

# RAPORT ȘTIINȚIFIC

*privind implementarea proiectului*

Metode matematice aplicate în studiul sistemelor mecanice, PN-II-RU-TE-2014-4-0320

contract de finanțare nr. 127 din 01/10/2015

## Etapa I: 2015

Studiile, activitățile și sarcinile intermediare din această primă etapă a proiectului s-au referit la următoarele două teme:

1. Probleme neliniare în mecanică;
2. Metode Hamiltoniene aplicate în studiul dinamicii sistemelor mecanice.

Obiectivele prevăzute în etapa 2015 au fost îndeplinite în totalitate, rezultatele fiind detaliate în acest raport de cercetare după o scurtă descriere schematică a stadiului cercetării din cadrul proiectului.

Până în acest moment în cadrul proiectului s-au realizat următoarele:

### Lucrări științifice corespunzătoare obiectivelor din etapa I

- L1. P. Neff, I.D. Ghiba, The exponentiated Hencky-logarithmic strain energy: Part III-coupling with idealized multiplicative isotropic finite strain plasticity. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, accepted, 2015. *IF: 1.779*  
doi:10.1007/s00161-015-0449-y
- L2. A. Celletti, C. Gales, Dynamical investigation of minor resonances for space debris, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 123: 203–222, 2015. *IF: 1.6*

**Total factor de impact pentru 2015: 3.379;**

### Participări la stagii de cercetare/documentare

- S1. I.D. Ghiba a participat la un stagiul de cercetare și documentare la Facultatea de Matematică, Universitatea Duisburg-Essen, Germania în perioada 12 noiembrie–20 decembrie 2015, la invitația Prof. dr. Patrizio Neff.

### Lucrări științifice ce urmează să fie finalizate în anii următori pentru îndeplinirea obiectivelor corespunzătoare etapelor II și III

- L3. I.D. Ghiba, P. Neff, R.J. Martin. An ellipticity domain for the distortional Hencky-logarithmic strain energy. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical & Engineering Sciences*, acceptat cu revizii minore.

- L4. R.J. Martin, I.D. Ghiba, P. Neff. Rank-one convexity implies polyconvexity for isotropic, objective and isochoric elastic energies in the two-dimensional case, în lucru.
- L5. I. Roventă. New majorization concepts via minimizing functionals, în lucru.
- L6. C. Burtea, New long time existence results for a class of Boussinesq-type systems, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, acceptat cu revizii minore.
- L7. A. Celletti, C. Galeş, G. Pucacco, A. Rosengren, On the analytical development of the lunar and solar disturbing functions, trimisă spre publicare.
- L8. A. Celletti, C. Galeş, G. Pucacco, Bifurcations of lunisolar secular resonances for space debris orbits, trimisă spre publicare.

## Descrierea rezultatelor obținute

### Obiectivul 1. *Probleme neliniare în mecanică*

Referitor la acest obiectiv, în lucrarea [L1] s-a investigat posibilitatea aplicării în plasticitatea finită multiplicativă a unei familii de energii neliniare în care partea volumetrică și cea isocoră sunt decuplate

$$F \mapsto W_{\text{eH}}(F) := \widehat{W}_{\text{eH}}(U) := \begin{cases} \frac{\mu}{k} e^{k \|\text{dev}_n \log U\|^2} + \frac{\kappa}{2\widehat{k}} e^{\widehat{k} [\text{tr}(\log U)]^2} & \text{if } \det F > 0, \\ +\infty & \text{if } \det F \leq 0, \end{cases}$$

Această familie de energii neliniare se bazează pe tensorul de deformare de tip Hencky-logaritmic  $\log U$ . Aici,  $k, \widehat{k}$  sunt constante fără dimensiune care rămân la dispoziția noastră,  $F = \nabla \varphi$  este gradientul deformării,  $U = \sqrt{F^T F}$  și  $\text{dev}_n \log U = \log U - \frac{1}{n} \text{tr}(\log U) \cdot \mathbb{1}$  este partea deviatorică a tensorului  $\log U$ . Celelalte cantități sunt constante constitutive. Ne referim la energiile din această familie sub numele de energii exponențiale de tip Hencky. În studiile precedente s-a arătat că pentru  $n = 2$  energia  $W_{\text{eH}} : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$  este rank-one convexă pentru  $k \geq \frac{1}{4}$  și  $\widehat{k} \geq \frac{1}{8}$ , și polyconvexă pentru  $k \geq \frac{1}{3}$  și  $\widehat{k} \geq \frac{1}{8}$ . De fapt, după cum va rezulta din lucrarea [L4], în general, pentru energii isotrope și isocore depinzând de  $\log U$  policonvexitatea coincide cu noțiunea de rank-one convexitate și deci nu există nici o falie între  $k \geq \frac{1}{4}$  și  $k < \frac{1}{3}$ .

În cazul  $n = 3$  s-a demonstrat că nu există  $k > 0$ , pentru care energia  $F \mapsto e^{k \|\text{dev}_3 \log U\|^2}$ ,  $F \in \text{GL}^+(3)$  ar putea fi rank-one convexă (deci în mod clar nici policonvexă), în ciuda faptului că unele inegalități de tipul inegalității Jensen generalizată au loc de fapt pentru  $n \geq 1$ . Plecând de la acest inconvenient, în etapa I a acestui grant de cercetare am discutat o relație interesantă dintre pierderea elipticității energiei  $W_{\text{eH}}$  în cazul  $n = 3$  și plasticitatea finită. Folosindu-ne de descompunerea multiplicativă  $F = F_e F_p$ , am cuplat această energie cu legi de evoluție  $F_p \frac{d}{dt}[F_p^{-1}] \in -\partial \mathcal{X}(\text{dev}_3 \Sigma_e)$  definite în termenii lui  $F_p$ , unde  $\partial \mathcal{X}$  este subdiferențiala funcției indicatoare  $\mathcal{X}$  a domeniului elastic convex  $\mathcal{E}_e(\Sigma_e, \frac{1}{3} \sigma_y^2) := \{\Sigma_e \in \text{Sym}(3) \mid \|\text{dev}_3 \Sigma_e\|^2 \leq \frac{1}{3} \sigma_y^2\}$  exprimat cu ajutorul tensorului tensiune mixt  $\Sigma_e$ ,  $\Sigma_e = F_e^T D_{F_e} W_{\text{iso}}(F_e)$ , iar  $W_{\text{iso}}(F_e)$  reprezintă partea isocoră a energiei. Arătăm că domeniul unde  $W_{\text{eH}}$  își pierde elipticitatea este prevestit de cuplarea cu fenomenul de plasticitate, deoarece domeniul de elipticitate a energiei

$W_{\text{eH}}$  și domeniul de elasticitate în termenii lui  $\Sigma_e$  sunt strâns legate între ele. Astfel, noua formulare rămâne eliptică în lipsa preîncărcărilor elastice pentru orice predeformare plastică. În plus, în acest domeniu relația tensiune-deformare rămâne monotonă după cum s-a observat din experimente. Păstrarea elipticității este o proprietate care trebuie să fie satisfăcută de orice model plastic hyperelastic deoarece în lipsa preîncărcărilor elastice materialul trebuie să răspundă reversibil la încărcări elastice. Spre deosebire de modelul multiplicativ, modelul aditiv bazat pe tensorul de deformare Hencky nu conservă elipticitatea. În cazul energiilor exponențiale de tip Hencky  $W_{\text{eH}}$ , care nu sunt eliptice pentru deformări mari, am arătat explicit că modelul multiplicativ păstrează elipticitatea.

**Obiectivul 2.** *Metode Hamiltoniene aplicate în studiul dinamicii sistemelor mecanice*

Referitor la acest obiectiv, în lucrarea [L2] am utilizat formalismul Hamiltonian pentru a studia dinamica deșeurilor spațiale aflate în acele regiuni care corespund rezonanțelor minore; mai precis, am considerat rezonanțele 3:1, 3:2, 4:1, 4:3, 5:1, 5:2, 5:3, 5:4, unde rezonanța  $j : \ell$  (cu  $j, \ell \in \mathbb{Z}$ ) semnifică faptul că perioada de revoluție a deșeurilor spațiale și perioada de rotație a Pământului sunt în raport de  $j/\ell$ . Considerând un model matematic care ia în considerare efectele gravitaționale ale Pământului, am studiat principalele aspecte dinamice referitoare la aceste rezonanțe. Rezultatele obținute au fost validate prin compararea cu un model dezvoltat în coordonate carteziane care include pe lângă potențialul terestru, atracția Soarelui, influența Lunii și presiunea radiației solare. Avantajul utilizării formalismului Hamiltonian este acela că oferă argumente analitice care permit explicarea dinamicii globale a rezonanțelor.

Înainte de a intra în detalii, se cuvine să menționăm că de la începutul erei spațiale, un număr mare de deșeuri s-au acumulat în vecinătatea Pământului. Astfel de obiecte, a căror mărime variază de la câțiva milimetri la câțiva centimetri, sunt resturi ale exploziilor unor nave spațiale sau coliziuni, sateliți neoperaționali, trepte ale unor rachete, etc. (a se vedea H. Klinkrad, *Space Debris: Models and Risk Analysis*, Springer-Praxis, Berlin-Heidelberg (2006)). Estimările actuale arată că există aproximativ  $3 \cdot 10^8$  obiecte cu dimensiuni mai mari de 1 mm și aproximativ  $3.5 \cdot 10^5$  obiecte mai mari de 1 cm. Impactul navelor spațiale operaționale sau sateliților cu astfel de obiecte ar putea duce la situații periculoase sau chiar dramatice; acumularea de resturi spațiale în anumite regiuni ale cerului – acolo unde sunt poziționați majoritatea sateliților operaționali – nu mai poate fi neglijată. Este esențială înțelegerea dinamicii acestor corpuri pentru strategiile de întreținere și control, precum și pentru a stabili diverse proceduri care să atenueze efectele produse de resturile spațiale (A. Rossi, G.B. Valsecchi, *Collision risk against space debris in Earth orbits*, *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, 95, 345–356 (2006)).

În colaborare cu Prof. dr. Alessandra Celletti, am demarat un amplu studiu al dinamicii deșeurilor spațiale atât prin metode analitice cât și prin metode numerice. Scopul nostru este acela de a obține o descriere detaliată a regiunilor de rezonanță, pentru a fi capabili în a discrimina între orbite regulate și orbite haotice.

Pentru a descrie regiunile care sunt obiectul investigației noastre, amintim următoarea clasificare, devenită standard în momentul de față. Atunci când sunt studiate deșeurile spațiale, se disting trei regiuni principale, denumite LEO (Low–Earth–Orbit), MEO (Medium–Earth–Orbit) și GEO (Geostationary–Earth–Orbit); altitudinea acestor regiuni variază în funcție de următoarea descriere.

Regiunea LEO, aflată între altitudinile 0 și 2000 km, este afectată în ordinea importanței de forța de atracție a Pământului, forța de frecare cu aerul, nesféricitatea Pământului prin

termenii armonici  $J_2$  și  $J_{22}$ , atracția Lunii, influența Soarelui și presiunea radiației solare.

Așa numita "durată de viață orbitală" a unui deșeu spațial, pe o orbita circulară cu altitudinea de aproximativ 250 km, este mai mică de 20 de zile, iar în acest caz, sunt necesare manevre frecvente pentru a menține aceeași altitudine verticală. La altitudinea de 400 km durata de viață este mai mică de 200 zile, în timp ce la 800 km se ajunge la câteva sute de ani.

Regiunea MEO, situată între 2 000 și 30 000 km, este afectată (în ordinea importanței), de următorii factori: atracția gravitațională a Pamântului, termenii armonici  $J_2$  și  $J_{22}$ , forța de atracție a Lunii, urmată de gravitația Soarelui și presiunea radiației solare (a se vedea, de exemplu, C.C. Chao, *Applied Orbit Perturbation and Maintenance*, Aerospace Press Series, AIAA, Reston, Virginia (2005)). Orbitele GPS se află la aproximativ 26 560 kilometri de centrul Pamântului; aici sateliții se deplasează cu o viteză de aproximativ 3,9 km/sec și au perioada de revoluție de 12 ore (timp sideral), adică jumătate din perioada de rotație a Pamântului. Această situație este denumită rezonanță gravitațională de tipul 2 : 1. Identificarea caracterului dinamic în jurul rezonanței 2 : 1 este de o importanță vitală pentru următoarele motive: regiunile stabile minimizează creșterea excentricității orbitei, în timp ce comportamentul haotic poate fi abil exploatat pentru a deplasa deșeurile în regiuni "cimitir" sau de a le modifica orbita în așa fel încât să intre și să se distrugă în atmosferă.

GEO este regiunea aflată la altitudini mai mari de 30 000 km. Aceasta este afectată (în ordinea importanței), de atracția gravitațională a Pamântului, termenii armonici  $J_2$ , atracția Lunii, influența Soarelui, termenii armonici  $J_{22}$  și presiunea radiației solare (a se vedea A. Lemaître, N. Delsate, S. Valk, *A web of secondary resonances for large A/m geostationary debris*, Celest. Mech. Dyn. Astr. 104, 383–402 (2009); S. Valk, N. Delsate, A. Lemaître, T. Carletti, *Global dynamics of high area-to-mass ratios geosynchronous space debris by means of the MEGNO indicator*, Advances in Space Research, 43, 1509–1526 (2009)). În regiunea GEO, mecanismele de disipare sunt absente; fiecare deșeu creat în această regiune va rămâne acolo pentru totdeauna.

În această etapă, am studiat rezonanțele gravitaționale aflate în regiunea MEO, între 14000 km și 37000 km față de centrul Terrei. Utilizând o serie de metode matematice bazate pe formalismul Hamiltonian și teoria perturbațiilor, am dezvoltat un model care descrie cu o foarte bună aproximare dinamica deșeurilor spațiale. În acest sens, potențialul terestru a fost dezvoltat în serie Fourier până la un ordin care depinde de rezonanța studiată. Întrucât această dezvoltare conține un număr mare de termeni, urmând procedura descrisă în lucrarea: A. Celletti, C. Galeș, *On the dynamics of space debris: 1:1 and 2:1 resonances*, J. Nonlinear Science **24**, n. 6, 1231–1262 (2014), am introdus noțiunea de termen dominant într-o regiune specifică a spațiului fazelor. Acest fapt permite să reducem considerabil numărul termenilor armonici ai dezvoltării, putându-ne astfel concentra doar asupra acelor termeni care influențează direct dinamica. Pentru valori rezonabile ale elementelor orbitale, rezonanțele au o structură asemănătoare unui pendul matematic perturbat, care în spațiul fazelor prezintă o zonă ("insulă") de librație (oscilație) care înconjoară punctul de echilibru stabil. Prezentăm un algoritm matematic simplu care permite calcularea cu un efort minim a amplitudinii rezonanțelor. Coroborând toate aceste informații legate de termenii dominanți și calculul amplitudinii rezonanțelor, am demonstrat un rezultat care prezice dacă "insulele" de librație asociate diversilor termeni ai dezvoltării sunt disjuncte sau se suprapun. Predicția acestui comportament este foarte importantă întrucât ne permite să discriminăm între orbitele regulate și orbitele haotice. Dacă insulele sunt disjuncte,

comportamentul este predictibil, în timp ce fenomenul de suprapunere a insulelor de librație dă naștere mișărilor haotice. Propunem un mecanism de transfer care necesită costuri mici în deplasarea deșeurilor în diverse regiuni ale spațiului, iar în final, studiem un fenomen de bifurcație, care se produce în cazul unor rezonanțe, și care provoacă o schimbare bruscă a caracterului stabil sau instabil al punctelor de echilibru.

Toate aceste rezultate calitative sunt dublate de studii numerice care permit cartografierea spațiului fazelor pentru diverse valori ale elementelor orbitale. În acest sens, este calculat indicatorul Fast Lyapunov Indicator, care permite discriminarea între orbitele regulate și orbitele haotice. Rezultatele sunt validate și prin integrarea numerică a ecuațiilor carteziene care descriu mișcarea, incluzând aici și atracția Lunii, atracția Soarelui precum și presiunea radiației solare.

### Citări conform Google Scholar

1. Lucrarea [L1] este citată în:
  - (a) G. Montella, G. Sanjay, P. Neff. The exponentiated Hencky strain energy in modelling tire derived material for moderately large deformations. preprint arXiv:1509.06541, 2015.
  - (b) R.J. Martin, P. Patrizio. Some remarks on the monotonicity of primary matrix functions on the set of symmetric matrices. *Archive of Applied Mechanics* 85: 1761-1778, 2015.
2. Lucrarea [L3] este citată în:
  - (a) G. Montella, G. Sanjay, P. Neff. The exponentiated Hencky strain energy in modelling tire derived material for moderately large deformations. preprint arXiv:1509.06541, 2015.
3. Lucrarea [L4] este citată în:
  - (a) G. Montella, G. Sanjay, P. Neff. The exponentiated Hencky strain energy in modelling tire derived material for moderately large deformations. preprint arXiv:1509.06541, 2015.
  - (b) A. Fischle, P. Neff. The geometrically nonlinear Cosserat micropolar shear-stretch energy. Part I: A general parameter reduction formula and energy-minimizing microrotations in 2D, preprint arXiv:1507.05480, 2015.
  - (c) D.Y. Gao. Analytic solutions to large deformation problems governed by generalized Neo-Hookean model. preprint arXiv:1509.01524, 2015.

DIRECTOR DE PROIECT,

Dr. Ionel-Dumitrel Ghiba