1. Fie X o mulţime oarecare, nevidă, $\mathcal{C}$ un inel de părţi ale lui $X, (A_n)_n \subset \mathcal{C}$ un şir de mulţimi şi $\mu : \mathcal{C} \to [0, \infty]$ o măsură oarecare. Arătaţi că:

(i) $\mu(\liminf_n A_n) \leq \liminf_n \mu(A_n)$, dacă $\liminf_n A_n \in \mathcal{C}$ şi $\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \in \mathcal{C}$, $\forall n \in \mathbb{N}$;

(ii) $\limsup_n \mu(A_n) \leq \mu(\limsup_n A_n)$, dacă $\limsup_n A_n \in \mathcal{C}$, $\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \in \mathcal{C}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ şi $\mu(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n) < \infty$.

Rezolvare. Prin definiţie, pentru un şir oarecare de mulţimi $(A_n)_n \subset \mathcal{C}$, $\liminf_n A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$ iar $\limsup_n A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$.

Dacă $(x_n)_n$ este un şir de numere reale, prin definiţie, $\liminf_n x_n = \sup_n \inf_{k \geq n} x_k$ iar $\limsup_n x_n = \inf_n \sup_{k \geq n} x_k$.

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, fie $B_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$. Atunci, din ipoteză, $B_n \in \mathcal{C}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ şi $\liminf_n A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{C}$. Să observăm că şirul de mulţimi $(B_n)_n \subset \mathcal{C}$ este ascendent: $\forall n \in \mathbb{N}$, $B_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \subseteq \bigcap_{k=n+1}^{\infty} A_k = B_{n+1}$. Aceasta înseamnă că $B_n \nearrow \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \liminf_n A_n \in \mathcal{C}$ şi cum μ este o măsură, rezultă că este continuă pe şiruri ascendente, deci

$$\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \mu(\lim_{n\to\infty} B_n) = \mu(\liminf_n A_n). \tag{1}$$

Pe de altă parte, $\forall n \in \mathbb{N}, B_n \subseteq A_n$ şi cum μ este măsură este izotonă, deci $\mu(B_n) \leq \mu(A_n), \forall n \in \mathbb{N}$, ceea ce implică

$$\liminf_n \mu(B_n) \leq \liminf_n \mu(A_n). \tag{2}$$

Deoarece şirul de mulţimi $(B_n)_n \subset \mathcal{C}$ este ascendent iar μ este izotonă, rezultă că şirul $(\mu(B_n))_n$ este monoton crescător, deci

$$\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \liminf_n \mu(B_n). \tag{3}$$

Din $(1), (2), (3)$ rezultă că $\mu(\liminf_n A_n) \leq \liminf_n \mu(A_n)$.

(ii) **Metoda I**. Procedăm analog.

Pentru început, să observăm că deoarece din ipoteză $\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \in \mathcal{C}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, rezultă că pentru $n = 0$, avem $\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \in \mathcal{C}$, deci are sens $\mu(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k)$.

Acum, pentru $\forall n \in \mathbb{N}$, fie $B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$. Atunci, din ipoteză, $B_n \in \mathcal{C}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ şi $\limsup_n A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{C}$. Să observăm că şirul de mulţimi $(B_n)_n \subset \mathcal{C}$ este descendent: $\forall n \in \mathbb{N}$, $B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \supseteq \bigcup_{k=n+1}^{\infty} A_k = B_{n+1}$. Aceasta înseamnă că $B_n \searrow \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \limsup_n A_n \in \mathcal{C}$.

Pe de altă parte, cum μ este o măsură, rezultă că este continuă pe şiruri descendente (să remarcăm că $\forall n \in \mathbb{N}$, $B_n = \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k \subseteq \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} A_n$ şi cum μ este izotonă, $\mu(B_n) \leq \mu(\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} A_n) < \infty$ - din ipoteză).

Prin urmare,

$$\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \mu(\lim_{n\to\infty} B_n) = \mu(\limsup_n A_n). \tag{4}$$

Deoarece pentru $\forall n \in \mathbb{N}, B_n \supseteq A_n$ şi cum μ este măsură este izotonă, deci $\mu(B_n) \geq \mu(A_n), \forall n \in \mathbb{N}$, ceea ce implică

$$\limsup_n \mu(B_n) \geq \limsup_n \mu(A_n). \tag{5}$$

Deoarece şirul de mulţimi $(B_n)_n \subset \mathcal{C}$ este descendent iar μ este izotonă, rezultă că şirul $(\mu(B_n))_n$ este monoton descrescător, deci

$$\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \limsup_n \mu(B_n). \tag{6}$$

Din $(4), (5), (6)$ rezultă că $\mu(\limsup_n A_n) \geq \limsup_n \mu(A_n)$.

Metoda II. **Exerciţiu propus**. Se poate aplica inegalitatea (i) pentru şirul de mulţimi de termen general $B_n = (\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} A_n) \setminus A_n$.

2. Fie $X = \mathbb{R}, \tau = \tau_u$ topologia uzuală pe $\mathbb{R}$ (adică familia tuturor mulţimilor deschise din $\mathbb{R}$ în raport cu metrica euclidiană indusă de modul) şi fie $\mathcal{B} = \mathcal{A}(\tau)$ (σ-*algebra boreliană* generată de τ). Arătaţi că:

(i) $\mathcal{B} = \mathcal{A}(\mathcal{F})$, unde $\mathcal{F}$ este familia tuturor mulţimilor închise din $\mathbb{R}$;

(ii) $\mathcal{B} = \mathcal{A}(\mathcal{U}) = \mathcal{A}(\mathcal{U}_1) = \mathcal{A}(\mathcal{U}_2) = \mathcal{A}(\mathcal{U}_3) = \mathcal{A}(\mathcal{K})$, unde $\mathcal{U} = \{(a,b]; a,b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$ (cu convenţia $(a,a] = \emptyset$), $\mathcal{U}_1 = \{(a,b); a,b \in \mathbb{R}, a \leq b\}, \mathcal{U}_2 = \{[a,b); a,b \in \mathbb{R}, a \leq b\}, \mathcal{U}_3 = \{[a,b]; a,b \in \mathbb{R}, a \leq b\}, \mathcal{K} = \{K \subset \mathbb{R}, K \text{ mulţime compactă}\}$.

Rezolvare. (i) Să arătam mai întâi că $\mathcal{A}(\tau) \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{F})$ $(*)$. Observăm că este suficient să stabilim că $\tau \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{F})$ (trecând apoi la σ-algebrele generate, obţinem că $\mathcal{A}(\tau) \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{A}(\mathcal{F})) = \mathcal{A}(\mathcal{F})$). Fie deci $D \in \tau$, oarecare. Aceasta înseamnă că mulţimea D este deschisă, deci cD este închisă, adică $cD \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{F})$, de unde $cD \in \mathcal{A}(\mathcal{F})$. Întrucât $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ este σ-algebra generată, este o algebră, deci $c(cD) = D \in \mathcal{A}(\mathcal{F})$, ceea ce intenţionam să arătăm.

Pentru incluziunea inversa, adică $\mathcal{A}(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{A}(\tau)$ $(**)$, precedăm analog. Observăm că este suficient să stabilim că $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}(\tau)$ (trecând apoi la σ-algebrele generate, obţinem că $\mathcal{A}(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{A}(\tau)) = \mathcal{A}(\tau)$). Fie deci $F \in \mathcal{F}$, oarecare. Aceasta înseamnă că mulţimea F este închisă, deci cF este deschisă, adică $cF \in \tau \subseteq \mathcal{A}(\tau)$, de unde $cF \in \mathcal{A}(\tau)$. Întrucât $\mathcal{A}(\tau)$ este σ-algebra generată, este o algebră, deci $c(cF) = F \in \mathcal{A}(\tau)$, ceea ce intenţionam să arătăm.

Din $(*)$ şi $(**)$, rezultă că $\mathcal{A}(\tau) = \mathcal{A}(\mathcal{F})$.

(ii) Vom arăta mai întâi că $\mathcal{A}(\tau) = \mathcal{A}(\mathcal{U}_1)$. Într-adevăr, observăm că $\mathcal{U}_1 \subset \tau$ (intervalele care alcatuiesc $\mathcal{U}_1$ sunt intervale deschise, deci multimi deschise). Trecând la σ-algebre generate, obţinem că $\mathcal{A}(\mathcal{U}_1) \subseteq \mathcal{A}(\tau)$. Să stabilim acum incluziunea inversă, adică $\mathcal{A}(\tau) \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{U}_1)$. Observăm că este suficient, ca şi în precedent, să arătăm că $\tau \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{U}_1)$ (se trece apoi la σ-algebre generate). Fie deci $D \in \tau$, oarecare. Vom arăta că $D \in \mathcal{A}(\mathcal{U}_1)$:

I. Dacă $D = \emptyset$, atunci $D \in \mathcal{A}(\mathcal{U}_1)$ ($\mathcal{A}(\mathcal{U}_1)$ este σ-algebră generată, deci algebră şi deci inel);

II. Dacă $D \neq \emptyset$, vom folosi următorul rezultat:

Teorema de structură a mulţimilor deschise, nevide din $(\mathbb{R}, \tau_u)$. *O mulţime nevidă din* $\mathbb{R}$ *este deschisă dacă şi numai dacă există si este unică o familie cel mult numărabilă* $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de intervale deschise, disjuncte două câte două astfel încât* $D = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} I_n$.

Evident, o parte (posibil vidă) $(I'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sunt intervale mărginite, iar cealaltă parte (de asemenea posibil vidă) $(I''_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sunt intervale nemărginite. Evident, $(I_n)_{n\in\mathbb{N}} = (I'_n)_{n\in\mathbb{N}} \cup (I''_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Intervalele nemărginite pot avea una dintre următoarele forme:

$\cdot$ $(a, +\infty), a \in \mathbb{R}$.

Să arătăm că $(a, +\infty) = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty}(a, a+n)$. Într-adevăr, $\forall n \in \mathbb{N}, (a, a+n) \subset (a, +\infty)$, deci $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}(a, a+n) \subseteq (a, +\infty)$. Să arătăm acum incluziunea inversă, $(a, +\infty) = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty}(a, a+n)$. Fie $x \in (a, +\infty)$, oarecare. Atunci $x > a$. Trebuie să arătăm că $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ astfel ca $x \in (a, a+n_0)$, adică, echivalent, să avem $a < x < a+n$. Inegalitatea din stânga fiind asigurată, un astfel de n_0 (cel mai mic) este $[x-a]+1$ ($x-a$ este pozitiv);

$\cdot$ $(-\infty, b), b \in \mathbb{R}$.

Să arătăm că $(-\infty, b) = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty}(b-n, b)$. Într-adevăr, $\forall n \in \mathbb{N}, (b-n, b) \subset (-\infty, b)$, deci $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}(b-n, b) \subseteq (-\infty, b)$. Să arătăm acum incluziunea inversă, $(-\infty, b) = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty}(b-n, b)$. Fie $x \in (-\infty, b)$, oarecare. Atunci $x < b$. Trebuie să arătăm că $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ astfel ca $x \in (b-n_0, b)$, adică, echivalent, să avem $b-n_0 < x < b$. Inegalitatea din dreapta fiind asigurată, un astfel de n_0 (cel mai mic) este $[b-x]+1$ ($b-x$ este pozitiv);

$\cdot$ $(-\infty, +\infty)(=\mathbb{R})$. Atunci $(-\infty, +\infty) = (-\infty, b) \cup (a, +\infty), a, b \in \mathbb{R}, a < b$, deci $(-\infty, +\infty) = [\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}(a, a+n)] \cup [\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}(b-n, b)]$.

Prin urmare, în fiecare dintre cele trei situaţii, mulţimea $D = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} J_n$, unde $J_n, n \in \mathbb{N}$, sunt intervale deschise şi mărginite, deci $J_n \in \mathcal{A}(\mathcal{U}_1), \forall n \in \mathbb{N}$. Deoarece $\mathcal{A}(\mathcal{U}_1)$ este σ-algebră generată, este σ-algebră, deci σ-inel şi atunci $D = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} J_n \in \mathcal{A}(\mathcal{U}_1)$.

Să arătăm acum că $\mathcal{B} = \mathcal{A}(\mathcal{U})$. Vom arăta pentru început că $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}$ (şi trecem apoi la σ-algebre generate, deci vom avea $(*)$ $\mathcal{A}(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{B}) = \mathcal{B}$). Fie deci $(a,b] \in \mathcal{U}$, oarecare. Evident, $(a,b] = (a,b) \cup \{b\}, (a,b) \in \tau \subset \mathcal{A}(\tau) = \mathcal{B}, \{b\} \in \mathcal{F} \subset \mathcal{A}(\mathcal{F}) = \mathcal{B}$, deci $(a,b] \in \mathcal{B}$.

Rămâne să arătăm că $(**)$ $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{U})$. Deoarece $\mathcal{B} = \mathcal{A}(\mathcal{U}_1)$, vom arăta deci că $\mathcal{A}(\mathcal{U}_1) \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{U})$. Ca şi în precedent, este suficient să arătăm că $\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{U})$. Fie aşadar $(a,b) \in \mathcal{U}_1$, oarecare. Arătăm că $(a,b) \in \mathcal{A}(\mathcal{U})$. Pentru aceasta, observăm că $(a,b) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(a, b - \frac{1}{n}]$ (Într-adevăr, $(a, b - \frac{1}{n}] \subset (a,b), \forall n \in \mathbb{N}^*$, de unde $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(a, b - \frac{1}{n}] \subseteq (a,b)$. Pentru incluziunea inversă $(a,b) \subseteq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(a, b - \frac{1}{n}]$, fie $x \in (a,b)$, oarecare. Trebuie să arătăm că există $n_0 \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $x \in (a, b - \frac{1}{n_0}]$, adică, echivalent, să avem $a < x \leq b - \frac{1}{n_0}$. Inegalitatea din stânga fiind satisfăcută, rămâne să avem $n_0 \geq \frac{1}{b-x}$. Cel mai mic n_0 cu această proprietate este $[\frac{1}{b-x}] + 1$ $(b - x > 0)$.

Aşadar, $(a,b) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(a, b - \frac{1}{n}]$ şi cum $(a, b - \frac{1}{n}] \in \mathcal{A}(\mathcal{U}), \forall n \in \mathbb{N}^*$, iar $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ este în particular σ-inel, rezultă că $(a,b) \in \mathcal{A}(\mathcal{U})$.

Procedând în mod cu totul analog se obţine că $\mathcal{B} = \mathcal{A}(\mathcal{U}_2)$, respectiv, $\mathcal{B} = \mathcal{A}(\mathcal{U}_3)$, stabilind în prealabil că $(a,b) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}[a + \frac{1}{n}, b)$, respectiv $(a,b) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}[a + \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}]$.

Să arătăm în final că $\mathcal{B} = \mathcal{A}(\mathcal{K})$. Evident, $\mathcal{U}_3 \subset \mathcal{K} \subset \mathcal{F}$ şi trecând la σ-algebre generate obţinem că $\mathcal{B} = \mathcal{A}(\mathcal{U}_3) \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{F}) = \mathcal{B}$, ceea ce implică $\mathcal{B} = \mathcal{A}(\mathcal{K})$.

Cu aceasta, rezolvarea se încheie.

3. Fie X o mulţime oarecare, nevidă şi $\mathcal{L}$ o latice de părţi ale lui X. Arătaţi că familia $\mathcal{S} = \{A \backslash B; A, B \in \mathcal{L}\}$ este un semi-inel de părţi ale lui X.

Rezolvare. Observăm că în definiţia lui $\mathcal{S}$ putem presupune, fără a restrânge generalitatea, că $B \subseteq A$ (deoarece $A \backslash B = A \backslash (A \cap B), A \cap B \subseteq A, A \cap B \in \mathcal{L}$). Verificăm în continuare axiomele unui semi-inel:

I. Fie $M, N \in \mathcal{S}$, oarecare. Să arătăm că $M \cap N \in \mathcal{S}$:

Deoarece $M \in \mathcal{S}, \exists A, B \in \mathcal{L}$, cu $B \subseteq A$ (conform observaţiei anterioare) astfel ca $M = A \backslash B$. Analog, $\exists C, D \in \mathcal{L}$, cu $D \subseteq C$ astfel ca $N = C \backslash D$. Atunci $M \cap N = (A \backslash B) \cap (C \backslash D) = (A \cap cB) \cap (C \cap cD) = (A \cap C) \cap (cB \cap cD) = (A \cap C) \cap c(B \cup D) = (A \cap C) \backslash (B \cup D) \in \mathcal{S}$ deoarece $A \cap C, B \cup D \in \mathcal{L}$.

II. Fie $M, N \in \mathcal{S}$, cu $M \subseteq N$, oarecare. Să arătăm că există $P \in \mathcal{S}$ astfel ca $M \subseteq P \subseteq N, P \backslash M \in \mathcal{S}, N \backslash P \in \mathcal{S}$:

Deoarece $M \in \mathcal{S}, \exists A, B \in \mathcal{L}$, cu $B \subseteq A$ astfel ca $M = A \backslash B$. Analog, $\exists C, D \in \mathcal{L}$, cu $D \subseteq C$ astfel ca $N = C \backslash D$.

Fie $P = A \cap C \cap cD$. Atunci $P = (A \cap C) \backslash D \in \mathcal{S}$ deoarece $A \cap C \in \mathcal{L}, D \in \mathcal{L}$.

Să arătăm că $P \backslash M \in \mathcal{S}$:

$$\begin{aligned} P \backslash M &= (A \cap C \cap cD) \backslash (A \backslash B) = A \cap C \cap cD \cap c(A \cap cB) = (A \cap C \cap cD \cap cA) \cup (A \cap C \cap cD \cap B) = \\ &= A \cap C \cap cD \cap B = (A \cap B \cap C) \backslash D \in \mathcal{S} \end{aligned}$$

deoarece $A \cap B \cap C \in \mathcal{L}, D \in \mathcal{L}$.

Arătăm acum că $N \backslash P \in \mathcal{S}$:

$$\begin{aligned} N \backslash P &= (C \backslash D) \backslash (A \cap C \cap cD) = C \cap cD \cap c(A \cap C \cap cD) = (C \cap cD) \cap (cA \cup cC \cup D) = \\ &= (C \cap cD \cap cA) \cup (C \cap cD \cap cC) \cup (C \cap cD \cap D) = C \cap cD \cap cA = C \cap c(A \cup D) = C \backslash (A \cup D) \in \mathcal{S} \end{aligned}$$

deoarece $C \in \mathcal{L}, A \cup D \in \mathcal{L}$.

Rămâne să arătăm că $M \subseteq P \subseteq N$:

Evident, $P = A \cap C \cap cD \subseteq C \cap cD = C \backslash D = N$. A rămas să stabilim că $M \subseteq P$, adică $A \backslash B = A \cap cB \subseteq A \cap C \cap cD$ ceea ce are loc întrucât $A \cap cB \subseteq A$ iar $A \cap cB = M \subseteq N = C \cap cD$.