Funcţii măsurabile

1. Cercetaţi măsurabilitatea Lebesgue a următoarelor funcţii:

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^3, x \in \mathbb{Q} \\ x^2, x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{cases}$;

(ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x+1, x \in \mathbb{Q} \\ x^2 - 3x, x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}. \end{cases}$

Rezolvare. Fie $\overline{\tau_0}$ topologia uzuală pe $\overline{\mathbb{R}}$. Amintim următoarele:

Definiţie. Fie X, o mulţime oarecare, nevidă, τ o topologie pe $X, \mathcal{A}$ o σ-algebră de părţi ale lui X şi $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ o măsură completă, arbitrară. O funcţie $f : (X, \mathcal{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\tau_0})$ se spune că este $\mathcal{A}$-*măsurabilă* dacă $\forall D \in \overline{\tau_0}, f^{-1}(D) \in \mathcal{A}$ ($f^{-1}(D)$, *imaginea inversă* sau *contraimaginea* mulţimii A prin funcţia f, este mulţimea $\{x \in X; f(x) \in D\}$).

Observaţie. Dacă o funcţie f este continuă pe X iar $\tau \subseteq \mathcal{A}$, atunci f este $\mathcal{A}$-măsurabilă. Prin urmare, noţiunea de funcţie măsurabilă constituie o generalizare a noţiunii de funcţie continuă.

Fie τ_u topologia uzuală pe $\mathbb{R}$, μ măsura Lebesgue pe $\mathbb{R}$ iar $\mathcal{M}$ clasa mulţimilor Lebesgue măsurabile. Evident, $\tau_u \subset \mathcal{A}(\tau_u) = \mathcal{B} \subset \mathcal{M}$, deci $\tau_u \subset \mathcal{M}$.

(i) Se observă că $f \underset{\mathbb{R}}{\doteq} g$, unde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$ (f coincide μ-a.p.t. (aproape peste tot) pe $\mathbb{R}$ cu g : $f(x) = g(x), \forall x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$, iar $\mathbb{Q}$ este mulţime numărabilă, deci $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}$ şi $\mu(\mathbb{Q}) = 0$).

Deoarece funcţia g este evident continuă, în baza observaţiei anterioare este Lebesgue măsurabilă şi cum $f \underset{\mathbb{R}}{\doteq} g$, rezultă că şi f este Lebesgue măsurabilă.

(ii) Se raţionează similar.

2. Arătaţi că funcţia parte întreagă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}, f(x) = [x], \forall x \in \mathbb{R}$, este Lebesgue măsurabilă.

Rezolvare. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} ... \\ n-1, x \in [n-1, n) \\ n, x \in [n, n+1) \\ ... \end{cases}$.

Se observă că funcţia f este continuă pe $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$ şi cum mulţimea $\mathbb{Z}$ este numărabilă (deci $\mathbb{Z} \in \mathcal{M}$ şi $\mu(\mathbb{Z}) = 0$), rezultă că f este continuă μ-a.p.t. pe $\mathbb{R}$ (adică, este continuă cu excepţia unei mulţimi de măsură Lebesgue nulă μ). Vom arăta că f este Lebesgue măsurabilă.

Ne propunem să demonstrăm următorul rezultat mai general:

Propoziţie. Fie X, o mulţime oarecare, nevidă, τ o topologie pe $X, \mathcal{A}$ o σ-algebră de părţi ale lui X încât $\tau \subseteq \mathcal{A}$, $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ o măsură completă, arbitrară şi $f : (X, \mathcal{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\tau_0})$ o funcţie oarecare. Dacă f este continuă μ-a.p.t. pe X, atunci f este $\mathcal{A}$-măsurabilă.

Demonstraţie. Fie $D \in \overline{\tau_0}$, oarecare. Vom arăta că $f^{-1}(D) \in \mathcal{A}$.

Întrucât f este continuă μ-a.p.t. pe X, $\exists A \in \mathcal{A}$ astfel ca $\mu(A) = 0$ şi f este continuă pe cA.

Observăm că $f^{-1}(D) = f^{-1}(D) \cap X = f^{-1}(D) \cap (A \cup cA) = (f^{-1}(D) \cap A) \cup (f^{-1}(D) \cap cA)$.

Deoarece $f^{-1}(D) \cap A \subseteq A, \mu(A) = 0$ şi μ este completă, rezultă că $f^{-1}(D) \cap A \in \mathcal{A}$.

Deoarece $\mathcal{A}$ este algebră, rămâne să arătăm că $f^{-1}(D) \cap cA \in \mathcal{A}$.

Observăm că $f^{-1}(D) \cap cA = (f_{/cA})^{-1}(D)$ şi deoarece f este continuă pe cA, aceasta înseamnă că $f_{/cA}$ este continuă pe X şi întrucât $\tau \subseteq \mathcal{A}$, rezultă că $f_{/cA}$ este $\mathcal{A}$-măsurabilă. Prin urmare, cum $D \in \overline{\tau_0}$, rezultă că $(f_{/cA})^{-1}(D) \in \mathcal{A}$, adică $f^{-1}(D) \cap cA$. Cu aceasta rezolvarea se încheie.

3. Fie funcţia $f : D \to \mathbb{R}, f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{\ln n}, x > 0$.

(i) Determinaţi domeniul maxim de definiţie, D, a lui f;

(ii) Studiaţi măsurabilitatea Lebesgue a lui f pe D.

Aceeaşi problemă pentru $f : D \to \mathbb{R}, f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}, x > 0$, respectiv, $f : D \to \mathbb{R}, f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n+x^n}}, x \in \mathbb{R}$.

Rezolvare. I. (i) $D = \{x > 0; \sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{\ln n} \in \mathbb{R}\}$.$D$ este mulţimea punctelor x de convergenţă a seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{\ln n}$, care este o serie numerică cu termeni pozitivi. Fie $a_n = x^{\ln n}, \forall n \geq 1$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{\ln(n+1)}}{x^{\ln n}} = \lim_{n\to\infty} x^{\ln(n+1)-\ln n} = \lim_{n\to\infty} x^{\ln \frac{n+1}{n}} = x^0 = 1,$$

deci criteriul raportului nu furnizează nicio informaţie. Să aplicăm atunci criteriul lui Raabe-Duhamel:

$$\lim_{n\to\infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) = \lim_{n\to\infty} n(x^{\ln \frac{n}{n+1}} - 1) = \lim_{n\to\infty} \frac{(x^{\ln \frac{n}{n+1}} - 1)}{\ln \frac{n}{n+1}} \cdot \ln(\frac{n}{n+1})^n = \ln x \cdot \ln \frac{1}{e} = -\ln x.$$

· Dacă $-\ln x < 1 \Leftrightarrow \ln x > -1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{e}$, seria este divergentă;

· Dacă $-\ln x > 1 \Leftrightarrow \ln x < -1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{e}$, seria este convergentă;

· Dacă $-\ln x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$, obţinem seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{e})^{\ln n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, care este divergentă.

Prin urmare, $D = (0, \frac{1}{e})$.

(ii) $\forall x \in D, f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{\ln n}$ ($f(x)$ este suma seriei convergente). $\forall x \in D, \forall n \geq 1$, fie $S_n(x)$ termenul general al şirului sumelor parţiale ale seriei convergente $\sum_{n=1}^{\infty} x^{\ln n}$.

Atunci, $\forall x \in D, \forall n \geq 1$, $S_n(x) = x^0 + x^{\ln 2} + ... + x^{\ln n}$. Se observă că $\forall n \geq 1$, S_n este funcţie continuă, deci Lebesgue măsurabilă pe D.

Deoarece $\forall x \in D$, seria $\sum_{n=1}^{\infty} x^{\ln n}$ este convergentă, rezultă că şirul $(S_n)_n$ converge punctual pe mulţimea D la funcţia f. Prin urmare, întrucât convergenţa punctuală conservă măsurabilitatea, rezultă că f este Lebesgue măsurabilă pe D.

II. Raţionăm acum similar pentru seria numerică $\sum_{n=1}^{\infty} x^{1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}}, x > 0$.

(i) $D = \{x > 0; \sum_{n=1}^{\infty} x^{1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}} \in \mathbb{R}\}$.$D$ este mulţimea punctelor x de convergenţă a seriei $\sum_{n=1}^{\infty} x^{1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}}$, care este o serie numerică cu termeni pozitivi. Fie $a_n = x^{1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}}, \forall n \geq 1$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}}}{x^{1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}}} = \lim_{n\to\infty} x^{\frac{1}{n+1}} = 1,$$

deci criteriul raportului nu furnizează nicio informaţie. Să aplicăm atunci criteriul lui Raabe-Duhamel:

$$\lim_{n\to\infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) = \lim_{n\to\infty} n(x^{-\frac{1}{n+1}} - 1) = \lim_{n\to\infty} \frac{(x^{-\frac{1}{n+1}} - 1)}{-\frac{1}{n+1}} \cdot - \frac{1}{n+1} \cdot n = -\ln x.$$

· Dacă $-\ln x < 1 \Leftrightarrow \ln x > -1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{e}$, seria este divergentă;
· Dacă $-\ln x > 1 \Leftrightarrow \ln x < -1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{e}$, seria este convergentă;
· Dacă $-\ln x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$, obţinem seria $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{e})^{\ln n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, care este divergentă.

Prin urmare, $D = (0, \frac{1}{e})$.

(ii) $\forall x \in D, f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}}$ ($f(x)$ este suma seriei convergente). $\forall x \in D, \forall n \geq 1$, fie $S_n(x)$ termenul general al şirului sumelor parţiale ale seriei convergente $\sum_{n=1}^{\infty} x^{1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}}$.

Atunci, $\forall x \in D, \forall n \geq 1$, $S_n(x) = x^1 + x^{1+\frac{1}{2}} + ... + x^{1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}}$. Se observă că $\forall n \geq 1$, S_n este funcţie continuă, deci Lebesgue măsurabilă pe D.

Deoarece $\forall x \in D$, seria $\sum_{n=1}^{\infty} x^{1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}}$ este convergentă, rezultă că şirul $(S_n)_n$ converge punctual pe mulţimea D la funcţia f. Prin urmare, întrucât convergenţa punctuală conservă măsurabilitatea, rezultă că f este Lebesgue măsurabilă pe D.

III. (i) $D = \{x \in \mathbb{R}; \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}+x^n} \in \mathbb{R}\}$.$D$ este mulţimea punctelor x de convergenţă a seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}+x^n}$, care este o serie numerică cu termeni oarecare.

$\forall n \geq 1$, fie $a_n = \frac{x^n}{\sqrt{n}+x^n}$. Atunci $|a_n| = |\frac{x^n}{\sqrt{n}+x^n}| \geq \frac{|x|^n}{\sqrt{n}+|x|^n}$.

· Dacă $|x| \geq 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x|^n}{\sqrt{n}+|x|^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{\sqrt{n}}{|x|^n}+1} = 1$, deci, (în cazul în care există), $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| \geq 1$, de unde $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| \neq 0$, ceea ce echivalează cu faptul că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$. Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}+x^n}$ este deci în situaţia aceasta divergentă.

· Dacă $|x| < 1, x \neq 0$, atunci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} |\frac{\frac{x^{n+1}}{\sqrt{n+1}+x^{n+1}}}{\frac{x^n}{\sqrt{n}+x^n}}| = |x| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}+x^n}{\sqrt{n+1}+x^{n+1}} = |x| < 1,$$

deci seria modulelor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\frac{x^n}{\sqrt{n}+x^n}|$ este convergentă, ceea ce înseamnă că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}+x^n}$ este absolut convergentă.

· Dacă $x = 0$, se obţine seria cu termenul general 0, care este, evident, convergentă.

· Dacă $x = 1$, obţinem seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+1}$, care este divergentă.

· Dacă $x = -1$, obţinem seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$. Fie S_n, termenul general al şirului sumelor parţiale. Atunci

$$\begin{aligned}
S_{2n} &= \frac{1}{\sqrt{2}+1} - \frac{1}{\sqrt{3}-1} + \frac{1}{\sqrt{4}+1} - \frac{1}{\sqrt{5}-1} + \frac{1}{\sqrt{6}+1} - ... - \frac{1}{\sqrt{2n-1}-1} + \frac{1}{\sqrt{2n}+1} < \\
&< \frac{1}{\sqrt{2}+1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{4}+1} - \frac{1}{\sqrt{5}+1} + \frac{1}{\sqrt{6}+1} - ... - \frac{1}{\sqrt{2n-1}-1} + \frac{1}{\sqrt{2n-1}+1} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \sum_{k=2}^{n}(\frac{1}{\sqrt{2k-1}+1} - \frac{1}{\sqrt{2k-1}-1}) = \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \sum_{k=2}^{n} \frac{-2}{2k-2} = \frac{1}{\sqrt{2}+1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}+1} - (1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n-1}) \to -\infty,
\end{aligned}$$

ceea ce implică $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = -\infty$. Prin urmare, şirul $(S_n)_n$ este divergent, deci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ este divergentă. În concluzie, $D = (-1, 1)$.

Se raţionează la fel ca mai sus în ceea ce priveşte măsurabilitatea Lebesgue a funcţiei sumă a seriei pe mulţimea sa de convergenţă $(-1, 1)$.