{1}{12}, x \in (0,1) \\ 2tgxarctg\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}, x \in [-\frac{\pi}{12}, 0) \end{cases}$;
ii) $f(x) = \begin{cases} (\frac{\cos x}{\cos 2x})^{\frac{1}{9x^2}}, x \in [-\frac{\pi}{12}, 0) \\ (1 + 3tg^2\sqrt{x})^{\frac{1}{2x}}, x \in (0, \frac{\pi}{12}]. \end{cases}$

9. Arătaţi că funcţia de tip Dirichlet $f : [0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x, x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ -x, x \in [0,1] \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

este uniform continuă pe $[0,1]\cap\mathbb{Q}$ şi $[0,1]\cap\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, dar nu este uniform continuă pe $[0,1]$.

10. Cercetaţi dacă compunerea a două funcţii lipschtziene este de asemenea funcţie lipschitziană.

11. Arătaţi că mulţimea $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;(x,y)=(arctgt,\ln(1+t^2)),t\in[-1,1]\}$ este compactă şi conexă.

12. Indicaţi o mulţime neconexă pentru care aderenţa este conexă.

13. Arătaţi că mulţimea $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;x^2+y^2<4,y\neq x+1\}$ nu este conexă.

14. Fie A,B două submulţimi nevide ale unui spaţiu normat X. Fie suma lor $A+B=\{a+b;a\in A,b\in B\}$. Arătaţi că:

i) Dacă A şi B sunt închise şi cel puţin una din ele este compactă, atunci $A+B$ este închisă. Suma a două mulţimi închise este în general mulţime închisă?

ii) Dacă A şi B sunt compacte, atunci $A+B$ este compactă.

15. Arătaţi că dacă (X,d) este un spaţiu metric compact, iar $f:(X,d)\to(0,\infty)$ este o aplicaţie continuă, atunci $\exists\lambda>0$ astfel ca $f(x)\geq\lambda,\forall x\in X$.

16. Arătaţi că funcţia distanţă de la un punct la o mulţime dintr-un spaţiu metric (X,d) este uniform continuă pe X.

17. Fie $f,g:(X,d_1)\to(Y,d_2)$ două funcţii continue, (X,d_1) fiind spaţiu metric compact. Arătaţi că multimea $A=\{x\in X;f(x)=g(x)\}$ este compactă.

18. Fie $A\subset(X,d)$ o mulţime compactă, nevidă şi $\delta(A)$, diametrul sau. Arătaţi că $\exists x_0,y_0\in A$ astfel ca $\delta(A)=d(x_0,y_0)$.