1. Fie $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0,\infty], \mu(A) = \begin{cases} cardA, A \text{ finită} \\ +\infty, A \text{ infinită (numărabilă)} \end{cases}, \forall A \subseteq \mathbb{N}$.

Arătaţi că μ este o măsură pe $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, numită *măsura de numărare*.

Rezolvare. Verificăm axiomele măsurii:

i) Evident, $\mu(\emptyset) = 0 < \infty$.

ii) Fie un şir oarecare de mulţimi $(A_n)_n \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N}), A_n \cap A_m = \emptyset, m \neq n$ şi fie $A = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} A_n$. Trebuie să arătăm că $\mu(A) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \mu(A_n)$.

Cazul I. Dacă mulţimea A este finită, întrucât $A = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} A_n$, rezultă că A_n este finită, $\forall n \in \mathbb{N}$. Mai mult, există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel ca $A_n = \emptyset, \forall n > n_0$. Prin urmare, $A = \bigcup\limits_{i=0}^{n_0} A_i$.

Aceasta implică $\mu(A) = card(A) = card(\bigcup\limits_{i=0}^{n_0} A_i) = \sum\limits_{i=0}^{n_0} card(A_i)$ (definiţia sumei pentru numere cardinale, mulţimile $A_i, i = \overline{0, n_0}$ fiind disjuncte două câte două). Dar $\mu(A_i) = card(A_i), \forall i = \overline{0, n_0}$, deci $\mu(A) = \sum\limits_{i=0}^{n_0} \mu(A_i) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \mu(A_n)$ (deoarece $A_n = \emptyset, \forall n > n_0$, deci $\mu(A_n) = 0, \forall n > n_0$).

Cazul II. Dacă mulţimea A este infinită (numărabilă), atunci $\mu(A) = \infty$. Identificăm două subcazuri:

II.1. Dacă există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel ca mulţimea A_{n_0} să fie infinită, atunci $\mu(A_{n_0}) = \infty$, deci cu atât mai mult $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \mu(A_n) = \infty = \mu(A)$.

II.2. Dacă $\forall n \in \mathbb{N}$, mulţimea A_n este finită, atunci $\forall n \in \mathbb{N}, \mu(A_n) = card(A_n)$. În plus, întrucât $A = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} A_n$ iar mulţimea A este infinită, $\exists$ un subşir $(n_k)_k \subset \mathbb{N}$ astfel ca $A_{n_k} \neq \emptyset, \forall k \in \mathbb{N}$. Aceasta înseamnă că $\forall k \in \mathbb{N}, card(A_{n_k}) \geq 1, \forall k \in \mathbb{N}$.

Prin urmare, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \mu(A_n) \geq \sum\limits_{k=0}^{\infty} \mu(A_{n_k}) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} card(A_{n_k}) \geq \sum\limits_{k=0}^{\infty} 1 = \infty$, de unde $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \mu(A_n) = \infty = \mu(A)$.

Cu aceasta rezolvarea se încheie.

2. Fie $X = \{a, b, c\} (a \neq b \neq c \neq a)$ şi $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty], \mu^*(A) = \begin{cases} 0, A = \emptyset \\ 1, A \neq \emptyset, A \neq \{a, b, c\} \\ 2, A = \{a, b, c\}. \end{cases}$

Arătaţi că:

(i) μ^* este o măsură exterioară;

(ii) Determinaţi submulţimile lui X care sunt μ^*-măsurabile.

Rezolvare. Amintim următoarele:

Definiţie. Fie X o mulţime oarecare, nevidă. O funcţie de mulţime μ^* : $\mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ se numeşte *măsură exterioară* dacă sunt îndeplinite condiţiile:
i) $\mu^*(\emptyset) = 0$;
ii) μ^* este *izotonă*, adică $\mu^*(A) \leq \mu^*(B), \forall A, B \subseteq X$, cu $A \subseteq B$;
iii) μ^* este *numărabil subaditivă*, adică $\mu^*(\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} A_n) \leq \sum\limits_{n=0}^{\infty} \mu^*(A_n), \forall (A_n)_n \subseteq \mathcal{P}(X)$.

Observaţie. Orice măsură definită pe familia tuturor părţilor este măsură exterioară. Reciproc, orice măsură exterioară finit aditivă este măsură.

Observaţie. Orice mulţime de măsură exterioară nulă este măsurabilă.

Definiţie. Dacă X este o mulţime oarecare, nevidă, iar $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ este o măsură exterioară, atunci o mulţime $A \subseteq X$ se numeşte μ^*-*măsurabilă* dacă $\forall T \subseteq X, \mu^*(T) = \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \cap cA)$.

Notăm cu $\mathcal{M}$ familia tuturor mulţimilor μ^*-măsurabile. Se arată că $\mathcal{M}$ este o σ-algebră iar $\mu^*_{/\mathcal{M}}$ este o măsură, numită *măsura indusă de măsura exterioară* μ^*.

(i) Observăm că:
i) $\mu^*(\emptyset) = 0$.

ii) Arătăm acum că μ^* este izotonă. Fie $A, B \subseteq X$, cu $A \subseteq B$. Identificăm următoarele subcazuri:
I. Dacă $B = \emptyset$, atunci $A = \emptyset$, deci $\mu^*(A) = 0 = \mu^*(B)$;
II. Dacă B este mulţime formată dintr-un singur element, de exemplu, $B = \{a\}$, avem subcazurile:
· $A = \emptyset$, deci $\mu^*(A) = 0 < 1 = \mu^*(B)$;
· $A = \{a\}$, deci $\mu^*(A) = 1 = \mu^*(B)$;
III. Dacă B este mulţime formată din două elemente, de exemplu $B = \{a, b\}$, avem subcazurile:
· $A = \emptyset$, deci $\mu^*(A) = 0 < 1 = \mu^*(B)$;
· $A = \{a\}$ sau $A = \{b\}$, deci $\mu^*(A) = 1 = \mu^*(B)$;
· $A = \{a, b\}$, deci $\mu^*(A) = 1 = \mu^*(B)$.
IV. Dacă $B = X(= \{a, b, c\})$, avem subcazurile:
· $A = \emptyset$, deci $\mu^*(A) = 0 < 2 = \mu^*(B)$;
· $A = \{a\}$ sau $A = \{b\}$ sau $A = \{c\}$, deci $\mu^*(A) = 1 < 2 = \mu^*(B)$;
· $A = \{a, b\}$sau $A = \{b, c\}$ sau $A = \{a, c\}$, deci $\mu^*(A) = 1 < 2 = \mu^*(B)$;
· $A = \{a, b, c\}$, deci $\mu^*(A) = 2 = \mu^*(B)$.

iii) Arătăm acum că μ^* este numărabil subaditivă. Fie deci un şir oarecare de mulţimi $(A_n)_n \subseteq \mathcal{P}(X)$. Arătăm că $\mu^*(A) \leq \sum\limits_{n=0}^{\infty} \mu^*(A_n)$, unde $A = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} A_n$. Identificăm următoarele subcazuri:
· $A = \emptyset$, deci $\mu^*(A) = 0 \leq \sum\limits_{n=0}^{\infty} \mu^*(A_n)$;

$\cdot$ A este mulţime formată dintr-un singur element, de exemplu $A = \{a\}$. Atunci $\mu^*(A) = 1$. În plus, întrucât $A = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} A_n$, rezultă că există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel ca $A_{n_0} = \{a\}$, de unde $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \mu^*(A_n) \geq \mu^*(A_{n_0}) = 1 = \mu^*(A)$;

$\cdot$ A este mulţime formată din două elemente, de exemplu $A = \{a, b\}$. Atunci $\mu^*(A) = 1$. În plus, întrucât $A = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} A_n$, rezultă că avem următoarele subcazuri:

$*$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ astfel ca $A_{n_0} = \{a, b\}$. Atunci $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \mu^*(A_n) \geq \mu^*(A_{n_0}) = 1 = \mu^*(A)$;

$*$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ astfel ca $A_{n_0} = \{a\}$ şi $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ astfel ca $A_{n_1} = \{b\}$. Atunci $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \mu^*(A_n) \geq \mu^*(A_{n_0}) + \mu^*(A_{n_1}) = 1 + 1 > 1 = \mu^*(A)$;

$\cdot$ $A = \{a, b, c\}$. Atunci $\mu^*(A) = 2$. În plus, întrucât $A = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} A_n$, rezultă că avem următoarele subcazuri:

$*$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ astfel ca $A_{n_0} = \{a, b, c\}$. Atunci $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \mu^*(A_n) \geq \mu^*(A_{n_0}) = 2 = \mu^*(A)$;

$*$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ astfel ca $A_{n_0} = \{a\}$, $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ astfel ca $A_{n_1} = \{b\}$ şi $\exists n_2 \in \mathbb{N}$ astfel ca $A_{n_2} = \{c\}$. Atunci $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \mu^*(A_n) \geq \mu^*(A_{n_0}) + \mu^*(A_{n_1}) + \mu^*(A_{n_2}) = 1 + 1 + 1 > 2 = \mu^*(A)$;

$*$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ astfel ca $A_{n_0} = \{a\}$, $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ astfel ca $A_{n_1} = \{b, c\}$ (şi variantele similare). Atunci $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \mu^*(A_n) \geq \mu^*(A_{n_0}) + \mu^*(A_{n_1}) = 1 + 1 = 2 = \mu^*(A)$;

$*$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ astfel ca $A_{n_0} = \{a, b\}$, $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ astfel ca $A_{n_1} = \{b, c\}$ (şi variantele similare). Atunci $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \mu^*(A_n) \geq \mu^*(A_{n_0}) + \mu^*(A_{n_1}) = 1 + 1 = 2 = \mu^*(A)$.

În concluzie, μ^* este numărabil subaditivă şi rezolvarea se încheie.

(ii) Deoarece $\mathcal{M}$ este o σ-algebră, rezultă că $X = \{a, b, c\}$ şi $\emptyset$ sunt mulţimi μ^*-măsurabile.

Studiem acum dacă mulţimile punctuale (formate dintr-un singur element) sunt μ^*-măsurabile. Fie aşadar, pentru a face o alegere, $A = \{a\}$ şi fie $T = \{a, b\}$. Atunci $\mu^*(T \cap A) = \mu^*(\{a\}) = 1, \mu^*(T \cap cA) = \mu^*(\{b\}) = 1$, deci $\mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \cap cA) = 1 + 1 \neq 1 = \mu^*(T)$. Prin urmare, mulţimile punctuale nu sunt μ^*-măsurabile.

Studiem acum dacă mulţimile formate din două elemente sunt μ^*-măsurabile. Fie aşadar, pentru a face o alegere, $A = \{a, b\}$ şi fie $T = \{b, c\}$. Atunci $\mu^*(T \cap A) = \mu^*(\{b\}) = 1, \mu^*(T \cap cA) = \mu^*(\{c\}) = 1$, deci $\mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \cap cA) = 1 + 1 \neq 1 = \mu^*(T)$. Prin urmare, mulţimile formate din două elemente nu sunt μ^*-măsurabile.

În consecinţă, singurele mulţimi μ^*-măsurabile sunt $X = \{a, b, c\}$ şi $\emptyset$.

3. Fie X o mulţime oarecare şi $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ o măsură exterioară arbitrară. Arătaţi că $A \in \mathcal{M}$ dacă şi numai dacă $\forall \varepsilon > 0, \exists E_\varepsilon, F_\varepsilon \in \mathcal{M}$ astfel încât $F_\varepsilon \subseteq A \subseteq E_\varepsilon$ şi $\mu^*(E_\varepsilon \backslash F_\varepsilon) < \varepsilon$.

Rezolvare. *Necesitatea.* Dacă $A \in \mathcal{M}$, $\forall \varepsilon > 0$, fie $E_\varepsilon, F_\varepsilon = A(\in \mathcal{M})$. Atunci $F_\varepsilon = A = E_\varepsilon$ şi $\mu^*(E_\varepsilon \backslash F_\varepsilon) = \mu^*(A \backslash A) = \mu^*(\emptyset) = 0 < \varepsilon$.

Suficienţa. Pentru $\forall n \in \mathbb{N}^*$, fie $\varepsilon = \frac{1}{n}$. Atunci $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists E_n, F_n \in \mathcal{M}$ încât $F_n \subseteq A \subseteq E_n$şi $\mu^*(E_n \backslash F_n) < \frac{1}{n}$.

Fie $F = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} F_n, E = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} E_n$. Deoarece $(E_n)_n, (F_n)_n \subset \mathcal{M}$, iar $\mathcal{M}$ este o σ-algebră, rezultă că $E, F \in \mathcal{M}$. În plus, $F \subseteq A \subseteq E$ şi $(\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} E_n) \backslash (\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} F_n) \subseteq E_n \backslash F_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, deci $\mu^*(E \backslash F) = \mu^*((\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} E_n) \backslash (\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} F_n)) \leq \mu^*(E_n \backslash F_n) < \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Făcând $n \to \infty$, rezultă că $\mu^*(E \backslash F) \leq \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$, de unde $\mu^*(E \backslash F) = 0$.

Întrucât $A \backslash F \subseteq E \backslash F$ iar μ^* este izotonă, rezultă că $\mu^*(A \backslash F) \leq \mu^*(E \backslash F) = 0$, deci $\mu^*(A \backslash F) = 0$. Prin urmare, conform observaţiei anterioare, $A \backslash F \in \mathcal{M}$. Deoarece $F \in \mathcal{M}$ iar $\mathcal{M}$ este o σ-algebră, rezultă că $A = (A \backslash F) \cup F \in \mathcal{M}$.