Tipuri de convergenţă a şirurilor de funcţii măsurabile

Amintim pentru început următoarele noţiuni:

Definiţie. Dacă $X \subseteq \mathbb{R}$ este o mulţime oarecare, nevidă, spunem că un şir de funcţii $(f_n)_n, f_n : X \to \mathbb{R}$ este:

(i) *convergent punctual* pe X la o funcţie $f : X \to \mathbb{R}$ (şi notăm aceasta prin $f_n \underset{X}{\overset{p}{\to}} f$) dacă $\forall x \in X, f_n(x) \to f(x)$, adică, $\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ astfel ca $\forall n \geq n_0(\varepsilon, x), |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$;

(ii) *convergent uniform* pe X la o funcţie $f : X \to \mathbb{R}$ (şi notăm aceasta prin $f_n \underset{X}{\overset{u}{\to}} f$) dacă $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel ca $\forall n \geq n_0(\varepsilon), |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall x \in X$.

Observaţie. Orice şir de funcţii uniform convergent este punctual convergent. Reciproca nu este în general adevărată.

Observaţie. (**Criteriul majorării**) Fie $f : X \to \mathbb{R}, (f_n)_n, f_n : X \to \mathbb{R}$. Dacă există un şir numeric $(\alpha_n)_n \subset [0, \infty)$ convergent la 0, astfel încât $|f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X$, atunci $f_n \underset{X}{\overset{u}{\to}} f$.

Definiţie. Dacă $(X, \mathcal{A}, \mu)$ este un spaţiu cu măsură completă iar $(f_n)_n$, $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$, este un şir de funcţii $\mathcal{A}$-măsurabile, finite μ-a.p.t. pe X, spunem că $(f_n)_n$:

(i) *converge μ-a.p.t.* pe X la $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ (şi notăm aceasta prin $f_n \underset{X}{\dot{\to}} f$) dacă $\exists A \in \mathcal{A}$ astfel încât $\mu(A) = 0$ şi $f_n \underset{X \setminus A}{\overset{p}{\to}} f$;

(ii) *converge aproape uniform* pe X la $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ (şi notăm aceasta prin $f_n \underset{X}{\overset{\text{a.u.}}{\to}} f$) dacă $\forall \varepsilon > 0, \exists A_\varepsilon \in \mathcal{A}$ astfel încât $\mu(A_\varepsilon) < \varepsilon$ şi $f_n \underset{X \setminus A_\varepsilon}{\overset{u}{\to}} f$ (adică, $\forall \delta > 0, \exists n_0(\varepsilon, \delta) \in \mathbb{N}$ astfel ca $\forall n \geq n_0(\varepsilon, \delta), |f_n(x) - f(x)| < \delta, \forall x \in X \setminus A_\varepsilon$);

(iii) *converge în măsură* la $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ (şi notăm aceasta prin $f_n \underset{X}{\overset{\mu}{\to}} f$) dacă $\forall \varepsilon > 0, \lim\limits_{n \to \infty} \mu(\{x \in X; |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = 0$.

Observaţie. i) Dacă $f_n \underset{X}{\overset{p}{\to}} f$, atunci $f_n \underset{X}{\dot{\to}} f$;

ii) Dacă $f_n \underset{X}{\overset{\text{u.}}{\to}} f$, atunci $f_n \underset{X}{\overset{\text{a.u.}}{\to}} f$.

Observaţie. Dacă $f_n \underset{X}{\overset{\text{a.u.}}{\to}} f$, atunci $f_n \underset{X}{\overset{\mu}{\to}} f$ şi $f_n \underset{X}{\dot{\to}} f$. Reciprocele nu au loc în general. Totuşi, dacă $\mu(X) < \infty$ şi $f_n \underset{X}{\dot{\to}} f$, atunci $f_n \underset{X}{\overset{\text{a.u.}}{\to}} f$ (Teorema lui Egorov), deci $f_n \underset{X}{\overset{\mu}{\to}} f$.

1. Studiaţi diferite tipuri de convergenţă pentru şirurile următoare de funcţii:
I. (În raport cu măsura Lebesgue):

(i) $f_n(x) = \frac{1}{n}\aleph_{[0,n]}(x), n \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{R}$;
(ii) $f_n(x) = \frac{n}{1+n\sqrt{x}}, n \in \mathbb{N}, x \in [0,1]$;
(iii) $f_n(x) = \frac{n \sin x}{1+n^2 \sin^2 x}, n \in \mathbb{N}, x \in [0,\pi]$;
(iv) $f_n(x) = \begin{cases} 0, |x| \leq n \text{ sau } |x| > n+1 \\ 1, n < |x| \leq n+1 \end{cases}, n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$;
(v) $f_n(x) = \begin{cases} n, x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0, x < 0 \text{ sau } x > \frac{1}{n} \end{cases}, n \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{R}$;
(vi) $f_n(x) = \begin{cases} ne^{-nx}, x \geq 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}, n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$;
(vii) $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\aleph_{(0,\frac{1}{n}]}(x), n \in \mathbb{N}^*, x \in (0,1]$;

II. (În raport cu măsura de numărare $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}^*) \to [0,\infty]$):

$f_n(x) = \aleph_{\{1,2,\ldots,n\}}(x), n, x \in \mathbb{N}^*$.

Rezolvare. **I**. **(i)** $f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, x \in [0,n] \\ 0, x \in (-\infty,0) \cup (n,+\infty) \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}$.

Convergenţa punctuală:

Să arătăm mai întâi că $f_n \underset{\mathbb{R}}{\xrightarrow{p}} 0$. Pentru aceasta, trebuie să verificăm că $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $\forall n \geq n_0(\varepsilon,x), |f_n(x) - 0| = f_n(x) < \varepsilon (*)$. Într-adevăr, dacă:

$\cdot x < 0$, atunci $f_n(x) = 0$, deci $(*)$ are loc;

$\cdot x \geq 0$, trebuie sa arătăm că $\forall x \geq 0, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon,x) \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $\forall n \geq n_0(\varepsilon,x), f_n(x) < \varepsilon$.

Fie deci $x \geq 0$ şi $\forall \varepsilon > 0$, oarecare. Evident, deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\exists n'_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $\forall n \geq n'_\varepsilon, \frac{1}{n} < \varepsilon$.

Fie acum $n_0(\varepsilon,x) = \max\{n'_\varepsilon, [x]+1\} (\in \mathbb{N}^*)$ şi fie $\forall n \geq n_0(\varepsilon,x)$. Atunci $n > x$, deci $f_n(x) = \frac{1}{n}$ şi, întrucât $n \geq n'_\varepsilon$, obţinem că $f_n(x) = \frac{1}{n} < \varepsilon$, adică $(*)$ are loc.

Prin urmare, $f_n \underset{\mathbb{R}}{\xrightarrow{p}} 0$.

Să observăm acum că $|f_n(x) - 0| = f_n(x) \leq \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}$ şi cum $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, din criteriul majorării rezultă că $f_n \underset{\mathbb{R}}{\xrightarrow{u}} 0$. Prin urmare, $f_n \underset{\mathbb{R}}{\xrightarrow{\text{a.u.}}} 0$, deci $f_n \underset{X}{\xrightarrow{\mu}} f$ şi $f_n \underset{X}{\xrightarrow{\cdot}} f$.

(ii) Convergenţa punctuală:

Observăm că $\forall x \in [0,1]$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, x \in (0,1] \\ \infty, x = 0 \end{cases}$, deci $f_n \underset{[0,1]}{\xrightarrow{p}} f, f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, x \in (0,1] \\ \infty, x = 0 \end{cases}, \forall x \in [0,1]$. Prin urmare, în particular, $f_n \underset{[0,1]}{\xrightarrow{\cdot}} f$ şi, întrucât $\mu([0,1]) = 1 < \infty$, din Teorema lui Egorov rezultă că $f_n \underset{[0,1]}{\xrightarrow{\text{a.u.}}} f$, de unde $f_n \underset{[0,1]}{\xrightarrow{\mu}} f$.

(iii) Convergenţa punctuală:

Evident, $\forall x \in [0,\pi], \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, deci $f_n \underset{[0,\pi]}{\overset{p}{\to}} 0$. În particular, $f_n \underset{[0,\pi]}{\overset{\cdot}{\to}} 0$. Conform Teoremei lui Egorov, întrucât $\mu([0,\pi]) = \pi < \infty$, rezultă că $f_n \underset{[0,\pi]}{\overset{\text{a.u.}}{\to}} 0$, de unde $f_n \underset{[0,\pi]}{\overset{\mu}{\to}} 0$.

Să remarcăm că putem raţiona şi direct pentru a arăta că $f_n \underset{[0,\pi]}{\overset{\text{a.u.}}{\to}} 0$. Trebuie aşadar să verificăm că $\forall \varepsilon > 0, \exists A_\varepsilon \in \mathcal{M}$ astfel încât $\mu(A_\varepsilon) < \varepsilon$ şi $f_n \underset{cA=[0,\pi]\setminus A}{\overset{u}{\to}} 0$.

Într-adevăr, $\forall \varepsilon > 0$, fie $A_\varepsilon = [0, \frac{\varepsilon}{3}) \cup (\pi - \frac{\varepsilon}{3}, \pi]$. Evident, $A_\varepsilon \in \mathcal{M}$ şi $\mu(A_\varepsilon) = \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$. Rămâne să arătăm că $f_n \underset{cA_\varepsilon=[\frac{\varepsilon}{3},\pi-\frac{\varepsilon}{3}]}{\overset{u}{\to}} 0$.

Se verifică cu uşurinţă că $\sin x \geq \sin\frac{\varepsilon}{3}, \forall x \in [\frac{\varepsilon}{3}, \pi - \frac{\varepsilon}{3}]$, de unde $|f_n(x) - 0| = f_n(x) = \frac{n\sin x}{1+n^2\sin^2 x} \leq \frac{n}{1+n^2\sin\frac{\varepsilon}{3}}, \forall x \in [\frac{\varepsilon}{3}, \pi - \frac{\varepsilon}{3}], \forall \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Deoarece $\forall \varepsilon > 0$ (arbitrar, fixat), avem $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{1+n^2\sin\frac{\varepsilon}{3}} = 0$, din criteriul majorării rezultă că $f_n \underset{[\frac{\varepsilon}{3},\pi-\frac{\varepsilon}{3}]}{\overset{u}{\to}} 0$. Prin urmare, în final, $f_n \underset{[0,\pi]}{\overset{\text{a.u.}}{\to}} 0$.

Să arătăm în continuare că $f_n \underset{[0,\pi]}{\overset{u}{\not\to}} 0$. Într-adevăr, dacă presupunem prin reducere la absurd că $f_n \underset{[0,\pi]}{\overset{u}{\to}} 0$, aceasta însemnând că $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel ca $\forall n \geq n_0(\varepsilon), |f_n(x) - 0| = \frac{n\sin x}{1+n^2\sin^2 x} < \varepsilon, \forall x \in [0,\pi]$, fie, în particular $x_n = \arcsin\frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*((x_n)_n \subset [0,\pi])$.

Atunci, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel ca $\forall n \geq n_0(\varepsilon), \frac{\frac{1}{n}}{1+n^2\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} < \varepsilon$, ceea ce este fals. Prin urmare, $f_n \underset{[0,\pi]}{\overset{u}{\not\to}} 0$.

(iv) Convergenţa punctuală:

Să arătăm că $\forall x \in \mathbb{R}, \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ (deci $f_n \underset{\mathbb{R}}{\overset{p}{\to}} 0$). Să arătăm aşadar că $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ astfel ca $\forall n \geq n_0(\varepsilon, x), |f_n(x) - 0| = f_n(x) < \varepsilon (*)$.

Într-adevăr, $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0$, fie $n_0(\varepsilon, x) = [|x|] + 1 (\in \mathbb{N})$ şi fie $\forall n \geq n_0(\varepsilon, x)$. Atunci $n > |x|$, deci $f_n(x) = 0 < \varepsilon$. Afirmaţia $(*)$ este satisfăcută. Prin urmare, $f_n \underset{\mathbb{R}}{\overset{p}{\to}} 0$, deci, în particular, $f_n \underset{\mathbb{R}}{\overset{\cdot}{\to}} 0$.

Să arătăm în continuare că $f_n \underset{\mathbb{R}}{\overset{\mu}{\not\to}} 0$ (va rezulta atunci că $f_n \underset{\mathbb{R}}{\overset{\text{a.u.}}{\not\to}} 0$). Dacă presupunem, prin reducere la absurd, că $f_n \underset{\mathbb{R}}{\overset{\mu}{\to}} 0$, aceasta înseamnă că $\forall \varepsilon > 0, \lim\limits_{n\to\infty} \mu(\{x \in \mathbb{R}; |f_n(x) - 0| = f_n(x) \geq \varepsilon\}) = 0$. În particular, pentru $\varepsilon = 1$, obţinem că $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(\{x \in \mathbb{R}; f_n(x) \geq 1\}) = 0$.

Din definiţia lui $f_n(x)$, rezultă că $\{x \in \mathbb{R}; f_n(x) \geq 1\} = \{x \in \mathbb{R}; f_n(x) = 1\} = (n, n+1]$, de unde $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(\{x \in \mathbb{R}; f_n(x) \geq 1\}) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu((n, n+1]) = 1 \neq 0$, contradicţie. Prin urmare, $f_n \underset{\mathbb{R}}{\overset{\mu}{\not\to}} 0$.

(v) Convergenţa punctuală: $\forall x \in \mathbb{R}$, calculăm $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$:

$\cdot$ Dacă $x < 0$, atunci $\forall n \geq 1, f_n(x) = 0$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$;

$\cdot$ Dacă $x = 0$, atunci $\forall n \geq 1, f_n(x) = n$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \infty$;

$\cdot$ Dacă $x > 0$, arătăm că $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $\forall n \geq n_0(\varepsilon, x), |f_n(x) - 0| = f_n(x) < \varepsilon$.

Într-adevăr, $\forall x > 0, \forall \varepsilon > 0$, fie $n_0(\varepsilon, x) = [\frac{1}{x}] + 1 (\in \mathbb{N}^*)$ şi fie $\forall n \geq n_0(\varepsilon, x)$. Atunci $n > \frac{1}{x}$, de unde $f_n(x) = 0 < \varepsilon$. Prin urmare, dacă $x > 0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.

În consecinţă, deoarece $\{0\} \in \mathcal{M}$ şi $\mu(\{0\}) = 0$, rezultă că $f_n \underset{\mathbb{R}}{\overset{\cdot}{\to}} 0$.

Să arătăm, în continuare, că $f_n \underset{\mathbb{R}}{\overset{\text{a.u.}}{\to}} 0$, adică, $\forall \varepsilon > 0, \exists A_\varepsilon \in \mathcal{M}$ astfel încât $\mu(A_\varepsilon) < \varepsilon$ şi $f_n \underset{cA_\varepsilon}{\overset{u}{\to}} 0$ (adică, $\forall \delta > 0, \exists n_0(\varepsilon, \delta) \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $\forall n \geq n_0(\varepsilon, \delta), |f_n(x) - 0| = f_n(x) < \delta, \forall x \in cA_\varepsilon$).

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, rezultă că $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $\forall n \geq n_\varepsilon, \frac{1}{n} < \varepsilon$. În particular, $\frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$.

$\forall \varepsilon > 0$, fie $A_\varepsilon = [0, \frac{1}{n_\varepsilon}] (\in \mathcal{M})$. Evident, $\mu(A_\varepsilon) = \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$. A rămas să arătăm că $\forall \delta > 0, \exists n_0(\varepsilon, \delta) \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $\forall n \geq n_0(\varepsilon, \delta), f_n(x) < \delta, \forall x \in (-\infty, 0) \cup (\frac{1}{n_\varepsilon}, +\infty) (**)$.

$\forall \delta > 0$, fie $n_0(\varepsilon, \delta) = n_\varepsilon (\in \mathbb{N}^*)$ şi fie $\forall n \geq n_0(\varepsilon, \delta)$. Atunci $n \geq n_\varepsilon$.

$\cdot$ Dacă $x \in (-\infty, 0)$, adică $x < 0$, atunci $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(x) = 0 < \delta$ deci $(**)$ este satisfăcută;

$\cdot$ Dacă $x \in (\frac{1}{n_\varepsilon}, +\infty)$, adică $x > \frac{1}{n_\varepsilon}$, cum $n \geq n_\varepsilon$, rezultă că $x > \frac{1}{n_\varepsilon} \geq \frac{1}{n}$, deci $f_n(x) = 0 < \delta$ şi astfel $(**)$ este din nou satisfăcută.

Prin urmare, $f_n \underset{\mathbb{R}}{\overset{\text{a.u.}}{\to}} 0$ de unde $f_n \underset{\mathbb{R}}{\overset{\mu}{\to}} 0$.

Putem arăta şi direct că $f_n \underset{\mathbb{R}}{\overset{\mu}{\to}} 0$. Aceasta înseamnă să demonstrăm că $\forall \varepsilon > 0, \lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n(\varepsilon)) = 0$, unde $\forall \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, A_n(\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}; |f_n(x) - 0| = f_n(x) \geq \varepsilon\}$, de unde $A_n(\varepsilon) = [0, \frac{1}{n}], \forall n \geq \varepsilon$. Evident, $\forall \varepsilon > 0, \lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n(\varepsilon)) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

(vi) Convergenţa punctuală: $\forall x \in \mathbb{R}$, calculăm $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$:

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{e^{nx}}, x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, x < 0 \\ \infty, x = 0 \\ 0, x > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, x \neq 0 \\ \infty, x = 0 \end{cases}$. Deoarece $\{0\} \in \mathcal{M}$ şi $\mu(\{0\}) = 0$, rezultă că $f_n \underset{\mathbb{R}}{\overset{\cdot}{\to}} f \equiv 0$.

Arătăm că $f_n \underset{\mathbb{R}}{\overset{\text{a.u.}}{\to}} 0$, adică, $\forall \varepsilon > 0, \exists A_\varepsilon \in \mathcal{M}$ astfel încât $\mu(A_\varepsilon) < \varepsilon$ şi $f_n \underset{cA_\varepsilon}{\overset{u}{\to}} 0$.

Într-adevăr, $\forall \varepsilon > 0, \exists A_\varepsilon = [0, \frac{\varepsilon}{2}] (\in \mathcal{M})$ astfel încât $\mu(A_\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Să arătăm că $f_n \underset{cA_\varepsilon = (-\infty, 0) \cup (\frac{\varepsilon}{2}, +\infty)}{\overset{u}{\to}} 0$.

Observăm că $\forall x \in cA_\varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}, |f_n(x) - 0| = f_n(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ \frac{n}{e^{nx}}, x > \frac{\varepsilon}{2} \end{cases} < \frac{n}{e^{n\frac{\varepsilon}{2}}}$.

Deoarece $\forall\varepsilon > 0$ (arbitrar, fixat), avem $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{e^{n\frac{\varepsilon}{2}}} = 0$, din criteriul majorării rezultă că $f_n \xrightarrow[cA_\varepsilon]{u} 0$, de unde $f_n \xrightarrow[\mathbb{R}]{\text{a.u.}} 0$, ceea ce implică $f_n \xrightarrow[\mathbb{R}]{\mu} 0$.

Observăm că putem verifica şi direct că $f_n \xrightarrow[\mathbb{R}]{\mu} 0$:

$$\begin{aligned}\forall\varepsilon > 0, &\lim_{n\to\infty}\mu(\{x\in\mathbb{R}; |f_n(x)-0| = f_n(x)\geq\varepsilon\}) = \lim_{n\to\infty}\mu(\{x\in\mathbb{R}_+; \frac{n}{e^{nx}}\geq\varepsilon\}) = \\ &= \lim_{n\to\infty}\mu(\{x\in\mathbb{R}; 0\leq x\leq\frac{1}{n}\ln\frac{n}{\varepsilon}\}) = \lim_{n\to\infty}\mu([0,\frac{1}{n}\ln\frac{n}{\varepsilon}]) = \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\ln\frac{n}{\varepsilon}) = \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\ln n - \ln\varepsilon}{n} = 0.\end{aligned}$$

(vii) $f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, x\in(0,\frac{1}{n}] \\ 0, x\in(\frac{1}{n},1] \end{cases} \quad \forall x\in(0,1], \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Observăm că $f_n \xrightarrow[(0,1]]{p} 0$. Într-adevăr, $\forall x\in(0,1], \forall\varepsilon>0, \exists n_0(\varepsilon,x) = [\frac{1}{x}]+1 (\in \mathbb{N}^*)$ astfel ca, $\forall n\geq n_0(\varepsilon,x) = [\frac{1}{x}]+1$, avem $n > \frac{1}{x}$, deci $x > \frac{1}{n}$, de unde $|\mathrm{f}_n(x)-0| = f_n(x) = 0 < \varepsilon$.

Arătăm că $f_n \xrightarrow[(0,1]]{\text{a.u.}} 0$, adică, $\forall\varepsilon > 0, \exists A_\varepsilon \in \mathcal{M}$ astfel încât $\mu(A_\varepsilon) < \varepsilon$ şi $f_n \xrightarrow[cA_\varepsilon]{u} 0$.

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$, aceasta înseamnă că $\forall\varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ aşa încât $\forall n\geq n_\varepsilon$, are loc $\frac{1}{n} < \varepsilon$. În particular, $\frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$.

Fie atunci $A_\varepsilon = (0,\frac{1}{n_\varepsilon}] (\in \mathcal{M})$. Evident, $\mu(A_\varepsilon) < \varepsilon$. A rămas să arătăm că $f_n \xrightarrow[cA_\varepsilon]{u} 0$, adică, echivalent, $\forall\delta > 0, \exists n_0(\varepsilon,\delta)\in\mathbb{N}^*$ astfel ca $\forall n\geq n_0(\varepsilon,\delta), f_n(x) < \delta, \forall x\in cA_\varepsilon = (\frac{1}{n_\varepsilon},1]$.

$\forall\delta > 0$, fie $n_0(\varepsilon,\delta) = \max\{n_\varepsilon, [\frac{1}{x}]+1\} (\in\mathbb{N}^*)$ şi fie $n\geq n_0(\varepsilon,\delta)$, oarecare. Atunci $n\geq n_\varepsilon$, deci $\frac{1}{n}\leq\frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$ şi $n > \frac{1}{x}$, de unde $x > \frac{1}{n}$, ceea ce implică $f_n(x) = 0 < \delta$. Prin urmare, $f_n \xrightarrow[(0,1]]{\text{a.u.}} 0$, deci $f_n \xrightarrow[(0,1]]{\mu} 0$.

Observăm că $f_n \overset{u}{\underset{(0,1]}{\not\to}} 0$. Într-adevăr, dacă presupunem, prin reducere la absurd, că $f_n \xrightarrow[(0,1]]{u} 0$, aceasta înseamnă că $\forall\varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}^*$ astfel ca $\forall n\geq n_0(\varepsilon), |f_n(x)-0| < \varepsilon, \forall x\in(0,1]$.

Fie, în particular $x_n = \frac{1}{n}, \forall n\in\mathbb{N}^*((x_n)_n \subset (0,1])$. Atunci, $\forall\varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}^*$ astfel ca $\forall n\geq n_0(\varepsilon), \sqrt{n} < \varepsilon$, ceea ce înseamnă ca $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n} = 0$, ceea ce este fals.

II. Evident, măsura de numărare μ este completă.

$$\forall n, x\in\mathbb{N}^*, f_n(x) = \begin{cases} 1, x = 1 \\ 1, x = 2 \\ \dots. \\ 1, x = n \\ 0, x\geq n+1 \end{cases}.$$

Observăm că $f_n \xrightarrow[\mathbb{N}^*]{p} 1$. Într-adevăr, $\forall x \in \mathbb{N}^*, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon, x) = x (\in \mathbb{N}^*)$ astfel ca $\forall n \geq n_0(\varepsilon, x) = x, f_n(x) = 1$, de unde $|f_n(x) - 1| = 0 < \varepsilon$.

Remarcăm că $f_n \overset{\mu}{\underset{\mathbb{N}^*}{\nrightarrow}} 1$. Într-adevăr, dacă presupunem, prin reducere la absurd, că $f_n \xrightarrow[\mathbb{N}^*]{\mu} 1$, aceasta înseamnă că $\forall \varepsilon > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(\{x \in \mathbb{N}^*; |f_n(x) - 1| = 1 - f_n(x) \geq \varepsilon\}) = 0$. În particular, pentru $\varepsilon = \frac{1}{2}$, rezultă că

$$0 = \lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in \mathbb{N}^*; f_n(x) \leq \frac{1}{2}\}) = \lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in \mathbb{N}^*; f_n(x) = 0\}) = \lim_{n\to\infty} \mu(\{n+1, n+2, ...\}) = \infty,$$

ceea ce este fals. Aşadar $f_n \overset{\mu}{\underset{\mathbb{N}^*}{\nrightarrow}} 1$, deci $f_n \overset{\text{a.u.}}{\underset{\mathbb{N}^*}{\nrightarrow}} 1$.

Observăm că putem arăta şi direct că $f_n \overset{\text{a.u.}}{\underset{\mathbb{N}^*}{\nrightarrow}} 1$. Dacă presupunem, prin reducere la absurd, că $f_n \xrightarrow[\mathbb{N}^*]{\text{a.u.}} 1$, aceasta înseamnă că $\forall \varepsilon > 0, \exists A_\varepsilon \in \mathcal{M}$ astfel încât $\mu(A_\varepsilon) < \varepsilon$ şi $f_n \xrightarrow[cA_\varepsilon]{u} 1$.

În particular, pentru $\varepsilon = \frac{1}{2}$, rezultă că $\exists A_0 \in \mathcal{M}$ astfel încât $\mu(A_0) < \frac{1}{2}$ şi $f_n \xrightarrow[cA_0]{u} 1$. Din definiţia lui μ urmează că $\mu(A_0) = 0$, adică $A_0 = \emptyset$, ceea ce antrenează că $f_n \xrightarrow[c\emptyset = \mathbb{N}^*]{u} 1$. Prin urmare, pentru $\delta = \frac{1}{2}, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $\forall n \geq n_0, |f_n(x) - 1| = 1 - f_n(x) < \frac{1}{2}$, $\forall x \in \mathbb{N}^*$.

În consecinţă, $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $\forall n \geq n_0, f_n(x) > \frac{1}{2}$ (deci $f_n(x) = 1), \forall x \in \mathbb{N}^*$. În particular, pentru $x_n = n + 1, n \geq n_0$, obţinem că $f_n(n + 1) = 1$, contradicţie, întrucât $f_n(n + 1) = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.