1. Fie X o mulţime oarecare, nevidă şi $\mathcal{A}$ o familie nevidă, oarecare, de părţi ale lui X. Arătaţi că $\mathcal{A}$ este o algebră dacă şi numai dacă sunt satisfăcute condiţiile:
(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$;
(ii) $\forall A \in \mathcal{A} \Rightarrow cA \in \mathcal{A}$;
(iii) $\forall A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$.

Rezolvare. *Necesitatea* este imediată, ţinând seama de proprietăţile unei algebre. Reciproc, presupunem că au loc (i)-(iii) şi arătăm că $\mathcal{A}$ este o algebră:
I. Din (i) şi (ii) rezultă că $X = c\emptyset \in \mathcal{A}$ (s-au aplicat (i) şi (ii) pentru $A = \emptyset$).
II. $\forall A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$, în baza proprietăţii (iii).
III. Arătăm că $A \backslash B \in \mathcal{A}$, $\forall A, B \in \mathcal{A}$. Într-adevăr, observăm că $c(A \backslash B) = c(A \cap cB) = cA \cup ccB = cA \cup B \in \mathcal{A}$ (s-au folosit (ii) şi (iii)). Prin urmare, din (ii) rezultă că $cc(A \backslash B) = A \backslash B \in \mathcal{A}$.

2. Fie X o mulţime oarecare, nevidă şi $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ o măsură exterioară arbitrară. Arătaţi că dacă $A \subseteq X$ este o mulţime μ^*-măsurabilă iar $B \subseteq X$ este o mulţime astfel încât $\mu^*(B) < \infty$, atunci

$$\mu^*(A \cup B) + \mu^*(A \cap B) = \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

Rezolvare.
Definiţie. Dacă X este o mulţime oarecare, nevidă, iar $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ este o măsură exterioară, atunci o mulţime $A \subseteq X$ se numeşte *μ^*-măsurabilă* dacă

$$(*)\ \forall T \subseteq X, \mu^*(T) = \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \cap cA).$$

Notăm cu $\mathcal{M}$ familia tuturor mulţimilor μ^*-măsurabile.
În $(*)$ fie în particular $T = A \cup B$. Atunci

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*((A \cup B) \cap A) + \mu^*((A \cup B) \cap cA) = \mu^*(A) + \mu^*(B \cap cA). \quad (1)$$

De asemenea, în $(*)$ fie în particular $T = B$. Atunci

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap cA) \quad (2)$$

Deoarece $\mu^*(B) < \infty$, din (2) rezultă că $\mu^*(B \cap cA) = \mu^*(B) - \mu^*(B \cap A)$ şi înlocuind în (1) obţinem că $\mu^*(A \cup B) + \mu^*(A \cap B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$.

3. Fie μ, măsura Lebesgue pe dreapta reală. Arătaţi că:
(i) $\forall a \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}, \{a\} \in \mathcal{M}$ şi $\mu(\{a\}) = 0$;
(ii) $\mu(A) = 0, \forall A \subset \mathbb{R}$ o mulţime cel mult numărabilă;
(iii) $\mu((a, b)) = \mu((a, b]) = \mu([a, b]) = b - a, \forall a, b \in \mathbb{R}, a < b$.

Rezolvare. (i) $\forall a \in \mathbb{R}, \{a\}$ este mulţime închisă, deci $\{a\} \in \mathcal{B}(\subset \mathcal{M}), \mathcal{B}$ fiind σ-algebra boreliană pe $\mathbb{R}$. Prin urmare, $\{a\} \in \mathcal{M}$.

În plus, $\{a\} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(a - \frac{1}{n}, a]$ (Într-adevăr, $\forall n \geq 1, a \in (a - \frac{1}{n}, a]$, deci $\{a\} \subseteq \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(a - \frac{1}{n}, a]$. Pentru incluziunea inversă, fie $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(a - \frac{1}{n}, a]$, oarecare. Atunci $a - \frac{1}{n} < x \leq a, \forall n \geq 1$. Făcând $n \to \infty$, obţinem $a \leq x \leq a$, deci $x = a$, adică $x \in \{a\}$).

Prin urmare, $\mu(\{a\}) = \mu(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(a - \frac{1}{n}, a])$. Să observăm acum că şirul de mulţimi $((a - \frac{1}{n}, a])_{n\geq 1}$ este descendent $((a - \frac{1}{n}, a] \supset (a - \frac{1}{n+1}, a], \forall n \geq 1)$. Deoarece măsura Lebesgue este o măsură, deci este continuă pe şiruri descendente de mulţimi, urmează că

$$\mu(\{a\}) = \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty}(a - \frac{1}{n}, a]) = \lim_{n\to\infty} \mu((a - \frac{1}{n}, a]) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

(ii) Fie $A \subset \mathbb{R}$ o mulţime cel mult numărabilă, oarecare. Atunci $A = \{a_1, a_2, ..., a_n, ...\} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{a_n\}$. Deoarece $\forall n \geq 1, \{a_n\} \in \mathcal{B}$ iar $\mathcal{B}$ este σ-algebră (deci σ-inel), rezultă că $A \in \mathcal{B}$. Mai mult, presupunând că elementele $a_n, n \geq 1$ sunt distincte iar μ este numărabil aditivă, avem $\mu(A) = \mu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{a_n\}) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu(\{a_n\}) \overset{\text{(i)}}{=} 0$.

(iii) $\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b$, avem:

$\mu((a, b)) = \mu((a, b] \setminus \{b\}) = \mu((a, b]) - \mu(\{b\}) = b - a$ (s-a folosit că $\mu(\{b\}) = 0$ şi μ este substractivă).

$\mu([a, b]) = \mu((a, b] \cup \{a\}) = \mu((a, b]) + \mu(\{a\}) = b - a$ (s-a folosit că $\mu(\{a\}) = 0$ şi μ este finit aditivă).

$\mu([a, b)) = \mu((a, b) \cup \{a\}) = \mu((a, b)) + \mu(\{a\}) = b - a$ (s-a folosit că $\mu(\{a\}) = 0$ şi μ este finit aditivă).

4. Arătaţi că orice mulţime nevidă, deschisă din $\mathbb{R}$ are măsura Lebesgue μ strict pozitivă.

Rezolvare. Fie D, o mulţime nevidă, deschisă din $\mathbb{R}$. Deoarece mulţimea D este nevidă, $\exists x_0 \in D$ şi cum mulţimea D este deschisă, $\exists r_0 > 0$ astfel ca $(x_0 - r_0, x_0 - r_0) \subseteq D$. Întrucât măsura Lebesgue este izotonă, $\mu(x_0 - r_0, x_0 - r_0) = 2r \leq \mu(D)$, deci $\mu(D) \geq 2r > 0$.

5. Arătaţi că dacă μ este măsura Lebesgue pe $\mathbb{R}$, atunci $\forall \varepsilon > 0, \exists$ o mulţime deschisă $D_\varepsilon \subset \mathbb{R}$, care este densă în $\mathbb{R}$, încât $\mu(D_\varepsilon) < \varepsilon$.

Rezolvare. Fie mulţimea numerelor raţionale $\mathbb{Q} = \{r_1, r_2, ..., r_n, ...\}$ şi pentru orice $\varepsilon > 0$, fie mulţimea $D_\varepsilon = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty}(r_k - \frac{\varepsilon}{2^{k+3}}, r_k + \frac{\varepsilon}{2^{k+3}})$. Se observă că multimea D_ε este este deschisă, fiind reuniune de intervale deschise. În plus, întrucât $\mathbb{Q} \subset D_\varepsilon$, rezultă că $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \subseteq \overline{D_\varepsilon}$, deci $\overline{D_\varepsilon} = \mathbb{R}$, ceea ce înseamnă că D_ε este densă în $\mathbb{R}$. Rămâne să arătăm că $\mu(D_\varepsilon) < \varepsilon$.

Într-adevăr, deoarece măsura Lebesgue μ este numărabil subaditivă, iar intervalele $(r_k - \frac{\varepsilon}{2^{k+3}}, r_k + \frac{\varepsilon}{2^{k+3}}), r > 0, k \in \mathbb{N}$ nu sunt neapărat două câte două disjuncte, avem:

$$\begin{aligned}\mu(D_\varepsilon) &= \mu(\bigcup_{k=0}^{\infty}(r_1 - \frac{\varepsilon}{2^{k+3}}, r_1 + \frac{\varepsilon}{2^{k+3}})) \leq \sum_{k=0}^{\infty}\mu(r_1 - \frac{\varepsilon}{2^{k+3}}, r_1 + \frac{\varepsilon}{2^{k+3}}) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2\varepsilon}{2^{k+3}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^{k+2}} = \\ &= \frac{\varepsilon}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k} = \frac{\varepsilon}{4}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.\end{aligned}$$

6. Fie X o mulţime nenumărabilă oarecare şi $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$, $\forall A \subseteq X, \mu^*(A) = \begin{cases} 0, cardA \leq \aleph_0 \\ 1, cardA > \aleph_0. \end{cases}$

Arătaţi că:

(i) μ^* este o măsură exterioară;

(ii) Determinaţi submulţimile lui X care sunt μ^*-măsurabile.

Rezolvare. (i) I. Evident, $\mu^*(\emptyset) = card\emptyset = 0$;

II. Arătăm că μ^* este izotonă. Fie deci $A, B \subseteq X, A \subseteq B$. Arătăm că $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$. Deosebim două cazuri:

· Dacă mulţimea B este cel mult numărabilă (adica $cardA \leq \aleph_0$), atunci mulţimea A este de asemenea cel mult numărabilă, deci $\mu^*(A) = 0 = \mu^*(B)$;

· Dacă mulţimea B este nenumărabilă (adica $cardA > \aleph_0$), atunci deosebim două subcazuri:

$*$ Dacă mulţimea A este cel mult numărabilă, atunci $\mu^*(A) = 0 < \mu^*(B) = 1$;

$*$ Dacă mulţimea A este nenumărabilă, atunci $\mu^*(A) = 1 = \mu^*(B)$.

III. Arătăm că μ^* este numărabil subaditivă. Pentru aceasta, fie $(A_n)_n \subseteq \mathcal{P}(X)$ un şir de mulţimi. Arătăm că $\mu^*(A) \leq \sum\limits_{n=0}^{\infty}\mu^*(A_n)$, unde $A = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty}A_n$. Deosebim două cazuri:

· Dacă $\forall n \in \mathbb{N}, A_n$ este cel mult numărabilă, atunci A este de asemenea cel mult numărabilă, deci $\mu^*(A) = 0 = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\mu^*(A_n)$;

· Dacă $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ astfel ca A_{n_0} este nenumărabilă, atunci A este de asemenea nenumărabilă, deci $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\mu^*(A_n) \geq \mu^*(A_{n_0}) = 1 = \mu^*(A)$.

Prin urmare, μ^* este o măsură exterioară.

(ii) Determinăm submulţimile A ale lui X care sunt μ^*-măsurabile, adică satisfac condiţia:

$$(*)\ \forall T \subseteq X, \mu^*(T) = \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \cap cA).$$

Dacă se folosesc mulţimi T care sunt cel mult numărabile, atunci $T \cap A$ şi $T \cap cA$ sunt de asemenea cel mult numărabile, deci $\mu^*(T) = 0 = \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \cap cA)$, deci egalitatea $(*)$ este satisfăcuta. Trebuie sa operăm aşadar cu mulţimi T care sunt nenumărabile, deci pentru care $\underline{\mu^*(T) = 1}$.

Prin urmare, trebuie să avem

$$1 = \mu^*(T) = \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \cap cA),$$

ceea ce, ţinând seama de definiţia lui μ^*, implică două posibilităţi: ($\mu^*(T \cap A) = 0$ şi $\mu^*(T \cap cA) = 1$) sau ($\mu^*(T \cap A) = 1$ şi $\mu^*(T \cap cA) = 0$).

· Dacă ($\mu^*(T \cap A) = 0$ şi $\mu^*(T \cap cA) = 1$), vom opera, în particular, cu mulţimi $T \supseteq A$ (evident, există astfel de mulţimi). Atunci $T \cap A = A$, deci în mod necesar trebuie ca $\underline{\mu^*(A) = 0}$ (adică mulţimea A este cel mult numărabilă). Să arătăm că această condiţie este şi suficientă, adică, să arătăm că dacă $\mu^*(A) = 0$, atunci are loc $(*)$. Într-adevăr, deoarece $T \cap A \subseteq A$ şi μ^* este izotonă, rezultă că $\mu^*(T \cap A) \leq \mu^*(A) = 0$, deci $\mu^*(T \cap A) = 0$, adica $T \cap A$ este cel mult numărabilă. Pentru a stabili $(*)$, rămâne să arătăm că $\mu^*(T \cap cA) = 1$, adică $T \cap cA$ este nenumărabilă. Într-adevăr, dacă am presupune prin reducere la absurd că $T \cap cA$ este cel mult numărabilă, întrucât $T \cap A$ este cel mult numărabilă, ar rezulta că $T = T \cap X = T \cap (A \cup cA) = (T \cap A) \cup (T \cap cA)$ este cel mult numărabilă, ceea ce este fals, deoarece am stabilit că trebuie să ne limităm doar la mulţimi T care sunt nenumărabile.

Vom raţiona acum similar în cealaltă situaţie:

· Dacă ($\mu^*(T \cap A) = 1$ şi $\mu^*(T \cap cA) = 0$), vom opera, în particular, cu mulţimi $T \supseteq cA$ (evident, există astfel de mulţimi). Atunci $T \cap cA = cA$, deci în mod necesar trebuie ca $\underline{\mu^*(cA) = 0}$ (adică mulţimea cA este cel mult numărabilă). Să arătăm că această condiţie este şi suficientă, adică, să arătăm că dacă $\mu^*(cA) = 0$, atunci are loc $(*)$. Într-adevăr, deoarece $T \cap cA \subseteq cA$ şi μ^* este izotonă, rezultă că $\mu^*(T \cap cA) \leq \mu^*(cA) = 0$, deci $\mu^*(T \cap cA) = 0$, adica $T \cap cA$ este cel mult numărabilă. Pentru a stabili $(*)$, rămâne să arătăm că $\mu^*(T \cap A) = 1$, adică $T \cap A$ este nenumărabilă. Într-adevăr, dacă am presupune prin reducere la absurd că $T \cap A$ este cel mult numărabilă, întrucât $T \cap cA$ este cel mult numărabilă, ar rezulta că $T = T \cap X = T \cap (A \cup cA) = (T \cap A) \cup (T \cap cA)$ este cel mult numărabilă, ceea ce este fals, deoarece am stabilit că trebuie să ne limităm doar la mulţimi T care sunt nenumărabile.

În concluzie, condiţia necesară şi suficientă pentru ca o mulţime A să fie μ^*-măsurabilă este ca A să fie cel mult numărabilă sau cA să fie cel mult numărabilă. Aceasta înseamnă că $\mathcal{M} = \{A \subseteq X; cardA \leq \aleph_0 \text{ sau } card(cA) \leq \aleph_0\}$.