1. Fie f, g două funcţii mărginite şi integrabile Lebesgue pe o mulţime A oarecare, nevidă dintr-un spaţiu $(X, \mathcal{A}, \mu)$ (cadru general). Arătaţi că funcţiile f^2, g^2, fg sunt de asemenea integrabile Lebesgue pe A şi, mai mult, $\int_A |fg| d\mu \leq \frac{1}{2}[\int_A f^2 d\mu + \int_A g^2 d\mu]$.

Rezolvare. Fie $M = \max\{\sup\limits_{x\in A}|f(x)|, \sup\limits_{x\in A}|g(x)|\}$. Deoarece f, g sunt mărginite pe A, rezultă că $M \in \mathbb{R}_+$.

Evident, f este măsurabilă Lebesgue pe A, deci f^2 este de asemenea măsurabilă Lebesgue pe A şi $0 \leq f^2 \leq M \cdot |f|$ pe A. Deoarece $f \in \mathcal{L}(A)$, aceasta înseamnă, echivalent, că $|f| \in \mathcal{L}(A)$, deci $\int_A |f| d\mu < \infty$, de unde $\int_A M \cdot |f| d\mu < \infty$, ceea ce antrenează că $f^2 \in \mathcal{L}(A)$. Analog, $g^2 \in \mathcal{L}(A)$.

Pe baza aceloraşi considerente, deoarece $f+g$ şi $f-g$ sunt evident mărginite şi integrabile Lebesgue pe A, obţinem că $(f+g)^2 \in \mathcal{L}(A), (f-g)^2 \in \mathcal{L}(A)$. Acum, întrucât $fg = \frac{1}{4}[(f+g)^2 - (f-g)^2]$ şi $(\mathcal{L}(A), +, \cdot)$ este spaţiu liniar, rezultă că $fg \in \mathcal{L}(A)$.

În plus, observăm că

$$0 \leq \int_A (|f|-|g|)^2 d\mu = \int_A [f^2 - 2|f|\cdot|g| + g^2] d\mu = \int_A f^2 d\mu + \int_A g^2 d\mu - 2\int_A |fg| d\mu,$$

de unde $\int_A |fg| d\mu \leq \frac{1}{2}[\int_A f^2 d\mu + \int_A g^2 d\mu]$.

2. Fie $f : (0, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^{\frac{1}{p}} (\ln \frac{1}{x})^{\frac{2}{p}}}, \forall x \in (0, \frac{1}{2}]$. Arătaţi că $f \in \mathcal{L}^p((0, \frac{1}{2}]), \forall p \geq 1$.

Rezolvare. Evident, f este continuă, deci Lebesgue măsurabilă pe $(0, \frac{1}{2}]$. Rămâne să arătăm că $|f|^p$ este integrabilă Lebesgue pe $(0, \frac{1}{2}]$. Deoarece $|f|^p$ este măsurabilă Lebesgue pe $(0, \frac{1}{2}]$ şi $\forall[\alpha, \beta] \subset (0, \frac{1}{2}]$, $|f|^p \in \mathbb{R}([\alpha, \beta])$, rezultă că $|f|^p \in \mathcal{L}((0, \frac{1}{2}])$ dacă şi numai dacă $|f|^p \in \mathcal{R}((0, \frac{1}{2}])$, ceea ce înseamnă, echivalent, să arătăm că $\int_{0+0}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x(\ln \frac{1}{x})^2} dx$ este convergentă.

Într-adevăr,

$$\int_{0+0}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x(\ln \frac{1}{x})^2} dx \overset{\frac{1}{x}=t}{=} \int_{\infty}^{2} \frac{t}{(\ln t)^2} \cdot (-\frac{1}{t^2}) dt = \int_2^{\infty} \frac{1}{t(\ln t)^2} dt = -\frac{1}{\ln t}/_2^{\infty} = \frac{1}{\ln 2} < \infty.$$

3. Fie $f : (0, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}, f(x) = \ln \frac{1}{x}, \forall x \in (0, \frac{1}{2}]$. Arătaţi că $f \in \mathcal{L}^p((0, \frac{1}{2}]), \forall p \geq 1$.

Rezolvare. Evident, f este continuă, deci Lebesgue măsurabilă pe $(0, \frac{1}{2}]$. Rămâne să arătăm că $|f|^p$ este integrabilă Lebesgue pe $(0, \frac{1}{2}]$. Deoarece $|f|^p$ este măsurabilă Lebesgue pe $(0, \frac{1}{2}]$ şi $\forall[\alpha, \beta] \subset (0, \frac{1}{2}]$, $|f|^p \in \mathbb{R}([\alpha, \beta])$, rezultă că $|f|^p \in \mathcal{L}((0, \frac{1}{2}])$ dacă şi numai dacă $|f|^p \in \mathcal{R}((0, \frac{1}{2}])$, ceea ce înseamnă, echivalent, să arătăm că $\int_{0+0}^{\frac{1}{2}} |\ln \frac{1}{x}|^p dx$ este convergentă.

Într-adevăr,

$$\int_{0+0}^{\frac{1}{2}} |\ln\frac{1}{x}|^p dx \overset{\frac{1}{x}=t}{=} \int_{\infty}^{2} |\ln t|^p \cdot (-\frac{1}{t^2})dt = \int_2^{\infty} \frac{(\ln t)^p}{t^2}dt.$$

Ultima integrală are aceeaşi natură cu seria numerică cu termeni pozitivi $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(\ln n)^p}{n^2}$.

$\forall n \geq 2$, fie $a_n = \frac{(\ln n)^p}{n^2}$. Arătăm că şirul $(a_n)_n$ este descrescător. Într-adevăr, funcţia asociată este $f : [2,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{(\ln x)^p}{x^2}, \forall x \in [2,\infty)$. f este derivabilă pe $[2,\infty)$ şi $\forall x \in [2,\infty), f'(x) = \frac{(\ln x)^{p-1}[p-\ln(x^2)]}{x^3}$. Evident, $f'(x) < 0, \forall x > e^{\frac{p}{2}}$, ceea ce înseamnă că f este strict descrescătoare pe $(e^{\frac{p}{2}}, +\infty)$, deci şirul $(a_n)_{n\geq[e^{\frac{p}{2}}]+1}$ este descrescător.

În consecinţă, conform Criteriului de condensare al lui Cauchy, rezultă că seria $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(\ln n)^p}{n^2}$ are aceeaşi natură cu seria $\sum\limits_{n=2}^{\infty} 2^n \frac{(\ln(2^n))^p}{(2^n)^2} = (\ln 2)^p \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n^p}{2^n}$ care este convergentă conform Criteriului raportului ($\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^p}{2^{n+1}}}{\frac{n^p}{2^n}} = \frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^p = \frac{1}{2} < 1$).

4. (**Funcţia lui Riemann**)

Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 0, x = 0 \text{ sau } x \in (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \cap [0,1] \\ \frac{1}{q}, x = \frac{p}{q}, (p,q) = 1, p,q \in \mathbb{N}^*, p \leq q \text{ (adică } x \in \mathbb{Q} \cap (0,1]). \end{cases}$

Arătaţi că:

(i) f este continuă în 0 şi pe $(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \cap [0,1]$ şi discontinuă în rest (adică pe $\mathbb{Q} \cap (0,1]$);

(ii) Studiaţi integrabilitatea Riemann şi Lebesgue a lui f pe $[0,1]$ (şi calculaţi valoarea integralei în caz afirmativ).

Rezolvare. (i) I. Arătăm că f este discontinuă pe $\mathbb{Q} \cap (0,1]$). Într-adevăr, dacă $x_0 \in \mathbb{Q} \cap (0,1]$, atunci $x = \frac{p}{q}, (p,q) = 1, p,q \in \mathbb{N}^*, p \leq q$, deci $f(x_0) = \frac{1}{q}$. Evident, $\exists (x_n)_n \subset (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \cap (0,1]), x_n \to x_0$. Prin urmare, $f(x_n) = 0 \nrightarrow f(x_0) = \frac{1}{q}$, deci f este discontinuă în x_0.

II. Arătăm că f este continuă pe $(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \cap (0,1])$. Fie $x_0 \in (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \cap (0,1]$ oarecare (deci $f(x_0) = 0$). Considerăm $\varepsilon > 0$ arbitrar. Evident, $\exists q_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $\frac{1}{q_\varepsilon} < \varepsilon$. Pentru orice $q = \overline{1, q_\varepsilon}, \exists m \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $x_0 \in (\frac{m}{q}, \frac{m+1}{q}) \overset{\text{not.}}{\equiv} I_q$. Aceasta înseamnă că $\forall q = \overline{1, q_\varepsilon}, I_q$ nu conţine niciun număr raţional cu numitorul q.

Fie $I = \bigcap\limits_{q=1}^{q_\varepsilon} I_q$. Evident, $\forall q = \overline{1, q_\varepsilon}, I_q \in \mathcal{V}(x_0)$, de unde $I \in \mathcal{V}(x_0)$. Fie acum $x \in I$, oarecare.

$\cdot$ Dacă $x \in I \cap (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$, atunci $f(x) = 0$ şi cum $f(x_0) = 0$, rezultă că $|f(x) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$.

$\cdot$ Dacă $x \in I \cap \mathbb{Q}$, atunci $x = \frac{p'}{q'}, (p',q') = 1, p',q' \in \mathbb{N}^*, p' \leq q'$. Deoarece $x \in I = \bigcap\limits_{q=1}^{q_\varepsilon} I_q$, deci $x \in I_q, \forall q = \overline{1, q_\varepsilon}$. Dacă $q' \leq q_\varepsilon$, atunci $x \in I_{q'}$. Dar $I_{q'}$

nu conţine niciun număr raţional cu numitorul q', contradicţie, întrucât $x = \frac{p'}{q'}$. Prin urmare, $q' > q_\varepsilon$ (deci $q' \geq q_\varepsilon + 1$), ceea ce antrenează $|f(x) - f(x_0)| = |f(x)| = f(\frac{p'}{q'}) = \frac{1}{q'} \leq \frac{1}{q_\varepsilon+1} < \frac{1}{q_\varepsilon} < \varepsilon$.

Prin urmare, $\forall \varepsilon > 0, \exists I \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel ca $\forall x \in I$, are loc $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, ceea ce înseamnă că f este continuă în x_0.

Analog, f este continuă în 0.

(ii) Din (i) rezultă că f este continuă μ-a.p.t., μ fiind măsura Lebesgue pe $[0,1]$. Deoarece f este mărginită pe $[0,1]$ ($0 \leq f(x) \leq 1, \forall x \in [0,1]$), rezultă, conform Teoremei lui Lebesgue, că $f \in \mathcal{R}([0,1])$. Prin urmare, $f \in \mathcal{L}([0,1])$ şi, mai mult, $(L)\int_{[0,1]} f d\mu = (R)\int_0^1 f(x)dx$.

Întrucât $f = 0$ μ-a.p.t. pe $[0,1]$, avem $(L)\int_{[0,1]} f d\mu = 0$, deci $(R)\int_0^1 f(x)dx = 0$.

5. Fie şirul de funcţii $(f_n)_n, f_n(x) = n^{3/p}x^{2/p}e^{-n^2x^2}, \forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}$, unde $p \geq 1$ este arbitrar, fixat. Arătaţi că $f_n \underset{[0,1]}{\xrightarrow{p}} 0$ şi $f_n \underset{[0,1]}{\overset{||\cdot||_p}{\not\to}} 0$.

Rezolvare. Arătăm că $f_n \underset{[0,1]}{\xrightarrow{p}} 0$. Într-adevăr, dacă $x = 0$, atunci $f_n(0) = 0 \to 0$. Dacă $x \in (0,1]$, atunci

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} n^{3/p}x^{2/p}e^{-n^2x^2} = x^{2/p}\lim_{n\to\infty}\frac{n^{3/p}}{e^{n^2x^2}} = 0$$

(se aplică succesiv regula lui l'Hospital pentru limita de funcţii $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{t^{3/p}}{e^{t^2x^2}}$).

Acum, $||f_n||_p = \int_0^1 n^3x^2e^{-n^2px^2}dx$ ($(g_n)_n, g_n(x) = n^3x^2e^{-n^2px^2}, x \in [0,1], n \in \mathbb{N}$ este un şir de funcţii integrabile Riemann, deci integrabile Lebesgue pe $[0,1]$ şi $\forall n \in \mathbb{N}$, $(L)\int_{[0,1]} g_n d\mu = (R)\int_0^1 g_n(x)dx$).

Facem schimbarea de variabilă $\sqrt{p}nx = t$ şi atunci

$$||f_n||_p^p = \int_0^{n\sqrt{p}} n^3\frac{t^2}{pn^2}e^{-t^2}\frac{1}{n\sqrt{p}}dt = \frac{1}{p\sqrt{p}}\int_0^{n\sqrt{p}} t^2e^{-t^2}dt.$$

Integrând prin părţi, obţinem că

$$||f_n||_p^p = \frac{1}{p\sqrt{p}}\int_0^{n\sqrt{p}} t^2e^{-t^2}dt = \frac{ne^{-pn^2}}{2p} + \frac{1}{2p\sqrt{p}}\int_0^{n\sqrt{p}} e^{-t^2}dt,$$

de unde

$$\lim_{n\to\infty}||f_n||_p^p = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{ne^{-pn^2}}{2p} + \frac{1}{2p\sqrt{p}}\int_0^{n\sqrt{p}} e^{-t^2}dt\right) = \frac{1}{2p\sqrt{p}}\int_0^{\infty} e^{-t^2}dt \overset{\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}{=} \frac{\sqrt{\pi}}{4p\sqrt{p}} \neq 0.$$

În consecinţă, $\lim\limits_{n\to\infty}||f_n||_p \neq 0$.

6. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \forall x\in\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} 1, x\in \overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}}[n,n+\frac{1}{n}] \\ 0, x\notin \overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}}[n,n+\frac{1}{n}] \end{cases}$.

Arătaţi că $f\in\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$, dar $f\notin\mathcal{L}^p(\mathbb{R}), \forall p\geq 1$.

Rezolvare. Evident, $\forall p\geq 1, |f|^p=|f|=f$ este $\mathcal{M}$-etajată şi nenegativă, deci este Lebesgue măsurabilă pe $\mathbb{R}$ şi

$$\begin{aligned}\exists\int_{\mathbb{R}}|f|^p d\mu &= 1\cdot\mu(\overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}}[n,n+\frac{1}{n}])+0\cdot\mu(c(\overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}}[n,n+\frac{1}{n}]))=\mu(\overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}}[n,n+\frac{1}{n}])= \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\mu([n,n+\frac{1}{n}])=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty,\end{aligned}$$

deci $f\notin\mathcal{L}^p(\mathbb{R}), \forall p\geq 1$ (s-a folosit faptul că μ este σ-aditivă iar intervalele $[n,n+\frac{1}{n}], n\in\mathbb{N}^*$ sunt două câte două disjuncte, cu excepţia intervalelor $[1,2]$ şi $[2,2+\frac{1}{2}]$, ceea nu schimbă nimic, deoarece $\mu(\{2\})=0$).

Pe de altă parte, observăm că $||f||_\infty = ess\sup|f| = \inf\{\alpha\in\overline{\mathbb{R}}; |f|\leq\alpha$ μ-a.p.t.$\}=1<\infty$, deci $f\in\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$.

7. Fie şirul de funcţii $(f_n)_n, \forall x\in(1,\infty), \forall n\in\mathbb{N}^*, f_n(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^{2/p}}+\frac{1}{n^{1/p}}, x\in(1,n] \\ \frac{1}{x^{2/p}}, x\in(n,\infty)\end{cases}$,

unde $p\geq 1$ este arbitrar, fixat. Arătaţi că $f_n \underset{(1,\infty)}{\overset{u}{\to}} f, f\in\mathcal{L}^p((1,\infty))$, $f_n\in\mathcal{L}^p((1,\infty)), \forall n\in\mathbb{N}^*$, $f_n \underset{(1,\infty)}{\overset{||\cdot||_p}{\not\to}} f$.

Rezolvare. Observăm că $|f_n(x)-f(x)|\leq\frac{1}{n^{1/p}}, \forall x\in(1,\infty), \forall n\in\mathbb{N}^*$. Întrucât $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{1/p}}=0$, conform Criteriului majorării de la şiruri de funcţii, obţinem că $f_n \underset{(1,\infty)}{\overset{u}{\to}} f, f(x)=\frac{1}{x^{2/p}}, \forall x\in(1,\infty)$.

Evident, f este mărginită pe $(1,\infty)$ $(0<f(x)<1, \forall x\in(1,\infty))$ şi f este continuă pe $(1,\infty)$, deci este Lebesgue măsurabilă pe $(1,\infty)$ şi $f\in\mathcal{R}([\alpha,\beta]), \forall[\alpha,\beta]\subset(1,\infty)$. Aceleaşi proprietăţi le posedă $|f|^p, \forall p\geq 1$. Mai mult,

$$\int_{(1,\infty)}|f|^p d\mu=\int_1^\infty|f(x)|^p dx=\int_1^\infty\frac{1}{x^2}dx=1<\infty,$$

deci $f\in\mathcal{L}^p((1,\infty))$.

De asemenea, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, funcţia $g_n:(1,\infty)\to\mathbb{R}, \forall x\in(1,\infty), g_n(x)=|f_n(x)-f(x)|^p=\begin{cases}\frac{1}{n}, x\in(1,n] \\ 0, x\in(n,\infty)\end{cases}$ este nenegativă şi $\mathcal{M}$-etajată, deci Lebesgue măsurabilă pe $(1,\infty)$ şi

$$\exists(L)\int_{(1,\infty)}g_n d\mu=\frac{1}{n}\cdot\mu((1,n])+0\cdot\mu((n,\infty))=\frac{1}{n}(n-1)<\infty,$$

ceea ce înseamnă că $f_n - f \in \mathcal{L}^p((1,\infty))$. Deoarece $f \in \mathcal{L}^p((1,\infty))$ iar $\mathcal{L}^p((1,\infty))$ este spaţiu liniar, rezultă că $f_n = f_n - f + f \in \mathcal{L}^p((1,\infty)), \forall n \in \mathbb{N}^*$.

În plus, $||f_n - f||_p^p = \int_{(1,\infty)} |f_n - f|^p d\mu = \int_{(1,\infty)} g_n d\mu = \frac{1}{n}(n-1) \nrightarrow 0$, deci $||f_n - f||_p \nrightarrow 0$ şi în consecinţă $f_n \underset{(1,\infty)}{\overset{||\cdot||_p}{\nrightarrow}} f$.

8. Fie $x_0 \in (0,1)$ arbitrar, fixat şi fie $\mathcal{M}_0$, familia tuturor submulţimilor lui $(0,1)$ care sunt Lebesgue măsurabile. Pe $\mathcal{M}_0$ definim $\lambda(A) = \begin{cases} 1, x_0 \in A \\ 0, x_0 \notin A \end{cases}$, $\forall A \in \mathcal{M}_0$. Arătaţi că λ este o măsură care nu este absolut continuă în raport cu măsura Lebesgue μ.

Rezolvare. Evident, λ este o măsură şi $\mu(\{x_0\}) = 0$, dar $\lambda(\{x_0\}) \neq 0$, deci λ nu este absolut continuă în raport cu μ.

9. Arătaţi că dacă în $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$, unde $p \geq 1$ este arbitrar, fixat, are loc

$$||f+g||_p^2 + ||f-g||_p^2 = 2(||f||_p^2 + ||g||_p^2), \forall f,g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n) \qquad (*)$$

(legea paralelogramului), atunci în mod necesar $p = 2$.

Rezolvare. $\forall f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n), ||f||_p^2 = (\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p d\mu)^{\frac{2}{p}}$.

Fie $A, B \subset \mathbb{R}^n$ două mulţimi disjuncte astfel încât $\mu(A) = \mu(B) = 1$ (evident, există astfel de mulţimi).

Fie de asemenea $f = \aleph_A$ şi $g = \aleph_B$. Evident, $|\aleph_E|^p = \aleph_E, \forall E \subseteq \mathbb{R}^n, \forall p \geq 1$.

Egalitatea $(*)$ se rescrie

$$\begin{aligned}
[\int_{\mathbb{R}^n} |\aleph_A + \aleph_B|^p d\mu)^{\frac{2}{p}} + \int_{\mathbb{R}^n} |\aleph_A - \aleph_B|^p d\mu]^{\frac{2}{p}} &= 2[\int_{\mathbb{R}^n} |\aleph_A|^p d\mu)^{\frac{2}{p}} + \int_{\mathbb{R}^n} |\aleph_B|^p d\mu)^{\frac{2}{p}}] = \qquad (**) \\
&= 2[\int_{\mathbb{R}^n} \aleph_A d\mu)^{\frac{2}{p}} + \int_{\mathbb{R}^n} \aleph_B d\mu)^{\frac{2}{p}}] = 2[\mu(A)^{\frac{2}{p}} + \mu(B)^{\frac{2}{p}}] = 4.
\end{aligned}$$

Prin urmare, ţinând seama de faptul că integrala nedefinită este o măsură iar mulţimile A, B sunt disjuncte, $(**)$ devine:

$$\begin{aligned}
[\int_{\mathbb{R}^n} |\aleph_A + \aleph_B|^p d\mu)^{\frac{2}{p}} + \int_{\mathbb{R}^n} |\aleph_A - \aleph_B|^p d\mu]^{\frac{2}{p}} &= \\
&= [\int_{\mathbb{A}} |\aleph_A + \aleph_B|^p d\mu + \int_{\mathbb{B}} |\aleph_A + \aleph_B|^p d\mu + \\
&+ \int_{c(\mathbb{A}\cup\mathbb{B})} |\aleph_A + \aleph_B|^p d\mu]^{\frac{2}{p}} + \\
&+ [\int_{\mathbb{A}} |\aleph_A - \aleph_B|^p d\mu + \int_{\mathbb{B}} |\aleph_A - \aleph_B|^p d\mu + \\
&+ \int_{c(\mathbb{A}\cup\mathbb{B})} |\aleph_A - \aleph_B|^p d\mu]^{\frac{2}{p}}.
\end{aligned}$$

Deoarece $A \cap B = \emptyset$, $|\aleph_A + \aleph_B|^p(x) = \begin{cases} 1, x \in A \text{ sau } x \in B \\ 0, x \in c(A \cup B) \end{cases}$ şi $|\aleph_A - \aleph_B|^p(x) = \begin{cases} 1, x \in A \text{ sau } x \in B \\ 0, x \in c(A \cup B) \end{cases}$, obţinem că

$$[\int_{\mathbb{R}^n} |\aleph_A + \aleph_B|^p d\mu)^{\frac{2}{p}} + \int_{\mathbb{R}^n} |\aleph_A - \aleph_B|^p d\mu]^{\frac{2}{p}} = (1+1)^{\frac{2}{p}} + (1+1)^{\frac{2}{p}} = 2 \cdot 2^{\frac{2}{p}},$$

deci $2 \cdot 2^{\frac{2}{p}} = 4$, de unde $p = 2$.

10. Scrieţi identitatea lui Parseval pentru funcţiile următoare:
(i) $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}, f(x) = x^2, \forall x \in [-\pi, \pi]$;

(ii) $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}, f(x) = sgnx, \forall x \in [-\pi, \pi]$;

(iii) $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}, f(x) = |x|, \forall x \in [-\pi, \pi]$.

(se vor obţine astfel sumele seriilor numerice convergente (serii Euler) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}, \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$).

Rezolvare. Amintim următoarele:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \text{şi } a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \forall n \geq 1.$$

Dacă f este funcţie pară, atunci $b_n = 0, \forall n \geq 1$ iar dacă f este funcţie impară, atunci $a_n = 0, \forall n \geq 1$.

Identitatea lui Parseval este:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx.$$

(i) Funcţia f este în acest caz pară, deci $b_n = 0, \forall n \geq 1$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi} \frac{x^3}{3} \Big/_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}.$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 (\sin nx)' dx = \frac{1}{n\pi} x^2 \sin(nx) \Big/_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2x \sin(nx) dx = \\ &= \frac{2}{n^2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x (\cos nx)' dx = \frac{2}{n^2\pi} x \cos(nx) \Big/_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{n^2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = \\ &= \frac{4}{n^2} (-1)^n - \frac{2}{n^2\pi} \cdot \frac{\sin nx}{n} \Big/_{-\pi}^{\pi} = \frac{4}{n^2} (-1)^n, \forall n \geq 1. \end{aligned}$$

$(\forall n \geq 1, \sin n\pi = 0, \cos n\pi = (-1)^n)$.

Prin urmare,

$$\frac{1}{2} (\frac{2\pi^2}{3})^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^4} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \frac{1}{\pi} \frac{x^5}{5} \Big/_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^4}{5},$$

ceea ce antrenează $16\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{2\pi^4}{5}-\frac{2\pi^4}{9}=\frac{8\pi^4}{45}$, de unde

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}.$$

(ii) $\forall x\in[-\pi,\pi], f(x)=sgnx=\begin{cases}-1, x<0\\ 0, x=0\\ 1, x>0.\end{cases}$

Funcţia f este în acest caz impară, deci $a_n=0,\forall n\geq 1$.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}sgnxdx=\frac{1}{\pi}(\int_{-\pi}^{0}(-1)dx+\int_{0}^{\pi}1dx)=\frac{1}{\pi}(-x\big/_{-\pi}^{0}+x\big/_{0}^{\pi})=0.$$

$$\begin{aligned}b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}sgnx\sin nxdx=\frac{1}{n\pi}(\int_{-\pi}^{0}-\sin nxdx+\int_{0}^{\pi}\sin nxdx)=\\ &= \frac{1}{\pi}(\frac{\cos nx}{n}\big/_{-\pi}^{0}+\frac{-\cos nx}{n}\big/_{0}^{\pi})=\frac{2}{n\pi}[1-(-1)^n]=\frac{2}{n\pi}[1-(-1)^n],\forall n\geq 1.\end{aligned}$$

Prin urmare,

$$\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}[1-(-1)^n]^2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(sgnx)^2dx=\frac{1}{\pi}x\big/_{-\pi}^{\pi}=2,$$

ceea ce se rescrie

$$\frac{4}{\pi^2}[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cdot 4+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}\cdot 0]=2,$$

de unde $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{16}{(2n+1)^2}=2\pi^2$. Pe de alta parte, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$, de unde $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\frac{3}{4}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\pi^2\cdot\frac{1}{8}$. Prin urmare,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

(iii) Funcţia f este în acest caz pară, deci $b_n=0,\forall n\geq 1$.

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|dx=\frac{1}{\pi}(\int_{-\pi}^{0}-xdx+\int_{0}^{\pi}xdx)=\\ &= \frac{1}{\pi}(-\frac{x^2}{2}\big/_{-\pi}^{0}+\frac{x^2}{2}\big/_{0}^{\pi})=\pi.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos nx dx = \frac{1}{\pi}(\int_{-\pi}^{0}-x\cos nx dx + \int_{0}^{\pi}x\cos nx dx) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\cos nx dx = \\ &= \frac{2}{n\pi}\int_{0}^{\pi}x(\sin nx)' dx = \frac{2}{n\pi}(x\sin nx \diagup_{0}^{\pi} - \int_{0}^{\pi}\sin nx dx) = \frac{2}{n\pi}\cdot\frac{\cos nx}{n}\diagup_{0}^{\pi} = \frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1], \forall n \geq 1. \end{aligned}$$

Prin urmare,

$$\frac{\pi^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^4\pi^2}[(-1)^n-1]^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx = \frac{1}{\pi}\frac{x^3}{3}\diagup_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3},$$

de unde $\frac{16}{\pi^2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{2\pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{2}$, ceea ce implică $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$.

În consecinţă, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^4} + \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}$, de unde

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

11. Fie $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, \mu)$, unde μ este măsura Lebesgue pe $\mathbb{R}$. Pentru $\forall A \in \mathcal{M}$, fie $\lambda(A) = \int_{[0,\infty)\cap A} e^{-x^2}d\mu(x), \nu(A) = \int_{(-\infty,1)\cap A} e^{-x^2}d\mu(x)$. Arătaţi că ν nu este absolut continuă în raport cu μ, μ nu este absolut continuă în raport cu ν.

Rezolvare. I. Presupunem, prin reducere la absurd, că ν este absolut continuă în raport cu λ, aşadar $\lambda(A) = 0, A \in \mathcal{M}$ implică $\nu(A) = 0$.

Fie $A = (-\infty, 0)(\in \mathcal{M})$. Deoarece $\lambda((-\infty,0)) = \int_{[0,\infty)\cap(-\infty,0)} e^{-x^2}d\mu(x) = 0$, rezultă că $\nu((-\infty,0)) = 0$. Dar $\nu((-\infty,0)) = \int_{(-\infty,1)\cap(-\infty,0)} e^{-x^2}d\mu(x) = \int_{(-\infty,0)} e^{-x^2}d\mu(x) > 0:$

Într-adevăr, fie $f : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}, f(x) = e^{-x^2}, \forall x \in (-\infty, 0)$.

Observăm că f este mărginită pe $(-\infty, 0)$ $(0 < f(x) < 1, \forall x \in (-\infty, 0))$, f este continuă, deci Lebesgue măsurabilă pe $(-\infty, 0)$ şi $f \in \mathcal{R}([\alpha,\beta]), \forall[\alpha,\beta] \subset (-\infty, 0)$. Prin urmare, $f \in \mathcal{L}((-\infty,0))$ dacă şi numai dacă $|f| = f \in \mathcal{R}((-\infty,0))$ şi, mai mult, în acest caz $(L)\int_{(-\infty,0)} e^{-x^2}d\mu(x) = (R)\int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}dx$. Remarcăm că $\int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}dx \overset{t=-x}{=} \int_{0}^{\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, deci $\nu((-\infty,0)) = \int_{(-\infty,0)} e^{-x^2}d\mu(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} > 0$.

II. Presupunem, prin reducere la absurd, că λ este absolut continuă în raport cu ν, aşadar $\nu(A) = 0, A \in \mathcal{M}$ implică $\lambda(A) = 0$.

Fie $A = [1, \infty)(\in \mathcal{M})$. Observăm că $\nu([1,\infty)) = \int_{(-\infty,1)\cap[1,\infty)} e^{-x^2}d\mu(x) = 0$, deci $\lambda([1,\infty)) = 0$. Dar $\lambda([1,\infty)) = \int_{[0,\infty)\cap[1,\infty)} e^{-x^2}d\mu(x) = \int_{[1,\infty)} e^{-x^2}d\mu(x) > 0:$

La fel ca mai sus, $\int_{[1,\infty)\cap[1,\infty)} e^{-x^2}d\mu(x) = \int_{1}^{\infty} e^{-x^2}dx > 0$.