1. Folosind legătura dintre integralele Riemann şi Lebesgue, calculaţi:
(i) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 e^{-nx^2}dx$;
(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{dx}{(1+\frac{x}{n})^n}$.

Rezolvare. (i) Fie $f_n(x)=e^{-nx^2}, \forall n\in\mathbb{N}, \forall x\in[0,1]$.

Convergenţa punctuală: $\forall x\in[0,1]$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty} e^{-nx^2}=\begin{cases} 0, x\in(0,1] \\ 1, x=0\end{cases}$,
deci $f_n \underset{[0,1]}{\overset{p}{\to}} f$, unde, $\forall x\in[0,1], f(x)=\begin{cases} 0, x\in(0,1] \\ 1, x=0\end{cases}$.

Deoarece $\forall n\in\mathbb{N}, f_n$ este continuă pe $[0,1]$, dar f nu este continuă pe $[0,1]$ (în 0), rezultă că $f_n \underset{[0,1]}{\overset{u}{\not\to}} f$, deci, în calculul lui $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 e^{-nx^2}dx$ nu se poate folosi teorema de transfer de integrabilitate Riemann şi integrare termen cu termen de la şiruri de funcţii.

Pe de altă parte, observăm că nu putem calcula nici direct $\int_0^1 e^{-nx^2}dx$, pentru ca apoi să trecem la limită.

Vom face apel la teoria integralei Lebesgue. Anume, vom folosi:

Teorema convergenţei mărginite. Fie $(f_n)_n, f_n: X\to\overline{\mathbb{R}}, n\in\mathbb{N}$, un şir de funcţii $\mathcal{A}$-măsurabile astfel ca $f_n \underset{X}{\dot{\to}} f$. Dacă $\mu(X)<\infty$ şi există $M>0$ astfel încât $|f_n(x)|\leq M, \forall x\in X, \forall n\in\mathbb{N}$, atunci $f\in\mathcal{L}(X)$ şi $(L)\int_X fd\mu = (L)\lim\limits_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu$.

Deoarece $X=[0,1]$, rezultă că $\mu(X)=1<\infty$.

Evident, $\forall n\in\mathbb{N}, f_n$ este continuă, deci Lebesgue măsurabilă pe $[0,1]$.

În plus, $f_n \underset{[0,1]}{\overset{p}{\to}} f$, deci $f_n \underset{[0,1]}{\dot{\to}} f\equiv 0$ şi $|f_n(x)|=e^{-nx^2}\leq 1, \forall x\in[0,1], \forall n\in\mathbb{N}$.

Prin urmare, conform Teoremei convergenţei mărginite,

$$\lim_{n\to\infty}(L)\int_{[0,1]} f_n d\mu = (L)\int_{[0,1]} fd\mu = (L)\int_{[0,1]} 0d\mu = 0. \tag{1}$$

Pe de altă parte, deoarece $\forall n\in\mathbb{N}, f_n$ este continuă pe $[0,1]$, rezultă că este integrabilă Riemann deci şi integrabilă Lebesgue pe $[0,1]$ şi, mai mult, $\forall n\in\mathbb{N}$,

$$(L)\int_{[0,1]} f_n d\mu = (R)\int_0^1 f_n(x)dx. \tag{2}$$

Prin urmare, din (1) şi (2) obţinem:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 e^{-nx^2}dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}(L)\int_{[0,1]} f_n d\mu = 0.$$

(ii) Procedăm analog. Fie $f_n(x)=\frac{1}{(1+\frac{x}{n})^n}, \forall n\in\mathbb{N}^*, \forall x\in[0,1]$.

Convergenţa punctuală: $\forall x \in [0,1]$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\frac{x}{n})^n} = \frac{1}{e^x}$, deci $f_n \underset{[0,1]}{\overset{p}{\to}} f$, unde $\forall x \in [0,1], f(x) = e^{-x}$. În particular, $f_n \underset{[0,1]}{\overset{\cdot}{\to}} f$

De asemenea, observăm că $\mu([0,1]) = 1 < \infty$ şi $|f_n(x)| = \frac{1}{(1+\frac{x}{n})^n} \leq 1, \forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}^*$.

În plus, întrucât $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n$ este continuă, este şi Lebesgue măsurabilă pe $[0,1]$.

Prin urmare, conform Teoremei convergenţei mărginite,

$$\lim_{n\to\infty} (L)\int_{[0,1]} f_n d\mu = (L)\int_{[0,1]} f d\mu. \tag{3}$$

Observăm că $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n, f$ sunt funcţii continue pe $[0,1]$, deci sunt integrabile Riemann, deci şi integrabile Lebesgue pe $[0,1]$ şi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$(L)\int_{[0,1]} f_n d\mu = (R)\int_0^1 f_n(x)dx, (L)\int_{[0,1]} f d\mu = (R)\int_0^1 f(x)dx. \tag{4}$$

Din (3) şi (4) rezultă că

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{1}{(1+\frac{x}{n})^n}dx &= \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}(L)\int_{[0,1]} f_n d\mu = (L)\int_{[0,1]} f d\mu = (R)\int_0^1 f(x)dx = \\ &= -e^{-x}/_0^1 = 1 - \frac{1}{e}.\end{aligned}$$

2. Studiaţi integrabilitatea Lebesgue a funcţiilor următoare şi în caz afirmativ calculaţi valoarea integralei Lebesgue corespunzătoare:

(i) $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{1+x\sqrt{x^2+1}}, \forall x > 0$;

(ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 0, x \leq 1 \\ \frac{1}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}, x > 1 \end{cases}$;

(iii) $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}, x \in [0,1] \\ \frac{arctgx}{x^2}, x > 1. \end{cases}$

Rezolvare. (i) Observăm că $f > 0$ pe $(0,\infty)$, deci $|f| = f$. Mai mult, $0 < f(x) < 1, \forall x > 0$, deci f este mărginită pe $(0,\infty)$. Fiind continuă pe $(0,\infty)$ este şi măsurabilă Lebesgue pe $(0,\infty)$. De asemenea, tot datorită faptului că este continuă, este integrabilă Riemann pe orice interval compact $[\alpha,\beta] \subset (0,\infty)$.

Prin urmare, $f \in \mathcal{L}((0,\infty))$ dacă şi numai dacă $|f| = f \in \mathcal{R}((0,\infty))$ (f este integrabilă Riemann în sens generalizat pe $(0,\infty)$) şi, în acest caz,

$$(L)\int_{(0,\infty)} f d\mu = (R)\int_0^\infty f(x)dx.$$

$f \in \mathcal{R}((0,\infty))$ dacă şi numai dacă integrala generalizată $\int_0^\infty f(x)dx$ converge, ceea ce este evident, deoarece

$$\int_0^\infty f(x)dx = \int_0^\infty \frac{1}{1+x\sqrt{x^2+1}}dx \sim \int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$$

$(\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+x\sqrt{x^2+1}}}{\frac{1}{x^2}} = 1 \in (0,\infty), \alpha = 2 > 1)$. În consecinţă, $f \in \mathcal{L}((0,\infty))$.

Vom calcula $\int_0^\infty \frac{1}{1+x\sqrt{x^2+1}}dx$ folosind schimbarea de variabilă $\sqrt{x^2+1} = x + t$, ceea ce antrenează, prin ridicare la pătrat în ambii membri, că $x = \frac{1-t^2}{2t}, dx = \frac{-1}{2}(1+\frac{1}{t^2})dt$. În plus, dacă $x = 0$, atunci $t = 1$, iar dacă $x \to \infty$, atunci $t = \sqrt{x^2+1} - x \to 0$.

Prin urmare,

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x\sqrt{x^2+1}}dx = \int_0^1 \frac{\frac{-1}{2}(1+\frac{1}{t^2})}{1+\frac{1-t^2}{2t}\cdot(t+\frac{1-t^2}{2t})}dt.$$

şi se calculează această integrală.

(ii) Observăm că f este mărginită pe $\mathbb{R} : 0 < f(x) < 1, \forall x \in \mathbb{R}$. De asemenea, $\lim_{x\to 1, x<1} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 1, x>1} f(x) = \lim_{x\to 1, x>1} \frac{1}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{3\sqrt{2}}$, deci f este discontinuă în 1. Evident, f este continuă pe $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, deci f este continuă μ-a.p.t. pe $\mathbb{R}$, (deci măsurabilă Lebesgue pe $\mathbb{R}$) şi $f \in \mathcal{R}([\alpha,\beta]), \forall[\alpha,\beta] \subset \mathbb{R}$.

În consecinţă, $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ dacă şi numai dacă $|f| = f \in \mathcal{R}(\mathbb{R})$. Mai mult, în acest caz,

$$(L)\int_{\mathbb{R}} f d\mu = (R)\int_{-\infty}^\infty f(x)dx.$$

Formal,

$$(R)\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = (R)\int_{-\infty}^1 f(x)dx + (R)\int_1^\infty f(x)dx = \int_1^\infty \frac{1}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}dx.$$

Observăm că $\int_1^\infty \frac{1}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}} \sim \int_1^\infty \frac{1}{x^3}(\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}}{\frac{1}{x^3}} = \frac{1}{2} \in (0,\infty))$ şi cum integrala $\int_1^\infty \frac{1}{x^3}$ este convergentă $(\alpha = 3 > 1)$, rezultă că $\int_1^\infty \frac{1}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$ este convergentă, deci $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ şi se calculează valoarea acestei integrale folosind substituţia $\sqrt{x^2+1} = x + t$.

(iii) Evident, $0 < f(x) \leq 1, \forall x \in [0,1]$ şi $0 < f(x) < \frac{\pi}{2}, \forall x \in (1,\infty)$, deci f este mărginită pe $[0,\infty)$ şi $|f| = f$.

Observăm că $\lim_{x\to 1, x<1} \frac{1}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2+\sqrt{2}}$, $\lim_{x\to 1, x>1} \frac{arctgx}{x^2} = \frac{\pi}{4}$, deci f este continuă pe $[0,1) \cup (1,\infty)$, de unde $f \in \mathcal{R}([0,1])$ (schimbând valoarea integralei într-un singur punct, şi anume 1). Astfel, $\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}dx$ este o integrală Riemann proprie.

Pe $(1,\infty)$, $\int_1^\infty \frac{arctgx}{x^2}dx \sim \int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ $(\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{arctgx}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} arctgx = \frac{\pi}{2} \in (0,\infty))$ şi cum $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ este convergentă $(\alpha = 3 > 1)$, rezultă că integrala generalizată

$\int_1^\infty \frac{arctgx}{x^2}dx$ este convergentă, deci $f \in \mathcal{R}((1,\infty))$. În concluzie, $f \in \mathcal{R}((0,\infty))$. Deoarece f este continuă pe $[0,1)\cup(1,\infty)$, rezultă că f este măsurabilă Lebesgue pe $(0,\infty)$.

În consecinţă, $f \in \mathcal{L}((0,\infty))$ şi

$$(L)\int_{(0,\infty)} f\mu = (R)\int_0^\infty f(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}dx + \int_1^\infty \frac{arctgx}{x^2}dx.$$

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{arctgx}{x^2}dx &= -\int_1^\infty arctgx \cdot (\frac{1}{x})'dx = -[arctgx \cdot (\frac{1}{x})/_1^\infty - \int_1^\infty \frac{1}{x(x^2+1)}dx] = \\ &= \frac{\pi}{4} + \int_1^\infty (\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1})dx = \frac{\pi}{4} + [\ln x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)]/_1^\infty = \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln(\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+1}) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2.\end{aligned}$$

Pe de altă parte, formal, şi observând că $x = 0$ este punct de singularitate aparentă, avem:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}dx &= \int_0^1 \frac{1+\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x}} = \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}dx + \frac{1}{2}x/_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{\frac{x+1}{x}} = \\ \overset{\sqrt{\frac{x+1}{x}}=t}{=} x^{\frac{1}{2}}/_0^1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0,\varepsilon>0}\int_{\sqrt{1+\frac{1}{\varepsilon}}}^{\sqrt{2}} \frac{-2t^2}{(t^2-1)^2}dt. &= \frac{3}{2} + \lim_{\varepsilon\to 0,\varepsilon>0}\int_{\sqrt{1+\frac{1}{\varepsilon}}}^{\sqrt{2}} \frac{t^2}{(t^2-1)^2}dt.\end{aligned}$$

Continuând calculele, se obţine în final $(L)\int_{(0,\infty)} f\mu$.

3. Arătaţi că dacă $X = (1,\infty)$ este înzestrat în mod natural ca spaţiu cu măsură Lebesgue, atunci funcţia $f : (1,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(1+\ln x)}, \forall x \in (1,\infty)$ este din $\mathcal{L}^2(X)$.

Rezolvare. Evident, f este continuă, deci Lebesgue măsurabilă pe $(1,\infty)$. Rămâne să arătăm că $|f|^2 = f^2 \in \mathcal{L}((1,\infty))$. Într-adevar, f^2 este mărginită pe $(1,\infty) : 0 < f^2(x) < 1, \forall x \in (1,\infty)$ şi f^2 este Lebesgue măsurabilă pe $(1,\infty)$. De asemenea, f^2 este continuă pe $(1,\infty)$, deci $f^2 \in \mathcal{R}([\alpha,\beta]), \forall[\alpha,\beta] \subset (1,\infty)$.

Prin urmare, $f^2 \in \mathcal{L}((1,\infty)) \Leftrightarrow f^2 \in \mathcal{R}((1,\infty)$ şi, în acest caz,

$$(L)\int_{(1,\infty)} f^2 d\mu = (R)\int_1^\infty f^2(x)dx.$$

Calculăm (formal) $(R)\int_1^\infty f^2(x)dx$ şi în urma acestui calcul vom decide convergenţa şi vom obţine în caz afirmativ valoarea integralei:

$$(R)\int_1^\infty f^2(x)dx = (R)\int_1^\infty \frac{1}{x(1+\ln x)^2}dx = -\frac{1}{1+\ln x}/_1^\infty = 1.$$

Prin urmare, $f^2 \in \mathcal{R}((1,\infty)$, deci $f^2 \in \mathcal{L}((1,\infty)$ şi $(L)\int_{(1,\infty)} f^2 d\mu = 1$.

4. Fie $f:[0,2] \to \mathbb{R}, \forall x \in [0,2], f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^4+1}, x \in \mathbb{Q} \cap [0,2] \\ \frac{1}{x^4+1}, x \in (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}) \cap [0,2]. \end{cases}$

Cercetaţi integrabilitatea Riemann şi Lebesgue a lui f pe $[0,2]$ şi, în caz afirmativ, calculaţi valoarea integralei corespunzătoare.

Indicaţie. $f \notin \mathcal{R}([0,2]), f \in \mathcal{L}([0,2])$ şi $(L)\int_{[0,2]} f d\mu = (R)\int_0^2 \frac{1}{x^4+1}dx$. Pentru calculul acestei integrale se foloseşte dscompunerea $x^4+1 = (x^2+1)^2 - 2x^2 = (x^2+1-2\sqrt{x})(x^2+1+2\sqrt{x})$.

5. Arătaţi că funcţia $f:(0,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}e^x}, \forall x \in (0,\infty)$ este integrabilă Lebesgue pe $(0,\infty)$.

Rezolvare. Evident, $|f| = f, f$ este continuă, deci Lebesgue măsurabilă pe $(0,\infty)$ şi $f \in \mathcal{R}([\alpha,\beta]), \forall [\alpha,\beta] \subset (0,\infty)$. Prin urmare, $f \in \mathcal{L}((0,\infty))$ dacă şi numai dacă $f \in \mathcal{R}((0,\infty))$ (adică integrala $(R)\int_{0+}^{\infty} f(x)dx$ este convergentă).

Formal, $\int_{0+}^{\infty} f(x)dx = \int_{0+}^{1} f(x)dx + \int_1^{\infty} f(x)dx$.

Vom arăta că ambele integrale, $\int_{0+}^{1} f(x)dx$ şi $\int_1^{\infty} f(x)dx$, sunt convergente.

$\int_{0+}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}e^x}dx$ este o integrală de speţa I (funcţie nemărginită pe interval mărginit). Observăm că $\frac{1}{\sqrt{x}e^x} < \frac{1}{\sqrt{x}}, \forall x \in (0,1]$ şi cum integrala $\int_{0+}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{2}/_{0+}^{1} = \frac{1}{2}$ este convergentă, rezultă (conform Criteriului de comparaţie de speţa I pentru integralele funcţiilor pozitive), că $\int_{0+}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}e^x}dx$ este convergentă.

$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}e^x}dx$ este o integrală de speţa a II-a (funcţie mărginită pe interval nemărginit). Observăm că $\frac{1}{\sqrt{x}e^x} \leq \frac{1}{e^x}, \forall x \in (1,\infty)$ şi cum integrala $\int_1^{\infty} \frac{1}{e^x} = -e^{-x}/_1^{\infty} = \frac{1}{e}$ este convergentă, rezultă (conform Criteriului de comparaţie de speţa I pentru integralele funcţiilor pozitive), că $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}e^x}dx$ este convergentă.

Prin urmare, $\int_{0+}^{\infty} f(x)dx$ este convergentă, deci $f \in \mathcal{R}((0,\infty))$, ceea ce antrenează $f \in \mathcal{L}((0,\infty))$.