1. Fie X o mulţime oarecare, nevidă şi $\mathcal{C}$ un inel de părţi ale lui X. Arătaţi că familia $\mathcal{A} = \{A \subseteq X; A \in \mathcal{C} \text{ sau } cA \in \mathcal{C}\}$ este o algebră de părţi ale lui X.

Rezolvare. Fie $A, B \in \mathcal{A}$, oarecare. Vom arăta că $A \cup B, A \backslash B, X \in \mathcal{A}$.

Deoarece $A, B \in \mathcal{A}$, avem ($A \in \mathcal{C}$ sau $cA \in \mathcal{C}$) şi ($B \in \mathcal{C}$ sau $cB \in \mathcal{C}$). Deosebim aşadar următoarele cazuri:

I. Dacă $A, B \in \mathcal{C}$, atunci $A \cup B, A \backslash B \in \mathcal{C}$, deci $A \cup B, A \backslash B \in \mathcal{A}$.

II. Dacă $A \in \mathcal{C}$ şi $cB \in \mathcal{C}$, atunci $A \backslash B = A \cap cB \in \mathcal{C}$, deci $A \backslash B \in \mathcal{A}$.

De asemenea, $c(A \cup B) = cA \cap cB = cB \cap cA = (cB) \backslash A \in \mathcal{C}$, deci $c(A \cup B) \in \mathcal{C}$, de unde $A \cup B \in \mathcal{A}$.

III. Dacă $cA \in \mathcal{C}$ şi $B \in \mathcal{C}$, atunci $c(A \backslash B) = c(A \cap cB) = cA \cup B \in \mathcal{C}$, deci $c(A \backslash B) \in \mathcal{C}$, de unde $A \backslash B \in \mathcal{A}$.

De asemenea, $c(A \cup B) = cA \cap cB = (cA) \backslash B \in \mathcal{C}$, deci $c(A \cup B) \in \mathcal{C}$, de unde $A \cup B \in \mathcal{A}$.

IV. Dacă $cA, cB \in \mathcal{C}$, atunci $A \backslash B = A \cap cB = cB \cap A = cB \cap c(cA) = (cB) \backslash (cA) \in \mathcal{C}$, deci $A \backslash B \in \mathcal{C}$, de unde $A \backslash B \in \mathcal{A}$.

De asemenea, $c(A \cup B) = cA \cap cB \in \mathcal{C}$, deci $c(A \cup B) \in \mathcal{C}$, de unde $A \cup B \in \mathcal{A}$.

În plus, $cX = \emptyset \in \mathcal{C}$, deci $X \in \mathcal{A}$.

În concluzie, $\mathcal{A}$ este algebră.

2. Fie X o mulţime infinită, oarecare. Arătaţi că familia $\mathcal{A} = \{A \subseteq X; A$ este finită sau cA este finită$\}$ este o algebră de părţi ale lui X.

Rezolvare. Fie $A, B \in \mathcal{A}$, oarecare. Vom arăta că $A \cup B, A \backslash B, X \in \mathcal{A}$.

Deoarece $A, B \in \mathcal{A}$, avem (A este finită sau cA este finită) şi (B este finită sau cB este finită). Deosebim următoarele cazuri:

I. Dacă A, B sunt finite, atunci evident $A \cup B, A \backslash B$ sunt finite, deci $A \cup B, A \backslash B \in \mathcal{A}$.

II. Dacă A este finită şi cB este finită, atunci $A \backslash B = A \cap cB$ este finită, deci $A \backslash B \in \mathcal{A}$.

De asemenea, $c(A \cup B) = cA \cap cB \subseteq cB$ finită, deci cu atât mai mult $c(A \cup B)$ este finită, de unde $A \cup B \in \mathcal{A}$.

III. Dacă cA este finită şi B este finită, atunci $c(A \backslash B) = c(A \cap cB) = cA \cup B$ este finită, deci $A \backslash B \in \mathcal{A}$.

De asemenea, $c(A \cup B) = cA \cap cB \subseteq cA$ finită, deci cu atât mai mult $c(A \cup B)$ este finită, de unde $A \cup B \in \mathcal{A}$.

IV. Dacă cA, cB sunt finite, atunci $A \backslash B = A \cap cB \subseteq cB$ finită, deci cu atât mai mult $A \backslash B$ este finită, de unde $A \backslash B \in \mathcal{A}$.

De asemenea, $c(A \cup B) = cA \cap cB$ este finită, deci $A \cup B \in \mathcal{A}$.

În plus, $cX = \emptyset$ care este mulţime finită, deci $X \in \mathcal{A}$.

În concluzie, $\mathcal{A}$ este algebră.

3. Fie X o mulţime nenumărabilă, oarecare. Arătaţi că familia $\mathcal{A} = \{A \subseteq X; card(A) \le \aleph_0$ sau $card(cA) \le \aleph_0\}$ este o algebră de părţi ale lui X.

Rezolvare. Fie $A, B \in \mathcal{A}$, oarecare. Vom arăta că $A \cup B, A \backslash B, X \in \mathcal{A}$.

Deoarece $A, B \in \mathcal{A}$, avem (A este cel mult numărabilă sau cA este cel mult numărabilă) şi (B este cel mult numărabilă sau cB este cel mult numărabilă). Deosebim aşadar următoarele cazuri:

I. Dacă A, B sunt cel mult numărabile, atunci evident $A \cup B, A \backslash B$ sunt cel mult numărabile, deci $A \cup B, A \backslash B \in \mathcal{A}$.

II. Dacă A este cel mult numărabilă şi cB este cel mult numărabilă, atunci $A \backslash B = A \cap cB$ este cel mult numărabilă, deci $A \backslash B \in \mathcal{A}$.

De asemenea, $c(A \cup B) = cA \cap cB \subseteq cB$ cel mult numărabilă, deci cu atât mai mult $c(A \cup B)$ este cel mult numărabilă, de unde $A \cup B \in \mathcal{A}$.

III. Dacă cA este cel mult numărabilă şi B este cel mult numărabilă, atunci $c(A \backslash B) = c(A \cap cB) = cA \cup B$ este cel mult numărabilă, deci $A \backslash B \in \mathcal{A}$.

De asemenea, $c(A \cup B) = cA \cap cB \subseteq cA$ cel mult numărabilă, deci cu atât mai mult $c(A \cup B)$ este cel mult numărabilă, de unde $A \cup B \in \mathcal{A}$.

IV. Dacă cA, cB sunt cel mult numărabile, atunci $A \backslash B = A \cap cB \subseteq cB$ cel mult numărabilă, deci cu atât mai mult $A \backslash B$ este cel mult numărabilă, de unde $A \backslash B \in \mathcal{A}$.

De asemenea, $c(A \cup B) = cA \cap cB$ este cel mult numărabilă, deci $A \cup B \in \mathcal{A}$.

În plus, $cX = \emptyset$ care este cel mult numărabilă, deci $X \in \mathcal{A}$. În concluzie, $\mathcal{A}$ este algebră.

4. Fie X, Y două mulţimi oarecare, nevide şi fie o aplicaţie oarecare $f : X \to Y$. Arătaţi că dacă $\mathcal{C}$ este un inel arbitrar de părţi ale lui Y, atunci $f^{-1}(\mathcal{C}) = \{f^{-1}(A); A \in \mathcal{C}\}$ este un inel de părţi ale lui X.

Rezolvare. Amintim că $f^{-1}(A) = \{x \in X; f(x) \in A)$ este *imaginea reciprocă* (*imaginea inversă*) (*contraimaginea*) *mulţimii* A *prin funcţia* f.

Dacă $A, B \subset X$ sunt mulţimi oarecare, atunci:

$f^{-1}(A) \backslash f^{-1}(B) = f^{-1}(A \backslash B)$:

$x \in f^{-1}(A) \backslash f^{-1}(B) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \wedge x \notin f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in A \wedge f(x) \notin B \Leftrightarrow f(x) \in A \backslash B \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A \backslash B)$ şi

$f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) = f^{-1}(A \cup B)$:

$x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \vee x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in A \vee f(x) \in B \Leftrightarrow f(x) \in A \cup B \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A \cup B)$.

Acum, $\forall M, N \in f^{-1}(\mathcal{C}), \exists A, B \in \mathcal{C}$ astfel ca $M = f^{-1}(A), N = f^{-1}(B)$. Atunci:

$M \backslash N = f^{-1}(A) \backslash f^{-1}(B) = f^{-1}(A \backslash B)$ şi cum $A \backslash B \in \mathcal{C}$ ($\mathcal{C}$ este inel), rezultă că $M \backslash N = f^{-1}(A \backslash B) \in f^{-1}(\mathcal{C})$;

$M \cup N = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) = f^{-1}(A \cup B)$ şi cum $A \cup B \in \mathcal{C}$ ($\mathcal{C}$ este inel), rezultă că $M \cup N = f^{-1}(A \cup B) \in f^{-1}(\mathcal{C})$.

Prin urmare, $f^{-1}(\mathcal{C})$ este inel de părţi ale lui X.

5. Arătaţi că familia tuturor mulţimilor mărginite ale lui $\mathbb{R}$ formează un inel, dar nu un σ-inel.

Rezolvare. Evident, diferenţa şi reuniunea oricăror două mulţimi mărginite din $\mathbb{R}$ este tot o mulţime mărginită din $\mathbb{R}$, deci familia $\mathcal{C} = \{A \subset \mathbb{R}; A \text{ mărginită}\}$ este un inel.

$\mathcal{C}$ nu este un σ-inel. De exemplu, $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty}[-n, n]$.

6. Fie X o mulţime oarecare, nevidă şi $\mathcal{A}$ o σ-algebră de părţi ale lui X. Dacă T este o submulţime nevidă oarecare a lui X, arătaţi că familia $\mathcal{A}_T = \{A \cap T; A \in \mathcal{A}\}$ este o σ-algebră de părţi ale lui X (numită *σ-algebră urmă*).

Rezolvare. (i) $\forall A^*, B^* \in \mathcal{A}_T, \exists A, B \in \mathcal{A}$ astfel ca $A^* = A \cap T, B^* = B \cap T$. Atunci

$A^* \backslash B^* = (A \cap T)\backslash(B \cap T) = (A\backslash B) \cap T$ şi, deoarece $A\backslash B \in \mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ este inel), rezultă că $A^* \backslash B^* \in \mathcal{A}_T$;

$A^* \cup B^* = (A \cap T) \cup (B \cap T) = (A \cup B) \cap T$ şi, deoarece $A \cup B \in \mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ este inel), rezultă că $A^* \cup B^* \in \mathcal{A}_T$.

Prin urmare, $\mathcal{A}_T$ este inel.

(ii) $T \in \mathcal{A}_T$ deoarece $T = X \cap T$ şi $X \in \mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ este algebră).

În consecinţă, $\mathcal{A}_T$ este algebră.

(iii) $\mathcal{A}_T$ este σ-inel:$\forall (A_n^*)_n \subset \mathcal{A}_T, \exists (A_n)_n \subset \mathcal{A}$ astfel ca $\forall n,\ A_n^* = A_n \cap T$. Atunci $\bigcup\limits_n A_n^* = \bigcup\limits_n (A_n \cap T) = (\bigcup\limits_n A_n) \cap T$ şi, deoarece $\bigcup\limits_n A_n \in \mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ este σ-inel), rezultă că $\bigcup\limits_n A_n^* \in \mathcal{A}_T$.

Prin urmare, $\mathcal{A}_T$ este σ-algebră.

7. Arătaţi că orice inel de părţi poate fi organizat ca inel algebric împreună cu operaţiile de diferenţă simetrică Δ şi intersecţie $\cap$ (de unde, denumirea de inel algebric).

Rezolvare. Fie $\mathcal{C}$ un inel oarecare de părţi ale unei mulţimi abstracte, nevide X şi fie $\oplus = \Delta$ (operaţia de "adunare") şi $\otimes = \cap$ (operaţia de "înmulţire"). Arătăm că $(\mathcal{C}, \Delta, \cap)$ satisface axiomele unui inel algebric:

1. $(\mathcal{C}, \Delta)$ este grup comutativ:

(i) parte stabilă: $\forall A, B \in \mathcal{C}, A\Delta B \in \mathcal{C}$ (deoarece $\mathcal{C}$ este inel);

(ii) asociativitatea: $\forall A, B, C \in \mathcal{C}, (A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$;

(iii) existenţa elementului neutru: $\exists \emptyset \in \mathcal{C}$ astfel ca $\forall A \in \mathcal{C}, A\Delta\emptyset = \emptyset\Delta A = A$;

(iv) existenţa elementului simetrizabil ("opusul"): $\forall A \in \mathcal{C}, \exists A' = A \in \mathcal{C}$ astfel ca $A\Delta A' = A'\Delta A = \emptyset$;

(v) comutativitatea: $\forall A, B \in \mathcal{C}, A\Delta B = B\Delta A$.

2. $(\mathcal{C}, \cap)$ este semigrup (comutativ):

(i) parte stabilă: $\forall A, B \in \mathcal{C}, A \cap B \in \mathcal{C}$ (deoarece $\mathcal{C}$ este inel);

(ii) asociativitatea: $\forall A, B, C \in \mathcal{C}, (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
(iii) comutativitatea: $\forall A, B \in \mathcal{C}, A \cap B = B \cap A$.

3. distributivitatea "înmulţirii" $\cap$ faţă de "adunare" Δ :
(i) $\forall A, B, C \in \mathcal{C}, A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$;
(ii) $\forall A, B, C \in \mathcal{C}, (A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C)$.

8. Fie $X = [0, 1]$. Arătaţi că $\mathcal{A} = \{A \subseteq X; cardA \leq \aleph_0\}$ este un inel, dar nu este o algebră de părţi ale lui $[0, 1]$.

Rezolvare. $\forall A, B \in \mathcal{A}$, avem $cardA \leq \aleph_0$ si $cardB \leq \aleph_0$, de unde $card(A \backslash B) \leq \aleph_0$ şi $card(A \cup B) \leq \aleph_0$, deci $\mathcal{A}$ este inel. Evident, $X \notin \mathcal{A}$ deoarece $cardX = c > \aleph_0$.

9. Arătaţi că familia $\mathcal{S} = \{[a, b); a, b \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset\}$ formează un semi-inel, dar nu este inel (prin convenţie, intervalul degenerat $[a, a) = \emptyset$).

Rezolvare. Evident, $\forall A, B \in \mathcal{S}$, are loc $A \backslash B \in \mathcal{S}$ (se tratează toate situaţiile în care se pot plasa pe dreapta reală intervalele degenerate sau nedegenerate A, B).

De asemenea, fie $A, B \in \mathcal{S}$, oarecare, cu $A \subset B$. Fără a restrânge generalitatea, presupunem că sunt amândouă nevide, deci $A = [a, b), a < b, B = [c, d), c < d$.

Deoarece $A = [a, b) \subset B = [c, d)$, rezulta ca $c < a < b < d$. Evident, $\exists C = [c, b)$ (sau $[a, d)$) astfel ca: $C \in \mathcal{S}, A \subset C \subset B, C \backslash A = [c, a) \in \mathcal{S}, B \backslash C = [b, d) \in \mathcal{S}$.

Prin urmare, $\mathcal{S}$ este un semi-inel şi constatăm că nu este inel: $\exists A, B \in \mathcal{S}$ (de exemplu, disjuncte) astfel încât $A \cup B \notin \mathcal{S}$.

10. Fie X o mulţime oarecare, nevidă şi $\mathcal{C}$ o familie nevidă, oarecare, de părţi ale lui X. Arătaţi că $\mathcal{C}$ este un inel dacă şi numai dacă

$$(\forall A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{C} \text{ şi } A \Delta B \in \mathcal{C}). \qquad (*)$$

Rezolvare. *Necesitatea* este evidenta.

Suficienţa. Fie $A, B \in \mathcal{C}$, oarecare. Vom arăta că $A \backslash B \in \mathcal{C}$ şi $A \cup B \in \mathcal{C}$.

Să observăm că, deoarece $A, B \in \mathcal{C}$, datorită proprietăţii $(*)$, avem $A \cap (A \Delta B) \in \mathcal{C}$.

Pe de altă parte, $A \cap (A \Delta B) = A \cap [(A \backslash B) \cup (B \backslash A)] = [A \cap (A \backslash B)] \cup [A \cap (B \backslash A)] = (A \backslash B)$, deci de mai sus obţinem că $A \backslash B \in \mathcal{C}$.

Acum $(A \backslash B) \Delta B \in \mathcal{C}$ datorită proprietăţii $(*)$ şi de asemenea proprietăţii demonstrate mai sus. Dar $(A \backslash B) \Delta B = [(A \cap cB) \cap cB] \cup [B \cap c(A \cap cB)] = (A \cap cB) \cup [B \cap (cA \cup B)] = (A \cap cB) \cup B = A \cup B$, de unde $A \cup B \in \mathcal{C}$.

11. Fie X o mulţime oarecare, nevidă şi $x_0 \in X$ un element arbitrar. Definim funcţia de mulţime $\mu : \mathcal{P}(X) \to \{0, 1\}$ astfel: $\forall A \subseteq X, \mu(A) = \begin{cases} 1, x_0 \in A \\ 0, x_0 \notin A \end{cases}$.

Arătaţi că μ este o măsură pe $\mathcal{P}(X)$ (numită *masa unitate concentrată în* x_0).

Rezolvare. Verificăm axiomele măsurii:

1. Evident, $\exists\emptyset \in \mathcal{C}$ astfel ca $\mu(\emptyset) = 0 < \infty$;

2. Fie un şir de mulţimi $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(X), A_n \cap A_m = \emptyset, m \neq n$. Arătăm că $\mu(\overset{\infty}{\underset{n=0}{\cup}} A_n) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \mu(A_n)$. Notăm $\overset{\infty}{\underset{n=0}{\cup}} A_n = A$. Deosebim două cazuri:

I. $x_0 \notin A$. Atunci, $\forall n \in \mathbb{N}, x_0 \notin A_n$. Prin urmare, $\mu(A) = 0$ şi $\forall n \in \mathbb{N}, \mu(A_n) = 0$, de unde $\mu(\overset{\infty}{\underset{n=0}{\cup}} A_n) = 0 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \mu(A_n)$.

II. $x_0 \in A$. Atunci $\exists! n_0 \in \mathbb{N}$ astfel ca $x_0 \in A_n$, de unde $x_0 \notin A_n, \forall n \in \mathbb{N}, n \neq n_0$ (întrucât mulţimile A_n sunt toate două câte două disjuncte). Prin urmare, $\mu(A) = 1, \mu(A_{n_0}) = 1$ şi $\forall n \in \mathbb{N}, n \neq n_0, \mu(A_n) = 0$, ceea ce antrenează $\mu(\overset{\infty}{\underset{n=0}{\cup}} A_n) = 1 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \mu(A_n)$.

12. Fie X o mulţime oarecare, nevidă, $\mathcal{C}$ un inel de părţi ale lui X şi $\mu : \mathcal{C} \to [0, \infty]$ o funcţie finit aditivă de mulţime. Arătaţi că:

(i) Dacă μ este continuă pe şiruri ascendente de mulţimi din $\mathcal{C}$ (adică $\forall (A_n)_n \subset \mathcal{C}, A_n \nearrow A \in \mathcal{C} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$), atunci μ este numărabil aditivă;

(ii) Dacă μ este continuă pe şiruri descendente la $\emptyset$ de mulţimi din $\mathcal{C}$ (adică $\forall (A_n)_n \subset \mathcal{C}, A_n \searrow \emptyset \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$), atunci μ este numărabil aditivă.

Rezolvare. (i) Fie un şir oarecare de mulţimi $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}, A_n \cap A_m = \emptyset, m \neq n$, cu $\overset{\infty}{\underset{n=0}{\cup}} A_n \overset{\text{not.}}{=} A \in \mathcal{C}$. Trebuie să arătăm că $\mu(\overset{\infty}{\underset{n=0}{\cup}} A_n) = 1 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \mu(A_n)$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, fie $B_n = \overset{n}{\underset{i=0}{\cup}} A_i$. Evident, $(B_n)_n \subset \mathcal{C}$. Deoarece $\forall n \in \mathbb{N}, B_n = \overset{n}{\underset{i=0}{\cup}} A_i \subset \overset{n+1}{\underset{i=0}{\cup}} A_i = B_{n+1}$ iar $\overset{\infty}{\underset{n=0}{\cup}} B_n = \overset{\infty}{\underset{n=0}{\cup}} \overset{n}{\underset{i=0}{\cup}} A_i = \overset{\infty}{\underset{i=0}{\cup}} A_i = A$, rezultă că $B_n \nearrow A$ şi, cum din ipoteză μ este continuă pe şiruri ascendente de mulţimi din $\mathcal{C}$, obţinem că $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(B_n) = \mu(A)$.

Prin urmare, $\mu(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(\overset{n}{\underset{i=0}{\cup}} A_i)$ şi cum μ este din ipoteză finit aditivă iar mulţimile $(A_i)_{i=\overline{0,n}}$ sunt două câte două disjuncte, rezultă că $\mu(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=0}^{n} \mu(A_i) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \mu(A_n)$.

(ii) Fie un şir oarecare de mulţimi $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}, A_n \cap A_m = \emptyset, m \neq n$, cu $\overset{\infty}{\underset{n=0}{\cup}} A_n \overset{\text{not.}}{=} A \in \mathcal{C}$. Trebuie să arătăm că $\mu(\overset{\infty}{\underset{n=0}{\cup}} A_n) = 1 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \mu(A_n)$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, fie $B_n = \overset{n}{\underset{i=0}{\cup}} A_i$. Conform punctului (i), $(B_n)_n \subset \mathcal{C}$ şi $B_n \nearrow A$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, fie $C_n = A\backslash B_n$. Evident, $(C_n)_n \subset \mathcal{C}$ şi $\forall n \in \mathbb{N}, C_n = A\backslash B_n \supset C_{n+1} = A\backslash B_{n+1}$. Mai mult, $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} C_n = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty}(A\backslash B_n) = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty}(A \cap cB_n) = A \cap \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} cB_n = A \cap c(\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} B_n) = A \cap cA = \emptyset$.

Prin urmare, $C_n \searrow A$ şi, cum din ipoteză μ este continuă pe şiruri descendente de mulţimi din $\mathcal{C}$, obţinem că $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(C_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\mu(A\backslash B_n) = 0$.

Evident, $\forall n \in \mathbb{N}, A = (A\backslash B_n) \cup B_n$. Deoarece din ipoteză μ este finit aditivă iar mulţimile $(A\backslash B_n)$ şi $B_n, n \in \mathbb{N}$, sunt disjuncte, rezultă că $\mu(A) = \mu(A\backslash B_n) + \mu(B_n), \forall n \in \mathbb{N}$. Trecând la limită $n \to \infty$ şi ţinând seama că $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(A\backslash B_n) = 0$, obţinem că $\mu(A) = \lim\limits_{n\to\infty}\mu(B_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\mu(\bigcup\limits_{i=0}^{n} A_i)$.

La fel ca la punctul (i), deoarece μ este finit aditivă iar mulţimile $(A_i)_{i=\overline{0,n}}$ sunt două câte două disjuncte, rezultă că $\mu(A) = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=0}^{n}\mu(A_i) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\mu(A_n)$.

13. Fie X o mulţime oarecare, nevidă, $\mathcal{C}$ un inel de părţi ale lui X şi $\mu : \mathcal{C} \to [0, \infty]$ o funcţie finit aditivă de mulţime. Arătaţi că:

(i) $\forall A, B \in \mathcal{C},\ \mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B)$;

(ii) $\forall A, B, C \in \mathcal{C},\ \mu(A) + \mu(B) + \mu(C) + \mu(A \cap B \cap C) = \mu(A \cup B \cup C) + \mu(A \cap B) + \mu(B \cap C) + \mu(A \cap C)$.

Rezolvare. (i) I. Dacă $\mu(A\cap B) = \infty$, atunci $\mu(A) = \infty = \mu(B) = \mu(A\cup B)$ deoarece μ este izotonă şi mulţimile $A, B, A \cup B \supseteq A \cap B$.

II. Presupunem că $\mu(A \cap B) < \infty$.

$\forall A, B \in \mathcal{C},\ A = (A\backslash B) \cup B$. Deoarece μ este finit aditivă iar mulţimile B şi $A\backslash B$ sunt disjuncte, rezultă că $\mu(A) = \mu(A\backslash B) + \mu(B)$.

Evident, $A\backslash B = A\backslash(A \cap B)$ şi $A \cap B \subseteq A$. Deoarece $\mu(A \cap B) < \infty$ şi μ este substractivă, obţinem că $\mu(A\backslash B) = \mu(A) - \mu(A \cap B)$. Prin urmare, înlocuind $\mu(A\backslash B)$ avem $\mu(A) = \mu(A) - \mu(A\cap B) + \mu(B)$, de unde $\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B)$.

(ii) Fie $A, B, C \in \mathcal{C}$, oarecare. Aplicăm (i) pentru mulţimile $A, B\cup C$ şi avem $\mu(A) + \mu(B \cup C) = \mu(A \cup B \cup C) + \mu(A \cap (B \cup C)) = \mu(A \cup B \cup C) + \mu((A \cap B) \cup (A \cap C))$.

Adunând în ambii membri $\mu(B\cap C)(\in [0,\infty])$ şi aplicând din nou (i) pentru mulţimile B, C, obţinem $\mu(A) + \mu(B) + \mu(C) = \mu(A \cup B \cup C) + \mu((A \cap B) \cup (A \cap C)) + \mu(B \cap C)$.

Adunăm acum $\mu(A \cap B \cap C)$ în ambii membri şi aplicăm din nou (i) pentru mulţimile $(A \cap B), (A \cap C)$.

Rezultă astfel $\mu(A) + \mu(B) + \mu(C) + \mu(A \cap B \cap C) = \mu(A \cup B \cup C) + \mu(A \cap B) + \mu(A \cap C) + \mu(B \cap C)$.

Observaţie. Folosind acest procedeu de adunare în ambii membri a unor elemente din $[0, \infty]$, evităm posibilele nedeterminări care ar apărea în urma procesului de scădere.

14. Fie $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0, \infty], \forall A \subseteq \mathbb{N}, \mu(A) = \begin{cases} 0, A \text{ finită} \\ +\infty, A \text{ infinită (numărabilă).} \end{cases}$

Arătaţi că:

(i) $\mathbb{N}$ este limita unui şir ascendent de mulţimi $(A_n)_n$ pentru care $\mu(A_n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$;

(ii) μ este funcţie de mulţime finit aditivă, dar nu este numărabil aditivă.

Rezolvare. (i) $\forall n \in \mathbb{N}$, fie $A_n = \{0, 1, 2, ..., n\}$. Atunci, $\forall n \in \mathbb{N}, A_n = \{0, 1, 2, ..., n\} \subset A_{n+1} = \{0, 1, 2, ..., n, n+1\}$ iar $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \{0, 1, 2, ..., n\} = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \bigcup\limits_{i=0}^{n} \{i\} = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \{i\} = \mathbb{N}$, deci $A_n \nearrow \mathbb{N}$. În plus, $\forall n \in \mathbb{N}$, A_n este mulţime finită, deci $\mu(A_n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

(ii) Arătăm mai întâi că μ este finit aditivă. Pentru aceasta, este suficient să demonstrăm că $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B), \forall A, B \subseteq \mathbb{N}$, cu $A \cap B = \emptyset$. Deosebim următoarele cazuri:

I. A, B finite. Atunci $A \cup B$ este finită, deci $\mu(A) = \mu(B) = \mu(A \cup B) = 0$, de unde $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

II. A finită, B infinită (numărabilă) sau invers. Atunci $A \cup B$ este infinită. Prin urmare, $\mu(A) = 0, \mu(B) = \infty = \mu(A \cup B)$, de unde $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

III. A, B infinite. Atunci $A \cup B$ este infinită, deci $\mu(A) = \mu(B) = \mu(A \cup B) = \infty$, de unde $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

Să arătăm că μ nu este numărabil aditivă. Presupunem, prin reducere la absurd, că μ este numărabil aditivă. Atunci μ este continuă pe şiruri ascendente de mulţimi din $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, în particular pe şirul de mulţimi $(A_n)_n, A_n \nearrow \mathbb{N}$, considerat la punctul (i). Prin urmare, $\lim\limits_{n \to \infty} \mu(A_n) = \mu(\mathbb{N})$, ceea ce este fals deoarece $\mu(A_n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$, iar $\mu(\mathbb{N}) = 0$.