**Propoziţie**. O mulţime nevidă $A$ din $\mathbb{R}$ este conexă dacă şi numai dacă este interval.

**Demonstraţie**. *Necesitatea*. Presupunem prin reducere la absurd că există în $\mathbb{R}$ o mulţime conexă $A$, care nu este interval.

O mulţime $I$ din $\mathbb{R}$ este interval dacă $\forall a, b \in I$, cu $a < b$ şi $\forall c$, cu $a < c < b$, rezultă că $c \in I$ (adică, $\forall a, b \in I$, cu $a < b \Rightarrow [a, b] \subseteq I$).

Prin urmare, întrucât $A$ nu este interval, $\exists a, b \in A, \exists c$, cu $a < c < b$ dar $c \notin A$. Fie $D_1 = A \cap (-\infty, c), D_2 = A \cap (c, +\infty)$. Observăm că $a \in D_1, b \in D_2$, deci mulţimile sunt nevide. În plus, sunt deschise în $A$, $D_1 \cup D_2 = A$ şi $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, deci $A$ este neconexă, fals.

*Suficienţa*. Presupunem prin reducere la absurd că există un interval $I$ care nu este mulţime conexă. Atunci $\exists D_1, D_2$ mulţimi nevide deschise (şi închise) în $I$, disjuncte astfel încât $I = D_1 \cup D_2$. Fie $a \in D_1, b \in D_2$. Cum $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, rezultă că $a \neq b$. Presupunem că $a < b$ şi cum $I$ este interval, vom avea $[a, b] \subseteq I$.

Fie $c = \sup(D_1 \cap [a, b])(\in \overline{D_1 \cap [a, b]} \subseteq \overline{D_1} \cap \overline{[a, b]} = D_1 \cap [a, b])$. Arătăm că $c \neq b$. Într-adevăr, dacă $c = b$, atunci $b \in D_1 \cap D_2$, fals. Prin urmare, $c \in D_1 \cap [a, b)$, deci $\exists \varepsilon > 0$ astfel ca $c + \varepsilon \in D_1 \cap [a, b) \subset D_1 \cap [a, b]$, fals, întrucât $c$ este supremum.

**Consecinţă.** O funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are proprietatea lui Darboux dacă şi numai dacă duce intervale în intervale.

**Consecinţă** (teorema valorilor intermediare). Dacă $f : (X, d_1) \to (\mathbb{R}, d_u)$ este funcţie continuă pe $X$, iar $A \subset (X, d)$ este mulţime conexă, atunci $f(A)$ este interval (adică $\forall a, b \in A$, *cu* $f(a) < f(b)$ şi $\forall \lambda \in (f(a), f(b))$, rezultă că $\lambda \in f(A)$, adică $\exists c \in A$, cu $f(c) = \lambda$) sau, echivalent, $\forall a, b \in A$, cu $f(a) < f(b) \Rightarrow (f(a), f(b)) \subseteq f(A))$.

Regăsim astfel,

**Consecinţă.** Dacă $f : I_{\text{interval}} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este continuă pe $I$, atunci are proprietatea lui Darboux pe $I$, adică $\forall a, b \in I$, cu $f(a) < f(b)$ şi $\forall \lambda \in (f(a), f(b))$, $\exists c \in I$, cu $f(c) = \lambda$.

Reciproca nu este adevărată. Există funcţii care au proprietatea lui Darboux pe un interval, dar nu sunt continue pe intervalul respectiv: $f : [0, 1] \to [-1, 1], f(x) = \begin{cases} \sin \frac{\pi}{x}, x \in (0, 1] \\ 1, x = 0. \end{cases}$

**Spaţii metrice/mulţimi conexe prin arce.**

**Definiţie**. i) Un spaţiu metric $(X, d)$ se numeşte *conex prin arce* dacă orice două elemente ale sale pot fi unite în mod continuu printr-un drum (arc) conţinut în $X$, adică,

$\forall x_1, x_2 \in X$, $\exists \varphi : [a, b] \subset \mathbb{R} \to X$ continuă pe $[a, b]$ astfel încât $\varphi(a) = x_1, \varphi(b) = x_2$ şi $\varphi(t) \in X, \forall t \in [a, b]$.

ii) O mulţime $A \subset (X, d)$ este *conexă prin arce* dacă privită ca subspaţiu este conex prin arce.

**Propoziţie**. Orice spaţiu metric conex prin arce $(X, d)$ este conex.

**Demonstraţie**. Fie $x_0 \in X$ oarecare, fixat. Deoarece $(X, d)$ este conex prin arce, $\forall x \in X, \exists \varphi : [a, b] \subset \mathbb{R} \to X$ continuă pe $[a, b]$ astfel încât $\varphi(a) = x_0, \varphi(b) = x$ şi $\varphi(t) \in X, \forall t \in [a, b]$. Notăm $\varphi([a, b]) = A_x$, care este de asemenea mulţime conexă.

Prin urmare, $X = \bigcup\limits_{x \in X} A_x$ este conexă ($\forall x \in X, x_0 \in A_x$, deci $\bigcap\limits_{x \in X} A_x \neq \emptyset$).

Reciproca nu este adevărată. Există mulţimi conexe care nu sunt conexe prin arce.

**Teoremă** *(invarianţa conexiunii/conectivităţii prin arce). Imaginea printr-o funcţie continuă a unei mulţimi conexe prin arce este de asemenea o mulţime conexă prin arce (*altfel spus, *funcţiile continue duc mulţimi conexe prin arce în mulţimi conexe prin arce*).

**Demonstraţie**. Fie $f : A \subset (X, d_1) \to (Y, d_2)$ continuă pe mulţimea conexă prin arce $A$. Vom arăta că $f(A)$ este de asemenea conexă prin arce. Pentru aceasta, fie $y_1, y_2 \in f(A)$ oarecare. Există $x_1, x_2 \in A$ astfel încât $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$.

Deoarece $x_1, x_2 \in A$, iar $A$ este conexă prin arce, $\exists \varphi : [a, b] \subset \mathbb{R} \to A$ continuă pe $[a, b]$ astfel încât $\varphi(a) = x_1, \varphi(b) = x_2$ şi $\varphi(t) \in A, \forall t \in [a, b]$.

Observăm că funcţia $f \circ \varphi : [a, b] \subset \mathbb{R} \to f(A)$ este continuă pe $[a, b], (f \circ \varphi)(a) = f(\varphi(a)) = f(x_1) = y_1, (f \circ \varphi)(b) = f(\varphi(b)) = f(x_2) = y_2$ şi $(f \circ \varphi)(t) = f(\varphi(t)) = f(x) \in f(A), \forall t \in [a, b]$, ceea ce înseamnă că $f(A)$ este conexă prin arce.

**Problematica convexităţii/conectivităţii în** $(\mathbb{R}^k, \tau_u)$

**Definiţie**. O mulţime $A \subset \mathbb{R}^k$ se numeşte *convexă* dacă orice două elemente din mulţimea $A$ pot fi unite în mod continuu printr-un *segment închis* conţinut în $A$ :

$$\forall x_1, x_2 \in A \Rightarrow [x_1, x_2] \subseteq A,$$

unde $[x_1, x_2] = \{x \in \mathbb{R}^k; x = (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2, \lambda \in [0, 1] (\subset \mathbb{R})\}$.

**Observaţie**. i) Evident, orice mulţime convexă este conexă prin arce (deci şi conexă). Există însă mulţimi conexe prin arce care nu sunt convexe, cum ar fi, de exemplu, cercurile din $\mathbb{R}^2$.

ii) Orice segment din $\mathbb{R}^k$ şi, în particular, orice interval din $\mathbb{R}$ este mulţime convexă.

**Propoziţie**. Orice sferă deschisă (sau închisă) din $\mathbb{R}^k$ este mulţime convexă.

**Demonstraţie**. Fie $x_0 \in \mathbb{R}^k$, $S(x_0, r)$ şi $a, b \in S(x_0, r)$, oarecare. Arătăm că $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}^k; x = \lambda a + (1-\lambda)b, \lambda \in [0, 1]\} \subset S(x_0, r)$. Fie deci $y \in [a, b]$ oarecare. Atunci

$$\begin{aligned} ||y - x_0|| &= ||\lambda a + (1-\lambda)b - x_0|| = ||\lambda a + (1-\lambda)b - [\lambda + (1-\lambda)x_0]|| \leq \\ &\leq \lambda||a - x_0|| + (1-\lambda)||b - x_0|| < \lambda r + (1-\lambda)r = r, \end{aligned}$$

deci $y \in S(x_0, r)$.

**Propoziţie**. Orice paralelipiped (interval) închis $P = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times ... \times [a_k, b_k]$ din $\mathbb{R}^k$ este mulţime convexă.

**Demonstraţie**. Fie $x = (x_1, ..., x_k), y = (y_1, ..., y_k) \in P$, oarecare. Prin urmare, $a_i \leq x_i \leq b_i$ şi $a_i \leq y_i \leq b_i$, $\forall i = \overline{1, k}$.

Arătăm că $[x, y] \subseteq P$, adică, $\forall \lambda \in [0, 1], \lambda x + (1-\lambda)y \in P$, ceea ce revine la a arăta că $a_i \leq \lambda x_i + (1-\lambda)y_i \leq b_i, \forall i = \overline{1, k}$. Într-adevăr, afirmaţia este imediată întrucât $\lambda a_i \leq \lambda x_i \leq \lambda b_i$ şi $(1-\lambda)a_i \leq (1-\lambda)y_i \leq (1-\lambda)b_i, \forall i = \overline{1, k}$.

**Observaţie**. Imaginea printr-o funcţie continuă a unei mulţimi convexe poate să nu fie convexă, după cum se remarcă din următorul contraexemplu:

Funcţia continuă $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2, f(t) = (\cos t, \sin t), \forall t \in [0, \pi]$ duce mulţimea convexă $[0, \pi]$ într-un semicerc, care nu este mulţime convexă.

**Teoremă**. *Orice submulţime nevidă, deschisă $D$ a lui $\mathbb{R}^k$ este conexă dacă şi numai dacă este conexă prin arce.*

**Mulţimi precompacte**. **Mulţimi relativ compacte.**

**Definiţie**. O mulţime $A \subset (X, d)$ este *precompactă* (sau, *total mărginită*) dacă $\forall \varepsilon > 0, \exists \{S(x_i, \varepsilon)\}_{i=\overline{1,p}}, x_i \in A$ astfel ca $A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{p} S(x_i, \varepsilon)$.

**Observaţie**. Orice submulţime a unei mulţimi precompacte este de asemenea precompactă.

**Exemplu**. Mulţimea termenilor unui şir Cauchy este mulţime precompactă. Într-adevăr, dacă $A = \{x_1, ..., x_n, ...\}$, deoarece $(x_n)_n$ este şir Cauchy, atunci $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ aşa ca $\forall n \geq n_0$, avem $d(x_n, x_{n_0}) < \varepsilon$, deci $\{x_{n_0}, ..., x_n, ...\} \subseteq S(x_{n_0}, \varepsilon)$. Prin urmare, $A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n_0} S(x_i, \varepsilon)$.

**Teoremă**. *Orice mulţime total mărginită este mărginită.*

**Demonstraţie**. Fie $A \subset (X,d)$ total mărginită. Atunci pentru $\varepsilon = 1$, $A \subset \bigcup_{i=1}^{p} S(x_i, 1)$. Prin urmare, $\forall x, y \in A$, rezultă că $\exists i_1, i_2 = \overline{1,p}$ astfel ca $x \in S(x_{i_1}, 1)$ şi $y \in S(x_{i_2}, 1)$, deci $d(x,y) < 2 + d(x_{i_1}, x_{i_2})$, ceea ce implică $\delta(A) \leq 2 + \delta(M)$, unde $M = \{x_1, x_2, ..., x_p\}$. Deoarece mulţimea $M = \{x_1, ..., x_p\}$ este mărginită, obţinem că $\delta(A) < \infty$, adică $A$ este mărginită.

**Teoremă** (*Hausdorff*) *O mulţime $A$ dintr-un spaţiu metric $(X,d)$ este compactă dacă şi numai dacă este precompactă şi completă.*

**Demonstraţie**. *Necesitatea.* Fie $A \subset (X,d)$ compactă. Deoarece $A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \subset \bigcup_{x \in A} S(x, \varepsilon)$, rezultă că $A \subset \bigcup_{i=1}^{p} S(x_i, \varepsilon)$, deci $A$ este precompactă.

Fie acum un şir Cauchy $(x_n)_n \subset A$. Deoarece $A$ este compactă, $\exists x_{n_k} \to x \in A$ şi în final rezultă că $x_n \to x$, deci $A$ este completă.

**Teoremă**. *O mulţime $A$ dintr-un spaţiu metric $(X,d)$ este precompactă dacă şi numai dacă orice şir din $A$ conţine un subşir Cauchy.*

**Teoremă**. *Dacă $A \subset (X,d)$ este relativ compactă, atunci este precompactă.*

**Demonstraţie**. Deoarece $A$ este relativ compactă, atunci $\overline{A}$ este compactă, deci şi precompactă, de unde $A \subseteq \overline{A}$ este de asemenea precompactă.

**Problematica în $\mathbb{R}^k$**

**Teoremă**. *Fie $A \subset \mathbb{R}^k$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*
*i) $A$ este compactă;*
*ii) $A$ este secvenţial compactă;*
*iii) $A$ este mărginită şi închisă.*

**Teoremă**. *Fie $A \subset \mathbb{R}^k$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*
*i) $A$ este precompactă;*
*ii) $A$ este relativ compactă;*
*iii) $A$ este mărginită.*

**Demonstraţie**. ii) $\Rightarrow$ iii): Dacă $A$ este relativ compactă, atunci $\overline{A}$ este compactă, deci mărginită. Cum $A \subseteq \overline{A}$, rezultă că şi $A$ este mărginită.

iii) $\Rightarrow$ ii): Deoarece $A$ este mărginită, avem $\delta(A) = \delta(\overline{A}) < \infty$, deci $\overline{A}$ este mărginită. Fiind şi închisă, $\overline{A}$ este compactă, adică $A$ este relativ compactă.

**Spaţiul $\mathcal{C}(K)$.**

**Definiţie**. Fie un spaţiu metric $(X,d)$. Spunem că o familie $\mathcal{F} = \{f : X \to \mathbb{R}\}$ este:

i) *echicontinuă în* $x_0 \in X$ dacă $\forall \varepsilon > 0, \exists V_\varepsilon(x_0) \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel ca $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, $\forall x \in V_\varepsilon, \forall f \in \mathcal{F}$.

ii) *echicontinuă pe* $X$ dacă este echicontinuă în orice punct din $X$.

**Observaţie**. Dacă familia $\mathcal{F}$ este echicontinuă în $x_0 \in X$, atunci toate funcţiile $f \in \mathcal{F}$ sunt continue în $x_0$ iar vecinătatea $V_\varepsilon$ (care corespunde fiecărui $\varepsilon > 0$) este aceeaşi pentru toate funcţiile familiei.

Fie $\mathcal{C}(K) = \{f : K \to \mathbb{R},\ f$ continuă pe $K\}$, mulţimea tuturor funcţiilor continue cu valori reale, definite pe un spaţiu metric compact $K$. Conform Teoremei lui Weierstrass, orice funcţie $f \in \mathcal{C}(K)$ este mărginită, deci aplicaţia $|| \cdot || : \mathcal{C}(K) \to \mathbb{R}_+, ||f|| = \sup\limits_{x \in K} |f(x)|, \forall f \in \mathcal{C}(K)$ este bine definita. Mai mult, este o normă, numită *norma Cebâşev,* sau *norma convergenţei uniforme* şi care induce distanţa $d(f,g) = \sup\limits_{x \in K} |f(x) - g(x)|, \forall f, g \in \mathcal{C}(K)$.

**Teoremă**. *i) Un şir* $(f_n)_n \subset \mathcal{C}(K)$ *converge în metrica* $d$ *la un element* $f \in \mathcal{C}(K)$ *dacă şi numai dacă* $(f_n)_n$ *converge uniform pe* $K$ *la* $f$.

*ii)* $\mathcal{C}(K)$ *este spaţiu Banach.*

**Teorema lui Arzelà-Ascoli.** *Fie un spaţiu metric compact* $K$. *O familie de funcţii* $M \subset \mathcal{C}(K)$ *este relativ compactă în* $\mathcal{C}(K)$ *dacă şi numai dacă este mărginită în* $\mathcal{C}(K)$ *şi echicontinuă pe* $K$.

## CALCUL DIFERENŢIAL PENTRU FUNCŢII DE MAI MULTE VARIABILE REALE

În acest capitol, vom studia două extinderi la $\mathbb{R}^n$ ale noţiunii de derivată a unei funcţii reale de o variabilă reală, şi anume, noţiunea de diferenţială (sau derivată Fréchet) pe de o parte, şi noţiunea de derivată după o direcţie (sau derivată Gâteaux) pe de altă parte.

### Derivata parţială a unei funcţii într-un punct.

Fie $D \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă, $f : D \to \mathbb{R}$şi $a = (a_1, ..., a_n) \in D$. Există $S(a, r) \subset D$.

$\forall i = \overline{1, n}$ fixat, considerăm funcţia $(*)$ $x_i \to f(a_1, a_2, ..., a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, ..., a_n)$, care este bine definită pentru $\forall x_i$, $0 \leq |x_i - a_i| < r$.

**Definiţie**. Spunem că:

i) funcţia $f$ are *derivată parţială în punctul* $a$ *în raport cu variabila* $x_i$ dacă funcţia de o variabilă $(*)$ are derivată în punctul $a$ în sens obişnuit (ca funcţie reală de o variabilă reală):

$\exists \lim\limits_{x_i \to a_i} \frac{f(a_1,a_2,\ldots,a_{i-1},x_i,a_{i+1},\ldots,a_n)-f(a_1,a_2,\ldots,a_{i-1},a_i,a_{i+1},\ldots,a_n)}{x_i-a_i} \overset{\text{not.}}{=} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ (sau $f'_{x_i}(a))(\in \overline{\mathbb{R}})$.

În acest caz, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ se numeşte *derivata parţială a funcţiei $f$ în raport cu variabila $x_i$ în punctul $a$*.

ii) funcţia $f$ este *parţial derivabilă în punctul $a$ în raport cu variabila $x_i$* dacă $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \in \mathbb{R}$.

**Observaţie**. i) Dacă $n = 2$, atunci

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}.$$

ii) Dacă $n = 3$, atunci
$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x,y_0,z_0)-f(x_0,y_0,z_0)}{x-x_0}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = \lim\limits_{y \to y_0} \frac{f(x_0,y,z_0)-f(x_0,y_0,z_0)}{y-y_0}$,
$\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(x_0,y_0,z)-f(x_0,y_0,z_0)}{z-z_0}$.

**Exemplu**. Arătaţi că $f(x, y, z) = \ln(tgx + tgy + tgz)$ verifică relaţia $\sin 2x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \sin 2y \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + \sin 2z \cdot \frac{\partial f}{\partial z} = 2$:
$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{tgx+tgy+tgz} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$ şi, prin simetrie (sau direct) $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{tgx+tgy+tgz} \cdot \frac{1}{\cos^2 y}$, $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{tgx+tgy+tgz} \cdot \frac{1}{\cos^2 z}$, deci $\sin 2x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \sin 2y \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + \sin 2z \cdot \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{tgx+tgy+tgz} \cdot 2(tgx + tgy + tgz) = 2$.

**Probleme propuse**

1. Arătaţi că orice mulţime finită cu cel puţin două elemente din $\mathbb{R}^2$ nu este conexă.

2. Arătaţi că un spaţiu metric $(X, d)$ este conex dacă şi numai dacă pentru orice două mulţimi închise nevide $A, B \subset (X, d), \{x \in X; d(x, A) = d(x, B)\} \neq \emptyset$.

3. Arătaţi că un spaţiu metric $(X, d)$ este conex dacă şi numai dacă orice funcţie continuă $f : X \to \{0, 1\}$ este constantă.

4. Arătaţi că un spaţiu metric $(X, d)$ este conex dacă şi numai dacă orice funcţie continuă $f : X \to \mathbb{R}$ are proprietatea lui Darboux.

5. Arătaţi că dacă $(X, d)$ este un spaţiu metric şi orice funcţie continuă $f : X \to X$ posedă cel puţin un punct fix, atunci $(X, d)$ este conex.

9. Fie $A, B \subset (X, d)$ două mulţimi conexe astfel ca $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$. Arătaţi că $A \cup B$ este conexă.

10. Arătaţi că mulţimea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x - 1)^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x + 1)^2 + y^2 < 1\}$ este conexă.

11. Fie $A, B \subset (X, d)$ două mulţimi închise astfel ca $A \cup B$ şi $A \cap B$ sunt conexe. Arătaţi că $A$ şi $B$ sunt conexe. Arătaţi că ipoteza că $A$ şi $B$ sunt închise este necesară.

12. Arătaţi că un spaţiu metric $(X, d)$ este neconex dacă şi numai dacă există o submulţime proprie, nevidă a lui $X$ care sa fie simultan deschisă şi închisă.

13. Fie mulţimea $A = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 9, y \geq x + 1\}$ şi fie funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \sin y + y \sin x}{\sqrt{x^2+y^2}}, (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

Este mulţimea $f(A)$ conexă?

14. Fie $A \subset (X, d)$. Arătaţi că dacă $A$ este compactă, atunci $A'$ este compactă.

15. Fie $(X, d)$ un spaţiu metric oarecare. Arătaţi că:

i) orice reuniune <u>finită</u> de mulţimi compacte (respectiv, relativ compacte) este compactă (respectiv, relativ compactă);

ii) orice intersecţie de mulţimi compacte (respectiv, relativ compacte) este compactă (respectiv, relativ compactă);

ii) reuniunea dintre o mulţime compactă şi o mulţime finită este mulţime compactă;

iv) diferenţa a două mulţimi relativ compacte este mulţime relativ compactă;

v) interiorul unei mulţimi relativ compacte este mulţime relativ compactă;

vi) frontiera unei mulţimi compacte (respectiv, relativ compactă) este compactă (respectiv, relativ compactă).

16. Arătaţi că dacă $(x_n)_n \subset (X, d)$, $x_n \to x$, atunci mulţimea termenilor şirului poate să nu fie compactă, dar mulţimea $A = \{x_n\} \cup \{x\}$ este întotdeauna compactă.

17. Arătaţi că orice mulţime finită dintr-un spaţiu metric este precompactă.

18. Arătaţi că orice mulţime dintr-un spaţiu metric discret este precompactă dacă şi numai dacă este finită.

19. Arătaţi că mulţimea $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ este precompactă în $(\mathbb{R}, d_u)$, dar nu este compactă.

20. Arătaţi că orice funcţie uniform continuă transformă mulţimi precompacte tot în mulţimi precompacte.

21. Ce condiţie trebuie să îndeplinească o mulţime $A \subset (X, d)$ pentru ca funcţia sa caracteristică $\aleph_A$ sa fie continuă pe $X$?

22. Fie $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă pe intervalul mărginit sau nemărginit $(a, b)$ din $\mathbb{R}$ astfel ca $\exists \lim\limits_{x \to a x > a} f(x) \in \mathbb{R}$ şi $\exists \lim\limits_{x \to a x > a} f(x) \in \mathbb{R}$. Arătaţi că $f$ este uniform continuă pe $(a, b)$.