Integrala Lebesgue

1. Studiaţi integrabilitatea Lebesgue a funcţiilor următoare (şi calculaţi valoarea integralei în caz afirmativ):

(i) $f : [0,2] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2, x \in \mathbb{Q} \cap [0,2] \\ x, (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}) \cap [0,2] \end{cases};$

(ii) $f : [-1,1] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x, x \in \mathbb{Q} \cap [-1,1] \\ x^3, (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}) \cap [-1,1] \end{cases}.$

Rezolvare. (i) Fie $g : [0,2] \to \mathbb{R}, g(x) = x, \forall x \in [0,2]$. Evident, g este continuă pe $[0,2]$, deci $g \in \mathcal{R}([0,2])$ (g este integrabilă Riemann pe $[0,2]$). Prin urmare, $g \in \mathcal{L}([0,2])$ (g este integrabilă Lebesgue pe $[0,2]$) şi

$$(R)\int_0^2 g(x)dx = (L)\int_{[0,2]} g d\mu. \tag{1}$$

Să observăm că $f = g$ μ-a.p.t. pe $[0,2]$ (μ este măsura Lebesgue) (mulţimea $\mathbb{Q} \cap [0,2]$ este numărabilă, deci Lebesgue măsurabilă şi $\mu(\mathbb{Q} \cap [0,2]) = 0$ iar $f(x) = g(x), \forall x \in (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}) \cap [0,2]$).

Întrucât $g \in \mathcal{L}([0,2])$, rezultă că $f \in \mathcal{L}([0,2])$ şi

$$(L)\int_{[0,2]} f d\mu = (L)\int_{[0,2]} g d\mu \tag{2}$$

Din (1) şi (2) rezultă că $(L)\int_{[0,2]} f d\mu = (R)\int_0^2 g(x)dx = (R)\int_0^2 x dx = \frac{x^2}{2}/_0^2 = 2$.

(ii) Fie $g : [-1,1] \to \mathbb{R}, g(x) = x^3, \forall x \in [-1,1]$. Evident, g este continuă pe $[-1,1]$, deci $g \in \mathcal{R}([-1,1])$. Prin urmare, $g \in \mathcal{L}([-1,1])$ şi

$$(R)\int_{-1}^1 g(x)dx = (L)\int_{[-1,1]} g d\mu. \tag{3}$$

Să observăm că $f = g$ μ-a.p.t. pe $[-1,1]$ (μ este măsura Lebesgue) (mulţimea $\mathbb{Q} \cap [-1,1]$ este numărabilă, deci Lebesgue măsurabilă şi $\mu(\mathbb{Q} \cap [-1,1]) = 0$ iar $f(x) = g(x), \forall x \in (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}) \cap [-1,1]$).

Întrucât $g \in \mathcal{L}([-1,1])$, rezultă că $f \in \mathcal{L}([-1,1])$ şi

$$(L)\int_{[-1,1]} f d\mu = (L)\int_{[-1,1]} g d\mu \tag{4}$$

Din (1) şi (2) rezultă că $(L)\int_{[0,2]} f d\mu = (R)\int_{-1}^1 g(x)dx = (R)\int_{-1}^1 x^3 dx = \frac{x^4}{4}/_{-1}^1 = 0$.

2. Cercetaţi dacă funcţia $\aleph_{\mathbb{Q} \cap [0,\infty)}$ este integrabilă Lebesgue pe $[0,\infty)$.

Rezolvare. **Metoda I**. Evident, funcţia $\aleph_{\mathbb{Q}\cap[0,\infty)}$ are forma $\aleph_{\mathbb{Q}\cap[0,\infty)}(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q}\cap[0,\infty) \\ 0, (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})\cap[0,\infty) \end{cases}, \forall x \in [0,\infty)$. Observăm că este o funcţie $\mathcal{M}$-etajată, nenegativă, deci $\exists \int_{[0,\infty)} fd\mu = 1\cdot\mu(\mathbb{Q}\cap[0,\infty)) + 0\cdot\mu((\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})\cap[0,\infty)) = \mu(\mathbb{Q}\cap[0,\infty)) = 0 < \infty$, deci $\aleph_{\mathbb{Q}\cap[0,\infty)} \in \mathcal{L}([0,\infty))$.

Metoda II. Fie $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}, g(x) = 0, \forall x \in [0,\infty)$. Evident, $g \in \mathcal{L}([0,\infty))$ şi $(L)\int_{[0,\infty)} gd\mu = 0$.

Să observăm că $f = g$ μ-a.p.t. pe $[0,\infty)$ (mulţimea $\mathbb{Q}\cap[0,\infty)$ este numărabilă, deci Lebesgue măsurabilă şi $\mu(\mathbb{Q}\cap[0,\infty)) = 0$ iar $f(x) = g(x), \forall x \in (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})\cap[0,\infty)$).

Întrucât $g \in \mathcal{L}([0,\infty))$, rezultă că $f \in \mathcal{L}([0,\infty))$ şi $(L)\int_{[0,\infty)} fd\mu = (L)\int_{[0,\infty)} gd\mu = 0 < \infty$, deci $\aleph_{\mathbb{Q}\cap[0,\infty)} \in \mathcal{L}([0,\infty))$.

3. Cercetaţi integrabilitatea Lebesgue pe $[0,\infty)$ a funcţiei $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}, f = \aleph_{\bigcup_{n=1}^{\infty}[n,n+\frac{1}{n^3}]}$.

Rezolvare. Evident, $f(x) = \begin{cases} 1, x \in \bigcup_{n=1}^{\infty}[n,n+\frac{1}{n^3}] \\ 0, x \in [0,\infty)\backslash \bigcup_{n=1}^{\infty}[n,n+\frac{1}{n^3}] \end{cases}, \forall x \in [0,\infty)$.

Observăm că $\aleph_{\bigcup_{n=1}^{\infty}[n,n+\frac{1}{n^3}]}$ este o funcţie $\mathcal{M}$-etajată, nenegativă, deci

$$\begin{aligned}\exists \int_{[0,\infty)} fd\mu &= 1\cdot\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}[n,n+\frac{1}{n^3}]) + 0\cdot\mu([0,\infty)\backslash \bigcup_{n=1}^{\infty}[n,n+\frac{1}{n^3}]) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}[n,n+\frac{1}{n^3}]) \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\mu([n,n+\frac{1}{n^3}]) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3} < \infty\end{aligned}$$

(am folosit faptul că măsura Lebesgue μ este numărabil subaditivă, deoarece nu toate intervalele $[n,n+\frac{1}{n^3}], n \geq 1$, sunt disjuncte două câte două: de exemplu, $[1,1+\frac{1}{1^3}]$ şi $[2,2+\frac{1}{2^3}]$ au punctul 2 comun).

În concluzie, $\aleph_{\bigcup_{n=1}^{\infty}[n,n+\frac{1}{n^3}]}$ este integrabilă Lebesgue pe $[0,\infty)$.

4. Arătaţi că pentru şirul de funcţii $(f_n)_n, f_n(x) = n\cdot\aleph_{(0,\frac{1}{n}]}(x), \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in (0,1]$, inegalitatea din lema lui Fatou este strictă.

Rezolvare. Evident, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in (0,1], f_n(x) = \begin{cases} n, x \in (0,\frac{1}{n}] \\ 0, \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}$. Observăm că $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f_n este o funcţie $\mathcal{M}$-etajată, nenegativă, deci $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists \int_{(0,1]} f_n d\mu = n\cdot\mu((0,\frac{1}{n}]) + 0\cdot\mu((\frac{1}{n},1]) = n\cdot\frac{1}{n} = 1$, deci $\liminf_n \int_{(0,1]} f_n d\mu = 1$.

Pe de altă parte, remarcăm că $\liminf_n f_n(x) = 0, \forall x \in (0,1]$, de unde

$$\int_{(0,1]} \liminf_n f_n d\mu = 0 < 1 = \liminf_n \int_{(0,1]} f_n d\mu.$$

5. Fie funcţia $f:(0,1]\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} 0, x\in\mathbb{Q}\cap[0,1) \\ [\frac{1}{x}], x\in(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})\cap[0,1)\end{cases}$. Calculaţi $(L)\int_{(0,1]} fd\mu$.

Rezolvare. Fie $g:(0,1]\to\mathbb{R}, g(x)=[\frac{1}{x}], \forall x\in(0,1]$. Atunci, $\forall x\in(0,1], g(x)=\begin{cases} ... \\ n, x\in(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}] \\ ...\end{cases}$. Evident, g este continuă pe $(0,1]\backslash\{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ şi cum mulţimea $\{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ este numărabilă, rezultă că g este continuă μ-a.p.t., deci Lebesgue măsurabilă pe $(0,1]$.

Pe de altă parte $f=g$ μ-a.p.t. pe $(0,1]$, deci f este Lebesgue măsurabilă pe $(0,1]$. Deoarece f este nenegativă, $\exists$ $(L)\int_{(0,1]} fd\mu=(L)\int_{(0,1]} gd\mu$.

Deoarece $(0,1]=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]$, rezultă că

$$\begin{aligned}(L)\int_{(0,1]} fd\mu &= \int_{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]} gd\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]} nd\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\mu((\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}])\cdot n= \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})\cdot n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}=\infty\end{aligned}$$

(am folosit faptul că integrala nedefinită este o măsură, deci este σ-aditivă).

6. (i) Arătaţi că seria de funcţii $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\cdot\aleph_{[n,n+\frac{1}{3^n}]}$ converge punctual pe $[0,\infty)$;

(ii) Folosind acest rezultat, calculaţi $(L)\int_{[0,\infty)} fd\mu$, unde f este suma seriei în sens punctual.

Rezolvare. (i) $\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall x\in[0,\infty)$, fie $f_n(x)=2^n\cdot\aleph_{[n,n+\frac{1}{3^n}]}(x)=\begin{cases} 2^n, x\in[n,n+\frac{1}{3^n}] \\ 0, x\in[0,n)\cup(n+\frac{1}{3^n},\infty)\end{cases}$.

Folosind Caracterizarea lui Cauchy a convergenţei punctuale a seriilor de funcţii, vom arăta, echivalent, că are loc proprietatea:

$\forall x\in[0,\infty), \forall\varepsilon>0, \exists n_0(\varepsilon,x)\in\mathbb{N}^*$, astfel încât, $\forall n\geq n_0, \forall p\in\mathbb{N}^*, |f_{n+1}(x)+ .. +f_{n+p}(x)|<\varepsilon$.

Într-adevăr, $\forall x\in[0,\infty), \forall\varepsilon>0$, fie $n_0(\varepsilon,x)=[x]+1(\in\mathbb{N}^*)$ şi fie $\forall n\geq n_0$. Atunci, $n>x$, deci, cu atât mai mult, $n+1>x, ..., n+p>x, \forall p\in\mathbb{N}^*$. Prin urmare, din definiţia lui $f_n, f_{n+1}(x)=...=f_{n+p}(x)=0$, de unde $|f_{n+1}(x)+ .. +f_{n+p}(x)|=0<\varepsilon$.

(ii) Observăm că $\forall n\in\mathbb{N}^*, f_n$ este $\mathcal{M}$-etajată, nenegativă, deci este Lebesgue măsurabilă şi atunci pentru $\forall n\in\mathbb{N}^*$,

$$\exists(L)\int_{[0,\infty)} f_n d\mu=2^n\cdot\mu([n,n+\frac{1}{3^n}])+0\cdot\mu([0,n)\cup(n+\frac{1}{3^n},\infty))=2^n\cdot\frac{1}{3^n}=(\frac{2}{3})^n,$$

Deoarece seria de funcţii $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \aleph_{[n,n+\frac{1}{3^n}]}$ converge punctual pe $[0,\infty)$, rezultă că

$$(L)\int_{[0,\infty)} f d\mu = (L)\sum_{n=1}^{\infty}\int_{[0,\infty)} f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{3})^n = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} - 1 = 2.$$

7. Studiaţi integrabilitatea Riemann şi Lebesgue a funcţiilor:

(i) $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sin^2 x - \sin x - 6}, x \in (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})\cap[0,2\pi] \\ \frac{\cos x}{\sin x + 2}, x\in\mathbb{Q}\cap[0,2\pi] \end{cases}$;

(ii) $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3+\sin x}, x \in (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})\cap[0,2\pi] \\ \frac{1}{3-\sin x}, x\in\mathbb{Q}\cap[0,2\pi] \end{cases}$

şi, în caz afirmativ, calculaţi valoarea integralelor corespunzătoare.

Aceeaşi problemă pentru funcţiile:

(iii) $f:[0,1]\to\mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x, x \in (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})\cap[0,1] \\ 1-x, x\in\mathbb{Q}\cap[0,1] \end{cases}$;

(iv) $f:[-1,1]\to\mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{2}{5}-x^2, x \in (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})\cap[-1,1] \\ x^2, x\in\mathbb{Q}\cap[-1,1] \end{cases}$;

(v) $f:[0,\frac{\pi}{2}]\to\mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \sin x, x \in (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})\cap[0,\frac{\pi}{2}] \\ \sin^3 x, x\in\mathbb{Q}\cap[0,\frac{\pi}{2}] \end{cases}$.

Rezolvare. (i) *Integrabilitatea Riemann.*

Constatăm că funcţia f este mărginită pe $[0,2\pi]$ (1):

$\cdot\ \forall x\in(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})\cap[0,2\pi], f(x) = \frac{1}{\sin^2 x-\sin x-6} = \frac{1}{(\sin x-3)(\sin x+2)}$. Întrucât $-1\leq \sin x\leq 1, \forall x\in\mathbb{R}$, rezultă că $|f(x| = |\frac{1}{(\sin x-3)(\sin x+2)}| = \frac{1}{(3-\sin x)(\sin x+2)} \leq \frac{1}{3-\sin x}\leq\frac{1}{2}$;

$\cdot\ \forall x\in\mathbb{Q}\cap[0,2\pi], f(x) = \frac{\cos x}{\sin x+2}$. Atunci $|f(x| = |\frac{\cos x}{\sin x+2}| = \frac{|\cos x|}{\sin x+2} \leq \frac{1}{\sin x+2}\leq 1$.

Apoi, f fiind o funcţie de tip Dirichlet, este continuă în $x_0\in[0,2\pi]$ dacă şi numai dacă $\frac{1}{\sin^2 x_0-\sin x_0-6} = \frac{\cos x_0}{\sin x_0+2}$, adică, echivalent, $\cos x_0(\sin x_0-3) = 1$. Aceasta implică $(1-\sin^2 x_0)(\sin x_0-3) = 1$, deci, privită ca o ecuaţie de gradul 3 în $\sin x_0$, rezultă că $\sin x_0$ poate avea cel mult 3 valori reale. Întrucât, în general, ecuaţia $\sin x = a$ are soluţiile de forma $x_k = (-1)^k\arcsin a\pm k\pi, k\in\mathbb{Z}$,, rezultă că ecuaţia $\cos x_0(\sin x_0-3)=1$ poate avea cel mult o infinitate numărabilă de soluţii, adică puncte de continuitate ale lui f, în rest funcţia fiind discontinuă. Prin urmare, f nu este continuă μ-a.p.t. pe $[0,2\pi]$ (2).

Din (1) şi (2) rezultă (conform Teoremei lui Lebesgue) că $f\notin\mathcal{R}([0,2\pi])$.

Integrabilitatea Lebesgue.

Fie $g:[0,2\pi]\to\mathbb{R}, g(x) = \frac{1}{\sin^2 x-\sin x-6}, \forall x\in[0,2\pi]$. Observăm că funcţia g este bine definită deoarece $\sin^2 x-\sin x-6 = (\sin x-3)(\sin x+2)\neq 0$.

În plus, g este continuă pe $[0,2\pi]$, deci $g\in\mathcal{R}([0,2\pi])$. În consecinţă, $g\in\mathcal{L}([0,2\pi])$ şi

$$(R)\int_0^{2\pi} g(x)dx = (L)\int_{[0,2\pi]} g d\mu. \tag{5}$$

Evident, $f = g$ μ-a.p.t. Deoarece $g \in \mathcal{L}([0,2\pi])$, rezultă că $f \in \mathcal{L}([0,2\pi])$ şi

$$(L)\int_{[0,2\pi]} f d\mu = (L)\int_{[0,2\pi]} g d\mu. \tag{6}$$

Din (5) şi (6) obţinem că

$$\begin{aligned}
(L)\int_{[0,2\pi]} f d\mu &= (R)\int_0^{2\pi} g(x)dx = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sin^2 x - \sin x - 6}dx = \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{\sin x - 3} - \frac{1}{\sin x + 2}\right)dx = \\
&= \int_0^{2\pi}\frac{1}{\sin x - 3}dx - \int_0^{2\pi}\frac{1}{\sin x + 2}dx = \\
&= \left(\int_0^{\pi}\frac{1}{\sin x - 3}dx + \int_{\pi}^{2\pi}\frac{1}{\sin x - 3}dx\right) - \left(\int_0^{\pi}\frac{1}{\sin x + 2}dx + \int_{\pi}^{2\pi}\frac{1}{\sin x + 2}dx\right).
\end{aligned}$$

Vom calcula pe rând cele patru integrale. Pentru aceasta, vom face schimbarea de variabilă $tg\frac{x}{2} = t$, de unde

$$x = 2arctgt, dx = \frac{2}{1+t^2}dt, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Prin urmare,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi}\frac{1}{\sin x - 3}dx &= \int_0^{\infty}\frac{1}{\frac{2t}{1+t^2} - 3}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt = -\frac{2}{3}\int_0^{\infty}\frac{dt}{t^2 - \frac{2}{3}t + 1} = -\frac{2}{3}\int_0^{\infty}\frac{dt}{(t-\frac{1}{3})^2 + (\frac{2\sqrt{2}}{3})^2} = \\
&= -\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2\sqrt{2}}arctg\frac{t-\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}/_0^{\infty} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(arctg\infty - arctg(-\frac{1}{2\sqrt{2}})) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{\pi}{2} + arctg\frac{1}{2\sqrt{2}}).
\end{aligned}$$

Apoi, cu schimbarea de variabilă $x = \pi + y$, $\int_{\pi}^{2\pi}\frac{1}{\sin x - 3}dx = -\int_0^{\pi}\frac{1}{\sin y + 3}dy =$ $-\int_0^{\pi}\frac{1}{\sin x + 3}dx$.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi}\frac{1}{\sin x + 3}dx &= \int_0^{\infty}\frac{1}{\frac{2t}{1+t^2} + 3}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt = \frac{2}{3}\int_0^{\infty}\frac{dt}{t^2 + \frac{2}{3}t + 1} = \frac{2}{3}\int_0^{\infty}\frac{dt}{(t+\frac{1}{3})^2 + (\frac{2\sqrt{2}}{3})^2} = \\
&= \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2\sqrt{2}}arctg\frac{t+\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}/_0^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{2}}(arctg\infty - arctg(\frac{1}{2\sqrt{2}})) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{\pi}{2} - arctg\frac{1}{2\sqrt{2}}).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi}\frac{1}{\sin x + 2}dx &= \int_0^{\infty}\frac{1}{\frac{2t}{1+t^2} + 2}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt = \int_0^{\infty}\frac{dt}{t^2 + t + 1} = \int_0^{\infty}\frac{dt}{(t+\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = \\
&= \sqrt{2}arctg\frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}/_0^{\infty} = \sqrt{2}(arctg\infty - arctg\frac{1}{\sqrt{2}}) = \sqrt{2}(\frac{\pi}{2} - arctg\frac{1}{\sqrt{2}}).
\end{aligned}$$

Apoi, cu schimbarea de variabilă $x = \pi + y$, $\int_{\pi}^{2\pi} \frac{1}{\sin x + 2} dx = -\int_0^{\pi} \frac{1}{2-\sin y} dy = -\int_0^{\pi} \frac{1}{2-\sin x} dx$.

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \frac{1}{2-\sin x} dx &= \int_0^{\infty} \frac{1}{-\frac{2t}{1+t^2}+2} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int_0^{\infty} \frac{dt}{t^2-t+1} = \int_0^{\infty} \frac{dt}{(t-\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = \\ &= \sqrt{2} arctg \frac{t-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} /_0^{\infty} = \sqrt{2}(arctg \infty - arctg \frac{-1}{\sqrt{2}}) = \sqrt{2}(\frac{\pi}{2} + arctg \frac{1}{\sqrt{2}}).\end{aligned}$$

Prin urmare,

$$\begin{aligned}(L)\int_{[0,2\pi]} f d\mu &= \int_0^{\pi} \frac{1}{\sin x - 3} dx + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1}{\sin x - 3} dx - \int_0^{\pi} \frac{1}{\sin x + 2} dx - \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1}{\sin x + 2} dx = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{\pi}{2} + arctg \frac{1}{2\sqrt{2}}) - \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{\pi}{2} - arctg \frac{1}{2\sqrt{2}}) - \sqrt{2}(\frac{\pi}{2} - arctg \frac{1}{\sqrt{2}}) + \sqrt{2}(\frac{\pi}{2} + arctg \frac{1}{\sqrt{2}}) = \\ &= -\frac{\pi}{\sqrt{2}} + 2\sqrt{2} arctg \frac{1}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

În consecinţă, $f \notin \mathcal{R}([0, 2\pi])$, dar $f \in \mathcal{L}([0, 2\pi])$ şi $(L)\int_{[0,2\pi]} f d\mu = -\frac{\pi}{\sqrt{2}} + 2\sqrt{2} arctg \frac{1}{\sqrt{2}}$.

(ii) *Integrabilitatea Riemann.*

Constatăm că funcţia f este mărginită pe $[0, 2\pi]$ (1):

$\cdot$ $\forall x \in (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}) \cap [0, 2\pi], f(x) = \frac{1}{3+\sin x}$. Întrucât $-1 \leq \sin x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$, rezultă că $\frac{1}{4} \leq f(x) = \frac{1}{3+\sin x} \leq \frac{1}{2}$;

$\cdot$ $\forall x \in \mathbb{Q} \cap [0, 2\pi], f(x) = \frac{1}{3-\sin x}$. Întrucât $-1 \leq \sin x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$, rezultă că $\frac{1}{4} \leq f(x) = \frac{1}{3-\sin x} \leq \frac{1}{2}$

Apoi, f fiind o funcţie de tip Dirichlet, este continuă în $x_0 \in [0, 2\pi]$ dacă şi numai dacă $\frac{1}{3+\sin x_0} = \frac{1}{3-\sin x_0}$, adică, echivalent, $\sin x_0 = 0$. Întrucât $x_0 \in [0, 2\pi]$, aceasta implică $x_0 \in \{0, \pi, 2\pi\}$, prin urmare f este continuă doar în aceste puncte, în rest fiind discontinuă. Prin urmare, f nu este continuă μ-a.p.t. pe $[0, 2\pi]$ (2).

Din (1) şi (2) rezultă (conform Teoremei lui Lebesgue) că $f \notin \mathcal{R}([0, 2\pi])$.

Integrabilitatea Lebesgue.

Fie $g : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}, g(x) = \frac{1}{3+\sin x}, \forall x \in [0, 2\pi]$. Observăm că funcţia g este bine definită deoarece $3 + \sin x \neq 0$.

În plus, g este continuă pe $[0, 2\pi]$, deci $g \in \mathcal{R}([0, 2\pi])$. În consecinţă, $g \in \mathcal{L}([0, 2\pi])$ şi

$$(R)\int_0^{2\pi} g(x) dx = (L)\int_{[0,2\pi]} g d\mu. \tag{7}$$

Evident, $f = g$ μ-a.p.t. Deoarece $g \in \mathcal{L}([0, 2\pi])$, rezultă că $f \in \mathcal{L}([0, 2\pi])$ şi

$$(L)\int_{[0,2\pi]} f d\mu = (L)\int_{[0,2\pi]} g d\mu. \tag{8}$$

Din (7) şi (8) şi ţinând cont de calculul de la punctul (i), obţinem că

$$(L)\int_{[0,2\pi]} f d\mu = (R)\int_0^{2\pi} g(x)dx = \int_0^{2\pi} \frac{1}{3+\sin x}dx = \int_0^{\pi} \frac{1}{3+\sin x}dx + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1}{3+\sin x}dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

8. Arătaţi că dacă (în cadru general $(X, \mathcal{A}, \mu)$) o funcţie $f \in \mathcal{L}(X)$, atunci mulţimea $A = \{x; f(x) \neq 0\}$ este de măsură σ-finită.

Rezolvare. $f \in \mathcal{L}(X) \Leftrightarrow |f| \in \mathcal{L}(X) \Leftrightarrow (L)\int_X f d\mu < \infty$.
Observăm că

$$A = \{x; f(x) \neq 0\} = \{x; |f(x)| > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x; |f(x)| \geq \frac{1}{n}\}.$$

Prin urmare, $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, unde $A_n = \{x; |f(x)| \geq \frac{1}{n}\}, \forall n \geq 1$. Rămâne să arătăm că $\mu(A_n) < \infty, \forall n \geq 1$.

Presupunem, prin reducere la absurd, că $\exists n_0 \geq 1$ astfel ca $\mu(A_{n_0}) = \infty$. Atunci

$$\int_X f d\mu \geq \int_{A_{n_0}} f d\mu \geq \frac{1}{n_0}\mu(A_{n_0}) = \infty,$$

de unde $\int_X f d\mu = \infty$, ceea ce este fals.