

# RAPORT ȘTIINȚIFIC

*privind implementarea proiectului*

Metode matematice aplicate în studiul sistemelor mecanice, PN-II-RU-TE-2014-4-0320

contract de finantare nr. 127 din 01/10/2015

**2015 – 2017**

Studiile, activitățile și sarcinile intermediare din cadrul proiectului s-au referit la următoarele teme:

## **2015**

1. Probleme neliniare in mecanică;
2. Metode Hamiltoniene aplicate in studiul dinamicii sistemelor mecanice.

## **2016**

1. Probleme neliniare in mecanică;
2. Studiul ecuațiilor Euler și a sistemelor hibride;
3. Metode Hamiltoniene aplicate în studiul dinamicii sistemelor mecanice.

## **2016**

1. Teorii relaxate în elasticitate;
2. Studiul ecuațiilor Euler și a sistemelor hibride;
3. Metode Hamiltoniene aplicate în studiul dinamicii sistemelor mecanice.

Obiectivele prevăzute în acest grant au fost îndeplinite în totalitate, rezultatele fiind detaliate în acest raport de cercetare după o scurtă descriere schematică a stadiului cercetării din cadrul proiectului. Au fost publicate sau elaborate 19 lucrări: 15 articole publicate sau acceptate în reviste indexate ISI însumând  $IF=28.51$   $AIS=24.179$ , 1 capitol într-o carte la editura Springer, 2 articole în reviste indexate BDI și un articol trimis spre publicare. Membrii contractului au participat la 11 conferințe internaționale cu prezentări orale și la 7 stagii de pregătire în străinătate. Cei doi doctoranzi din echipa au obținut titlul de doctor.

În cadrul proiectului s-au realizat următoarele:

### **Lucrări științifice corespunzătoare obiectivelor din etapa I/status actualizat**

- L1. P. Neff, I.D. Ghiba, The exponentiated Hencky-logarithmic strain energy: Part III-coupling with idealized multiplicative isotropic finite strain plasticity. *Continuum Mechanics and Thermodynamics* 28: 477–487, 2016. *IF: 1.849 AIS: 1.808*

L2. A. Celletti, C. Galeş, Dynamical investigation of minor resonances for space debris, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 123: 203–222, 2015. *IF: 1.594 AIS: 1.110*

**Total factor de impact pentru 2015: 3.443**

**Total scor de influență pentru 2015: 2.918**

**Lucrări științifice corespunzătoare obiectivelor din etapa II/status actualizat**

L3. I.D. Ghiba, P. Neff, R.J. Martin. An ellipticity domain for the distortional Hencky- logarithmic strain energy. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical & Engineering Sciences* 471, doi:10.1098/rspa.2015.0510, 2015. *IF: 1.935 AIS: 2.223*

L4. R.J. Martin, I.D. Ghiba, P. Neff. Rank-one convexity implies polyconvexity for isotropic, objective and isochoric elastic energies in the two-dimensional case, sub tipar, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, Section: A Mathematics* 147 (3): 571–597, 2017. *IF: 1.158 AIS: 1.166*

L5. A. Bucur, Rayleigh surface waves problem in linear thermoviscoelasticity with voids, *Acta mechanica* 227: 1199–1212, 2016. *IF: 1.694 AIS: 1.024*

L6. I. Roventă. A note on majorization via perturbed minimizers, *Journal of Mathematical Inequalities*, sub tipar, 2017. *IF: 0.777 AIS 0.282*

L7. C. Burtea, New long time existence results for a class of Boussinesq-type systems, *Journal de Mathematiques Pures et Appliquees* 106: 203–236. *IF: 1.818 AIS: 3.117*

L8. C. Burtea, Long time existence results for bore-type initial data for BBM-Boussinesq systems, *Journal of Differential Equation* 261: 4729–5288. *IF: 1.821 AIS: 2.386*

L9. P. Lissy, I. Roventă. Optimal filtration for the approximation of boundary controls for the one-dimensional wave equation, acceptată, *Mathematics of Computation*. *IF: 1.569 AIS: 1.279*

L10. A. Celletti, C. Galeş, G. Pucacco, Bifurcation of lunisolar secular resonances for space debris orbits, *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems* 15: 1352–1383, 2016. *IF: 1.819 AIS: 1.730*

L11. C. Lhotka, A. Celletti, C. Galeş, Poynting–Robertson drag and solar wind in the space debris problem, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 460: 802–815, 2016. *IF: 4.952 AIS 1.855*

L12. A. Celletti, C. Galeş, A study of the lunisolar secular resonance  $2\dot{\omega} + \dot{\Omega} = 0$ , *Frontiers in Astronomy and Space Sciences - Fundamental Astronomy*, 31 March 2016, <http://dx.doi.org/10.3389/fspas.2016.00011> (on-line paper).

**Total factor de impact pentru 2016: 17.543**

**Total scor de influență pentru 2016: 15.062**

## Lucrări științifice corespunzătoare obiectivelor din etapa III

- L13. G. Barbagallo, M.V. D’Agostino, R. Abreu, I.D. Ghiba, A. Madeo, P. Neff, Transparent anisotropy for the relaxed micromorphic model: macroscopic consistency conditions and long wave length asymptotics, *International Journal of Solids and Structures* 120: 7–30, 2017. *IF: 2.760 AIS 1.016*
- L14. A. Madeo, P. Neff, G. Barbagallo, M.V. D’Agostino, I.D. Ghiba. A review on wave propagation modeling in band-gap metamaterials via enriched continuum models, In F. dell’Isola, M. Sofonea and D. Steigmann (eds), *Mathematical Modelling in Solid Mechanics*, Volume 69 of the series *Advanced Structured Materials*, pp. 89-105, Springer, 2017.
- L15. C. Burtea, Optimal well-posedness for the inhomogeneous incompressible Navier-Stokes system with general viscosity. *Analysis and PDE Vol. 10*, 2: 439–479, 2017. *IF: 1.532 AIS 2.780*
- L16. C. Burtea, F. Charve, Lagrangian methods for a general inhomogeneous incompressible Navier-Stokes-Korteweg system with variable capillarity and viscosity coefficients, sub tipar, *SIAM J. on Math. Anal.*, 2017. *IF: 1.648 AIS 1.657*
- L17. A. Celletti, C. Gales, G. Pucacco, A. Rosengren, Analytical development of the lunisolar disturbing function and the critical inclination secular resonance, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 127: 259–283, 2017. *IF: 1.584 AIS 0.746*
- L18. A. Bucur, Existence and Uniqueness in the Linear Theory of Thermoviscoelastic Materials with Voids, sub tipar *Annals of the University of Bucharest (mathematical series)*, 2017.
- L19. A. Bucur, Spatial Behavior in Linear Theory of Thermoelastic Materials with a Double Porosity Structure, trimis spre publicare, 2017.

**Total factor de impact pentru 2017: 7.524**

**Total scor de influență pentru 2017: 6.199**

## Comunicări la conferințe internaționale

- C1. I.D. Ghiba, Loss of ellipticity for non-coaxial plastic deformations in additive logarithmic finite strain plasticity and other related results on Hencky-type energies, *86th Annual Meeting of the GAMM*, Braunschweig, Germany, 7–11 martie, 2016.
- C2. I.D. Ghiba, On some Hencky-type energies, *XIII-ème Colloque Franco-Roumain de Mathématiques Appliquées*, Iași, 25–29 august 2016.
- C3. C. Galeș, A study of the lunisolar secular resonances for space debris by using the Hamiltonian formalism, *Computational perturbative methods for Hamiltonian systems - Applications in physics and astronomy*, Athens, 11 iulie–13 iulie, 2016.
- C4. C. Galeș, Resonance effects in the dynamics of space debris, *XIII-ème Colloque Franco-Roumain de Mathématiques Appliquées*, Iași, 25–29 august, 2016.

- C5. C. Galeş, Dynamics of resonances in the space debris problem, *Final Stardust Conference*, ESA ESTEC, Leiden (The Netherlands), 31 octombrie–4 noiembrie, 2016.
- C6. C. Burtea, New long time existence results for a class of Boussinesq-type systems, *XIII-ème Colloque Franco-Roumain de Mathématiques Appliquées*, Iaşi, 25–29 august, 2016.
- C7. A. Bucur, Rayleigh surface waves problem in thermoviscoelastic medium with voids, *11th International Congress on Thermal Stresses 2016 (TS 2016)*, Salerno, Italy, 5–9 iunie, 2016.
- C8. A. Bucur, Spatial behavior in linear theory of thermoviscoelasticity backward in time for porous media, *XIII-ème Colloque Franco-Roumain de Mathématiques Appliquées*, Iaşi, 25–29 august, 2016.
- C9. C. Gales, Dissipative effects in the space debris problem, 9th Humboldt Colloquium on Celestial Mechanics, March 19-25, 2017, Bad Hofgastein (Austria). <https://avhc9.wordpress.com/>
- C10. C. Gales, Resonance effects within LEO, MEO and GEO regions, The Seventh International Meeting on Celestial Mechanics (CELMEC VII), September 3-9, 2017, San Martino al Cimino (VT), Italy. <http://adams.dm.unipi.it/~simca/celmecVII/index.html>
- C11. I.D. Ghiba, P. Neff, R. Martin, A non-rank-one convexity result involving geodesically motivated logarithmic strain measures, ISDMM, 26-29 June, Lyon, Franţa, 2017.

#### **Participări la stagii de cercetare/documentare suportate de grant**

- S1. I.D. Ghiba a participat la un stagiū de cercetare și documentare la Facultatea de Matematică, Universitatea Duisburg-Essen, Germania în perioada 11 ianuarie–18 martie 2016, la invitația Prof. dr. Patrizio Neff.
- S2. C. Galeş a participat la un stagiū de cercetare și documentare la Departamentul de Matematică, Universitatea din Roma Tor Vergata, Italia, în perioada 5 iunie–12 iunie, la invitația Prof. dr. A. Celletti.
- S3. I.D. Ghiba a participat la un stagiū de cercetare și documentare la Facultatea de Matematică, Universitatea Duisburg-Essen, Germania în perioada 16 mai–12 august 2016, la invitația Prof. dr. Mircea Bîrsan.
- S4. C. Galeş a participat la un stagiū de cercetare și documentare la Departamentul de Matematică, Universitatea din Roma Tor Vergata, Italia, în perioada 25 iunie–9 iulie 2016, la invitația Prof. dr. A. Celletti.
- S5. I.D. Ghiba a participat la un stagiū de cercetare și documentare la Facultatea de Matematică, Universitatea Duisburg-Essen, Germania în perioada 28 noiembrie–5 decembrie 2016, la invitația Prof. dr. Patrizio Neff.
- S6. C. Gales, member of the organizing committee of the summer school entitled Satellite Dynamics and Space Missions: Theory and Applications of Celestial Mechanics, 28 August- 2 Septembrie, 2017, San Martino al Cimino (VT), Italy. <http://adams.dm.unipi.it/~simca/sdsm2017/>
- S7. I.D. Ghiba a participat la un stagiū de cercetare și documentare la Facultatea de Matematică, Universitatea Duisburg-Essen, Germania în perioada 21 aprilie–9 mai 2017, la invitația Prof. dr. Patrizio Neff.

## Alte mențiuni

- I.D. Ghiba a primit în octombrie 2016 premiul Iuventus Scientiae acordat de Universitatea Alexandru Ioan Cuza pentru activitatea științifică din timpul anului academic 2015–2016.
- Pe site-ul revistei *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems* lucrarea [L10] apare ca *articol recomandat* (<http://epubs.siam.org/journal/sjaday>).
- Cei doi doctoranzi au obținut titlul de doctor.

## Descrierea rezultatelor obținute în 2015

### Obiectivul 1/2015. Probleme neliniare în mecanică

Referitor la acest obiectiv, în lucrarea [L1] s-a investigat posibilitatea aplicării în plasticitatea finită multiplicativă a unei familii de energii neliniare în care partea volumetrică și cea isocoră sunt decuplate

$$F \mapsto W_{\text{eH}}(F) := \widehat{W}_{\text{eH}}(U) := \begin{cases} \frac{\mu}{k} e^{k \|\text{dev}_n \log U\|^2} + \frac{\kappa}{2\widehat{k}} e^{\widehat{k} [\text{tr}(\log U)]^2} & \text{if } \det F > 0, \\ +\infty & \text{if } \det F \leq 0, \end{cases}.$$

Această familie de energii neliniare se bazează pe tensorul de deformare de tip Hencky-logaritmic  $\log U$ . Aici,  $k, \widehat{k}$  sunt constante fără dimensiune care rămân la dispoziția noastră,  $F = \nabla \varphi$  este gradientul deformării,  $U = \sqrt{F^T F}$  și  $\text{dev}_n \log U = \log U - \frac{1}{n} \text{tr}(\log U) \cdot \mathbb{1}$  este partea deviatorică a tensorului  $\log U$ . Celelalte cantități sunt constante constitutive. Ne referim la energiile din această familie sub numele de energii exponențiale de tip Hencky. În studiile precedente s-a arătat că pentru  $n = 2$  energia  $W_{\text{eH}} : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$  este rank-one convexă pentru  $k \geq \frac{1}{4}$  și  $\widehat{k} \geq \frac{1}{8}$ , și polyconvexă pentru  $k \geq \frac{1}{3}$  și  $\widehat{k} \geq \frac{1}{8}$ . De fapt, după cum va rezulta din lucrarea [L4], în general, pentru energii isotrope și isocore depinzând de  $\log U$  policonvexitatea coincide cu noțiunea de rank-one convexitate și deci nu există nici o falie între  $k \geq \frac{1}{4}$  și  $k < \frac{1}{3}$ . În cazul  $n = 3$  s-a demonstrat că nu există  $k > 0$ , pentru care energia  $F \mapsto e^{k \|\text{dev}_3 \log U\|^2}$ ,  $F \in \text{GL}^+(3)$  ar putea fi rank-one convexă (deci în mod clar nici policonvexă), în ciuda faptului că unele inegalități de tipul inegalității Jensen generalizată au loc de fapt pentru  $n \geq 1$ . Plecând de la acest inconvenient, în etapa I a acestui grant de cercetare am discutat o relație interesantă dintre pierderea elipticității energiei  $W_{\text{eH}}$  în cazul  $n = 3$  și plasticitatea finită. Folosindu-ne de descompunerea multiplicativă  $F = F_e F_p$ , am cuplat această energie cu legi de evoluție  $F_p \frac{d}{dt}[F_p^{-1}] \in -\partial \mathcal{X}(\text{dev}_3 \Sigma_e)$  definite în termenii lui  $F_p$ , unde  $\partial \mathcal{X}$  este subdiferențiala funcției indicatoare  $\mathcal{X}$  a domeniului elastic convex  $\mathcal{E}_e(\Sigma_e, \frac{1}{3} \sigma_y^2) := \{\Sigma_e \in \text{Sym}(3) \mid \|\text{dev}_3 \Sigma_e\|^2 \leq \frac{1}{3} \sigma_y^2\}$  exprimat cu ajutorul tensorului tensiune mixt  $\Sigma_e$ ,  $\Sigma_e = F_e^T D_{F_e} W_{\text{iso}}(F_e)$ , iar  $W_{\text{iso}}(F_e)$  reprezintă partea isocoră a energiei. Arătăm că domeniul unde  $W_{\text{eH}}$  își pierde elipticitatea este prevestit de cuplarea cu fenomenul de plasticitate, deoarece domeniul de elipticitate a energiei  $W_{\text{eH}}$  și domeniul de elasticitate în termenii lui  $\Sigma_e$  sunt strâns legate între ele. Astfel, noua formulare rămâne eliptică în lipsa preîncărcărilor elastice pentru orice predeformare plastică. În plus, în acest domeniu relația tensiune-deformare rămâne monotonă după cum s-a observat din experimente. Păstrarea elipticității este o proprietate care trebuie să fie satisfăcută de orice model plastic hyperelastic deoarece în lipsa preîncărcărilor elastice materialul trebuie să

raspundă reversibil la încărcări elastice. Spre deosebire de modelul multiplicativ, modelul aditiv bazat pe tensorul de deformare Hencky nu conservă elipticitatea. În cazul energiilor exponențiale de tip Hencky  $W_{eH}$ , care nu sunt eliptice pentru deformări mari, am arătat explicit că modelul multiplicativ păstrează elipticitatea.

**Obiectivul 2/2015.** *Metode Hamiltoniene aplicate în studiul dinamicii sistemelor mecanice*

Referitor la acest obiectiv, în lucrarea [L2] am utilizat formalismul Hamiltonian pentru a studia dinamica deșeurilor spațiale aflate în acele regiuni care corespund rezonanțelor minore; mai precis, am considerat rezonanțele 3:1, 3:2, 4:1, 4:3, 5:1, 5:2, 5:3, 5:4, unde rezonanța  $j : \ell$  (cu  $j, \ell \in \mathbb{Z}$ ) semnifică faptul că perioada de revoluție a deșeurilor spațiale și perioada de rotație a Pământului sunt în raport de  $j/\ell$ . Considerând un model matematic care ia în considerare efectele gravitaționale ale Pământului, am studiat principalele aspecte dinamice referitoare la aceste rezonanțe. Rezultatele obținute au fost validate prin compararea cu un model dezvoltat în coordonate carteziane care include pe lângă potențialul terestru, atracția Soarelui, influența Lunii și presiunea radiației solare. Avantajul utilizării formalismului Hamiltonian este acela că oferă argumente analitice care permit explicarea dinamicii globale a rezonanțelor. În colaborare cu Prof. dr. Alessandra Celletti, am demarat un amplu studiu al dinamicii deșeurilor spațiale atât prin metode analitice cât și prin metode numerice. Scopul nostru este acela de a obține o descriere detaliată a regiunilor de rezonanță, pentru a fi capabili în a discrimina între orbite regulate și orbite haotice. Pentru a descrie regiunile care sunt obiectul investigației noastre, amintim următoarea clasificare, devenită standard în momentul de față. Atunci când sunt studiate deșeurile spațiale, se disting trei regiuni principale, denumite LEO (Low–Earth–Orbit), MEO (Medium–Earth–Orbit) și GEO (Geostationary–Earth–Orbit); altitudinea acestor regiuni variază în funcție de următoarea descriere. Regiunea LEO, aflată între altitudinile 0 și 2 000 km, este afectată în ordinea importanței de forța de atracție a Pământului, forța de frecare cu aerul, nesfericitatea Pământului prin termenii armonici  $J_2$  și  $J_{22}$ , atracția Lunii, influența Soarelui și presiunea radiației solare. Așa numita "durată de viață orbitală" a unui deșeu spațial, pe o orbita circulară cu altitudinea de aproximativ 250 km, este mai mică de 20 de zile, iar în acest caz, sunt necesare manevre frecvente pentru a menține aceeași altitudine verticală. La altitudinea de 400 km durata de viață este mai mica de 200 zile, în timp ce la 800 km se ajunge la câteva sute de ani. Regiunea MEO, situată între 2 000 și 30 000 km, este afectată (în ordinea importanței), de următorii factori: atracția gravitațională a Pământului, termenii armonici  $J_2$  și  $J_{22}$ , forța de atracție a Lunii, urmată de gravitația Soarelui și presiunea radiației solare (a se vedea, de exemplu, C.C. Chao, *Applied Orbit Perturbation and Maintenance*, Aerospace Press Series, AIAA, Reston, Virginia (2005)). Orbitele GPS se află la aproximativ 26 560 kilometri de centrul Pământului; aici sateliții se deplasează cu o viteză de aproximativ 3,9 km/sec și au perioada de revoluție de 12 ore (timp sideral), adică jumătate din perioada de rotație a Pământului. Această situație este denumită rezonanță gravitațională de tipul 2 : 1. Identificarea caracterului dinamic în jurul rezonanței 2 : 1 este de o importanță vitală pentru următoarele motive: regiunile stabile minimizează creșterea excentricității orbitei, în timp ce comportamentul haotic poate fi abil exploatat pentru a deplasa deșeurile în regiuni "cimitir" sau de a le modifica orbita în așa fel încât să intre și să se distrugă în atmosferă. GEO este regiunea aflată la altitudini mai mari de 30 000 km. Aceasta este afectată (în ordinea importanței), de atracția gravitațională a Pământului, termenii armonici  $J_2$ , atracția Lunii, influența Soarelui, termenii armonici  $J_{22}$  și presiunea radiației solare (a se vedea A. Lemaître, N. Delsate, S. Valk, *A web of secondary resonances for large A/m geostationary debris*, Celest. Mech. Dyn. Astr. 104, 383–402 (2009); S. Valk, N. Delsate, A. Lemaître, T. Carletti, *Global dynamics of high area-to-mass ratios geosynchronous space debris by means of the MEGNO indicator*, Advances in

Space Research, 43, 1509–1526 (2009)). În regiunea GEO, mecanismele de disipare sunt absente; fiecare deșeu creat în această regiune va rămâne acolo pentru totdeauna.

În această etapă, am studiat rezonanțele gravitaționale aflate în regiunea MEO, între 14000 km și 37000 km față de centrul Terrei. Utilizând o serie de metode matematice bazate pe formalismul Hamiltonian și teoria perturbațiilor, am dezvoltat un model care descrie cu o foarte bună aproximare dinamica deșeurilor spațiale. În acest sens, potențialul terestru a fost dezvoltat în serie Fourier până la un ordin care depinde de rezonanța studiată. Întrucât această dezvoltare conține un număr mare de termeni, urmând procedura descrisă în lucrarea: A. Celletti, C. Galeş, *On the dynamics of space debris: 1:1 and 2:1 resonances*, J. Nonlinear Science 24, n. 6, 1231–1262 (2014), am introdus noțiunea de termen dominant într-o regiune specifică a spațiului fazelor. Acest fapt permite să reducem considerabil numărul termenilor armonici ai dezvoltării, putându-ne astfel concentra doar asupra acelor termeni care influențează direct dinamica. Pentru valori rezonabile ale elementelor orbitale, rezonanțele au o structură asemănătoare unui pendul matematic perturbat, care în spațiul fazelor prezintă o zonă ("insulă") de librație (oscilație) care înconjoară punctul de echilibru stabil. Prezentăm un algoritm matematic simplu care permite calcularea cu un efort minim a amplitudinii rezonanțelor. Coroborând toate aceste informații legate de termenii dominanți și calculul amplitudinii rezonanțelor, am demonstrat un rezultat care prezice dacă "insulele" de librație asociate diversilor termeni ai dezvoltării sunt disjuncte sau se suprapun. Predicția acestui comportament este foarte importantă întrucât ne permite să discriminăm între orbitele regulate și orbitele haotice. Dacă insulele sunt disjuncte, comportamentul este predictibil, în timp ce fenomenul de suprapunere a insulelor de librație dă naștere mișărilor haotice. Propunem un mecanism de transfer care necesită costuri mici în deplasarea deșeurilor în diverse regiuni ale spațiului, iar în final, studiem un fenomen de bifurcație, care se produce în cazul unor rezonanțe, și care provoacă o schimbare bruscă a caracterului stabil sau instabil al punctelor de echilibru.

Toate aceste rezultate calitative sunt dublate de studii numerice care permit cartografierea spațiului fazelor pentru diverse valori ale elementelor orbitale. În acest sens, este calculat indicatorul Fast Lyapunov Indicator, care permite discriminarea între orbitele regulate și orbitele haotice. Rezultatele sunt validate și prin integrarea numerică a ecuațiilor carteziene care descriu mișcarea, incluzând aici și atracția Lunii, atracția Soarelui precum și presiunea radiației solare.

## Descrierea rezultatelor obținute în 2016

### Obiectivul 1/2016. *Probleme neliniare în mecanică*

Referitor la acest obiectiv, să reamintim faptul că implicațiile

$$\text{policonvexitatea} \implies \text{quasiconvexitatea} \implies \text{rank-one convexitatea}$$

au loc pentru orice dimensiune  $n$ . Cu toate acestea, este cunoscut faptul că rank-one convexitatea nu implică policonvexitatea și că pentru  $n > 2$  rank-one convexitatea nu implică quasiconvexitatea. Problema răspunsul la întrebarea dacă rank-one convexitatea implică quasiconvexitatea este considerată una dintre problemele majore în calculul variațional. Morrey a afirmat în 1952 că aceste două concepte nu sunt echivalente, adică există funcții  $W : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}$  care sunt rank-one convexe dar nu sunt quasiconvexe. Totuși, există unele clase de energii pentru care cele două noțiuni coincid (a se vedea lucrările lui Müller și ale lui Ball).

Urmând această idee, în lucrare [L3] se prezintă o nouă condiție pentru care rank-one convexitatea implică policonvexitatea (și prin urmare și quasiconvexitatea). Se arată că orice funcție  $W : \text{GL}^+(2) \rightarrow \mathbb{R}$  care este izotropă, obiectivă (i.e. bi-SO(2)-invariant) dar și izocoră este rank-one convexe dacă și numai dacă este policonvexă. Folosind acest rezultat general, se arată că, pentru

$n = 2$ , energiile din clasa energiilor exponențiale de tip Hencky sunt rank-one convexe dacă și numai dacă sunt policonvexe.

Necesitate identificării domeniului de elipticitate pentru invariantul izotrop  $\|\text{dev}_n \log U\|^2$  al tensorului de deformare logarimic  $\log U$  apare ca urmare a observației că partea izocoră  $\|\text{dev}_n \log U\|^2$  a energiei Hencky pătratică nu este rank-one convexă pe  $SL(n)$  pentru  $n = 2, 3$ . Este ușor de verificat dacă o energie este rank-one convexă sau nu. Este de asemenea clar că există o vecinătate a matricei identitate unde condiția Legendre-Hadamard este satisfăcută. Ce este dificil este de a determina analitic cu exactitate care este domeniul maxim de elipticitate. Cu toate acestea, în lucrare [L4] am determinat numeric domeniu maxim de elipticitate pentru  $\|\text{dev}_n \log U\|^2$  și am folosit o cale intermediară pentru a determina o multime considerabilă în care energia este eliptică. Calculele numerice și graficele obținute arată, după unele transformări convenabil alese, faptul că secțiunea acestui domeniu este elipsa maximă ce poate fi inclusă în secțiunea domeniului maxim de elipticitate.

Este cunoscut faptul că problema elipticității este strâns legată de studiul propagării undelor. Problema propagării undelor de suprafață Rayleigh are ca principală aplicație studiul mișcărilor solului ca urmare a exploziilor sau a cutremurelor. De asemenea, unele de suprafață au fost aplicate cu succes și în multe domenii tehnologice, cum ar fi studiul rezistenței materialelor, al senzorilor, al reactoarelor nucleare, al rezonatoarelor, al componentelor electronice etc. În lucrare [L5] am discutat efectele termice și efectele memoriei asupra propagării undelor de suprafață Rayleigh într-un semispațiu alcătuit dintr-un material termovâscoelastic cu goluri, gradat exponențial. Utilizând procedeul descris de către Destrade (2007), am considerat că densitatea de masă și coeficienții constitutivi variază exponențial în raport cu adâncimea semispațiului considerat. Prezența energiei de disipare implică descreșterea asimptotică a soluției problemei propagării undelor de suprafață Rayleigh atunci când timpul tinde la infinit. Luând în considerare caracterul disipativ al modelului termovâscoelastic poros, se studiază problema propagării undelor de suprafață Rayleigh. Condiția de propagare a fost stabilită sub forma unei ecuații algebrice de gradul zece, cu coeficienți complexi. Soluțiile proprii ale sistemului dinamic sunt obținute explicit în termenii soluțiilor caracteristice. Soluția problemei propagării undelor de suprafață Rayleigh este reprezentată ca o combinație liniară de cinci soluții proprii, iar ecuația seculară este stabilită în formă implicită. Rezultatele sunt ilustrate și pentru cazul unui semispațiu termovâscoelastic poros, izotrop și neomogen. Forma explicită a ecuației seculare este determinată pentru cazul mediilor izotrope și omogene. Sunt prezentate unele rezultate numerice pentru a evidenția rezultatele teoretice obținute.

În lucrarea [L6] considerăm posibilitatea de a obține diferite tipuri de concepte de majorizare, utile în studiul elipticității din mecanica neliniară, folosind o procedură de minimizare a unor energii/functionale perturbate. De asemenea, conexiuni cu conceptul de convexitate relativă folosind inegalitatea lui Jensen sunt stabilite. Considerăm  $x = (x_1, \dots, x_N)$  and  $y = (y_1, \dots, y_N)$  doi vectori din  $\mathbb{R}^N$ . Vom lega minimizantii folosind inegalități din teoria clasică a majorizării și obținem o extensie interesantă a inegalității Hardy-Littlewood-Polya: Fie  $\alpha \geq 0$  și  $x, y \in \mathbb{R}_+^N$  doi vectori astfel încât  $x \prec_\alpha y$ . Atunci, pentru fiecare funcție convexă  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  are loc inegalitatea

$$\frac{f(x_1) + \dots + f(x_N)}{N} \leq \frac{1}{1 + \alpha} \frac{f(y_1) + \dots + f(y_N)}{N} + \frac{\alpha}{1 + \alpha} f(0). \quad (1)$$

Mai mult, prezentăm o generalizare a inegalității Hardy-Littlewood-Polya pentru  $\alpha$ -majorizare, ce folosește noțiunea de punct de convexitate: Considerăm  $\alpha \geq 0$  și  $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}_+^N$ , unde  $x_1, \dots, x_N$  sunt puncte de convexitate ale funcției crescătoare  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Atunci pentru fiecare  $y = (y_1, \dots, y_N)$  ce verifica  $x \prec_\alpha y$  are loc inegalitatea  $\sum_{i=1}^N f(x_i) \leq \sum_{i=1}^N f(y_i)$ . Partea

finală a lucrării este dedicată posibilității de a considera noul concept de majorizare de mai sus în spațiile cu geometrie curbă, folosind unele idei dintr-o lucrare anterioară a autorului împreună cu C. P. Niculescu.

**Obiectivul 2/2016.** *Studiul ecuațiilor Euler și a sistemelor hibride*

La modul general, curgerea unui fluid ideal, incompresibil, irotațional într-un canal este rezolvată de ecuațiile Euler cu frontieră liberă. În cele mai multe cazuri aceste ecuații se dovedesc prea complicate pentru a obține informații relevante practic (spre exemplu dacă avem în vedere aplicații în ingineria costieră). O idee pentru a surmonta această dificultate este aceea de a deriva modele asimptotice în funcție de problema fizică concretă care să încorporeze anumite aspecte particulare. Regimul Boussinesq descrie unde hidrodinamice de amplitudine mică cu lungime de undă mare, în raport cu adâncimea canalului. Astfel, în 2002 este obținută următoarea familie de sisteme de ecuații cu derivate parțiale (familie cunoscută sub numele de sisteme *abcd*) ce are în vedere unde în regimul Boussinesq:

$$\begin{cases} (I - \varepsilon b \Delta) \partial_t \eta + (I + \varepsilon a \Delta) \operatorname{div} V + \varepsilon \operatorname{div} (\eta V) = 0, \\ (I - \varepsilon d \Delta) \partial_t V + (I + \varepsilon c \Delta) \nabla \eta + \frac{\varepsilon}{2} \nabla |V|^2 = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Mai sus,  $\eta \in \mathbb{R}$  reprezintă variația suprafeței libere în raport cu poziția de echilibru iar câmpul vectorial  $V \in \mathbb{R}^2$  este o aproximare a câmpului de viteză inițial. Numerele reale  $a, b, c, d, \varepsilon$  sunt parametrii de modelare. Parametrul  $\varepsilon$  caracterizează regimul Boussinesq și este presupus a fi mic i.e.  $\varepsilon \ll 1$ . Având în vedere caracterul de aproximare a modelului Euler, o teorie a existenței globale a soluțiilor pentru familia (2) (de altfel săracă din cauza dificultăților de ordin teoretic) este irelevantă practic. Pentru aplicații în ingineria costieră, spre exemplu, o teorie a existenței ce persistă pe un timp lung (de ordin  $\varepsilon^{-1}$  când efectele neliniare și cele dispersive au o contribuție de ordin 1 la evoluția undei) este suficientă. Astfel, problema existenței pe timp lung consistă în construirea unei soluții unice pentru problema Cauchy corespunzătoare sistemului (2) al cărei timp de existență să fie minorat de o cantitate de ordin  $\varepsilon^{-1}$ . Această problemă a fost abordată anterior de diverși autori. În articolul [L7] punând în funcțiune mașinăria Littlewood-Paley generalizăm o parte din rezultatele anterior menționate prin reducerea nivelului de regularitate necesar pentru rezolvarea problemei Cauchy pe timp lung. Spre deosebire de celelalte lucrări consacrate acestei probleme, metoda abordată de noi are avantajul de a nu fi sensibilă cu privire la valoarea parametrilor permițându-ne astfel să abordăm de o manieră uniformă majoritatea cazurilor generate de alegerea parametrilor  $a, b, c, d$ .

Remarcăm faptul că întrucât sistemele (2) reprezintă o aproximare a modelului Euler, o teorie a existenței ce persistă pe un timp lung (de ordin  $\varepsilon^{-1}$  când efectele neliniare și cele dispersive au o contribuție de ordin 1 la evoluția undei) este suficientă pentru scopuri practice. Rezultate în acest sens sunt obținute anterior, cadrul funcțional adoptat în aceste lucrări este cel al spațiilor Sobolev modelate pe  $L^2$  cu indice de regularitate  $s > \frac{n}{2} + 1$  unde  $n$  este dimensiunea spațiului ambient. Aceste funcții sunt esențial localizate spațial întrucât ele se anulează la infinit. Astfel, acest cadru nu este adaptat studiului mascareților care sunt exemple de valuri ce se propagă în sensul opus curgerii apei dintr-un canal. În [L8] propunem un cadru funcțional care să permită rezolvarea problemei Cauchy asociată sistemelor (2) cu  $a = c = 0$  astfel încât să putem considera date inițiale de tip mascaret. Mai precis, în cazul 1-dimensional putem considera date inițiale continue  $\eta_0^{1D}$  așa încât:  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \eta_0^{1D}(x) = \eta_{\pm}$ . Pentru cazul 2-dimensional considerăm date inițiale care sunt esențial perturbări 2-dimensionale ale situației precedente, mai precis considerăm:

$$\begin{cases} \eta_0^{2D}(x, y) = \eta_0^{1D}(x) + \phi(x, y), \\ V_0^{2D}(x, y) = (u_0^{1D}(x) + \psi_1(x, y), \psi_2(x, y)) \end{cases}$$

și cerem ca

$$\lim_{|(x,y)| \rightarrow \infty} |\phi(x,y)| = 0 \text{ și } \lim_{|(x,y)| \rightarrow \infty} |\psi_i(x,y)| = 0 \text{ pentru } i = 1, 2.$$

Demonstrația este bazată pe teorie Littlewood-Paley cât și pe o împărțire bine aleasă a datei inițiale în frecvențe joase, respectiv înalte, iar rezultatele sunt utile (eventual reinterpretând semnificația fizică a cantităților ce apar în sistem) și în studiul sistemelor hibride.

În lucrarea [L9] considerăm o schemă semi-discretă cu diferențe finite pentru aproximarea controalelor la frontieră pentru ecuația undelor 1-dimensională. Oscilațiile mari ale frecvențelor înalte duc la pierderea (în raport cu pasul de discretizare) a proprietății de controlabilitate al modelului semi-discret. Am demonstrat că, filtrând frecvențele înalte ale datei inițiale într-un rang optim, vom restabili proprietatea de controlabilitate uniformă. Mai mult, obținem o relație între rangul de filtrare și timpul minimal de control necesar pentru a asigura uniform controlabilitatea, redescoperind în multe cazuri timpul minimal de control al ecuației undelor continue. Fie  $N \in \mathbb{N}^*$  și  $h = \frac{1}{N+1}$ . Pentru  $T > 0$ , considerăm următoarea discretizare cu diferențe finite a ecuației undelor:

$$\begin{cases} u_j''(t) - \frac{u_{j+1}(t) - 2u_j(t) + u_{j-1}(t)}{h^2} = 0 & 1 \leq j \leq N, t > 0, \\ u_0(t) = 0 & t \in (0, T), \\ u_{N+1}(t) = v_h(t) & t \in (0, T), \\ u_j(0) = u_j^0, \quad u_j'(0) = u_j^1 & 1 \leq j \leq N. \end{cases} \quad (3)$$

Considerând  $T \geq 2$ ,  $h > 0$  și  $((u_j^0, u_j^1))_{1 \leq j \leq N} \in \mathbb{C}^{2N}$ , studiem existența unei funcții de control  $v_h \in C^0([0, T])$  astfel încât soluția ecuației (3) verifică

$$u_j(T) = u_j'(T) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, N).$$

Studiem existența unui șir uniform mărginit de controale  $(v_h)_{h>0}$  în raport cu pasul de discretizare  $h$ . Rezultatul principal este: Fie  $(u^0, u^1) \in L^2((0, 1), \mathbb{C}) \times H^{-1}((0, 1), \mathbb{C})$  și fie  $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$  o funcție crescătoare (ce corespunde funcției de filtrare a modurilor) ce verifică  $f(N) \leq N$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$  și  $f(N) \rightarrow \infty$  când  $N \rightarrow \infty$ . Vom nota prin

$$\Gamma(f) := \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{f(N)}{N} \in [0, 1]. \quad (4)$$

Atunci, pentru orice  $T > \frac{2}{1 - \sin(\frac{\pi\Gamma(f)}{2})}$ , există un control  $v_h \in C^0([0, T], \mathbb{C})$  ce duce soluția problemei (3) (cu condiția inițială  $U_h^0$ ) la  $(0, 0)$  astfel încât șirul  $(v_h)_{h>0}$  este mărginit în  $C^0([0, T], \mathbb{C})$ . Prin acest rezultat îmbunătățim rezultatele obținute în Micu, S., *Uniform boundary controllability of a semi-discrete 1-D wave equation*, *Numer. Math.*, 91 (2002), 723-768. Mai mult, obținem o estimare precisă a timpului minimal de control, ce se dovedește a fi optimal atunci când filtrăm destul de multe de frecvențe. De exemplu, dacă  $f(N) = o(N)$  (cazul în care  $f(N) = N^\alpha$  cu  $\alpha \in (0, 1)$ ), atunci  $\Gamma(f) = 0$ , obținem uniform controlabilitatea pentru orice timp  $T > 2$ , care este timpul minimal de control al sistemului continuu. Acest rezultat este optimal, este cunoscut faptul că nu putem alege  $\Gamma(f) = 1$ , în acest caz controalele explodează exponențial când  $h$  tinde la 0.

### Obiectivul 3/2016. Metode Hamiltoniene aplicate în studiul dinamicii sistemelor mecanice

În ceea ce privește acest obiectiv, în lucrările [L10] și [L12] s-a folosit formalismul Hamiltonian cu scopul de a studia rezonanțele care influențează dinamica deșeurilor cosmice. Mai mult decât atât, în lucrarea [L11] au fost studiate efectele disipative cauzate de vântul solar și efectul

Poynting–Robertson. S-a demonstrat că interacțiunea dintre diferitele forțe perturbatoare are ca efect o dinamică complexă a deșeurilor cosmice. O analiză detaliată bazată pe metode și tehnici Hamiltoniene relevă existența unor fenomene dinamice diverse, cum ar fi: bifucații, suprapuneri de rezonanțe, variații ale amplitudinii rezonanțelor, haos etc. Aceste fenomene explică variația observată a elementelor orbitale.

Înainte de a intra în detalii, se cuvine să menționăm că de la începutul erei spațiale, un număr mare de deșeuri s-au acumulat în vecinătatea Pământului. Astfel de obiecte, a căror mărime variază de la câțiva milimetri la câțiva centimetri, sunt resturi ale exploziilor unor nave spațiale sau coliziuni, sateliți neoperaționali, trepte ale unor rachete, etc. Estimările actuale arată că există aproximativ  $3 \cdot 10^8$  obiecte cu dimensiuni mai mari de  $1 \text{ mm}$  și aproximativ  $3.5 \cdot 10^5$  obiecte mai mari de  $1 \text{ cm}$ . Impactul navelor spațiale operaționale sau sateliților cu astfel de obiecte ar putea duce la situații periculoase sau chiar dramatice; acumularea de resturi spațiale în anumite regiuni ale cerului – acolo unde sunt poziționați majoritatea sateliților operaționali – nu mai poate fi neglijată. Este esențială înțelegerea dinamicii acestor corpuri pentru strategiile de întreținere și control, precum și pentru a stabili diverse proceduri care să atenueze efectele produse de resturile spațiale.

În lucrarea [L10], utilizând teoria bifurcațiilor, s-au studiat rezonanțele seculare induse de Soare și Lună. În particular, a fost abordată o clasă specială de rezonanțe, și anume rezonanțele care depind doar de înclinații. Această clasă cuprinde trei tipuri distincte de rezonanțe seculare: cele care se produc la înălțimea critică, cele care corespund orbitelor polare, iar un al treilea tip presupune o combinație liniară a ratelor de variație a argumentului perigeului și longitudinii nodului ascendent. Modelul care descrie dinamica deșeurilor cosmice include perturbațiile datorate nesfericității Pământului, atracția Lunii și atracția Soarelui, și este definit în termenii variabilelor unghiuri–acțiuni. Împrumutând tehnici și metode din teoria bifurcațiilor și teoria sistemelor Hamiltoniene, au fost studiate o serie de orbite periodice și determinată acea valoare a energiei care conduce la fenomenul de bifurcație în cadrul rezonanțelor seculare. Această abordare oferă informații privind existența și poziția punctelor de echilibru, care ne-a permis să identificăm regiunile stabile și instabile ale spațiului fazelor. Studiul rezonanțelor este important nu doar din punct de vedere al aplicațiilor; acesta oferă o perspectivă interesantă și în ceea ce privește teoria bifurcațiilor.

În lucrarea [L11] s-a analizat efectul combinat al vântului solar și efectul Poynting–Robertson. S-a propus un model matematic utilizând formalismele: cartezian, Gaussian și Hamiltonian. Pe baza acestui model, s-a studiat în detaliu rezonanța geostaționară. Celelalte rezonanțe, aflate în regiunea MEO și în afara inelului geostaționar se studiază în mod asemănător. Utilizând atât abordări numerice cât și analitice a fost determinată rata de descreștere a altitudinii orbitelor, efect datorat vântului solar și efectului Poynting–Robertson. După o analiză calitativă a stabilității punctelor de echilibru, s-a studiat comportamentul regulat, rezonant și haotic pentru un eșantion de condiții inițiale. Rezultatele, depin de valoarea parametrului arie-pe-masă, și arată diverse comportări din punct de vedere dinamic: captări temporare în rezonanța geostaționară (primară) precum și captări temporare în rezonanțele secundare care implică rata de variație a longitudinii Soarelui. Această analiză arată că dacă se studiază mișcarea pe un interval de timp lung (de ordinul sutelor de ani), vântul solar și efectul Poynting–Robertson trebuie luate în considerare în modelarea dinamicii deșeurilor spațiale. Fenomenele puse în evidență de modelele matematice introduse, pot fi expluate practic prin plasarea deșeurilor în regiuni convenabile ale spațiului.

Lucrarea [L12] conține un studiu al rezonanțelor seculare. În particular, este considerată rezonanța descrisă de relația  $2\dot{\omega} + \dot{\Omega} = 0$ , unde  $\omega$  și  $\Omega$  reprezintă argumentul perigeului și respectiv longitudinea nodului ascendent. Această rezonanță este deosebit de importantă întrucât afectează evoluția constelațiilor de sateliți GNSS (global navigation satellite systems). S-au introdus trei

modele matematice distincte, cu grade diferite de complexitate. Pe baza acestora, s-a arătat că creșterea excentricității orbitelor, așa cum a fost pusă în evidență de observații asupra deșeurilor aflate în MEO și sateliților GNSS, poate fi explicată ca un efect natural al rezonanței seculare  $2\dot{\omega} + \dot{\Omega} = 0$ , în timp ce variația haotică a parametrilor orbitali este rezultatul interacțiunii și suprapunerii rezonanțelor aflate în vecinătate.

## Descrierea rezultatelor obținute în 2017

### Obiectivul 1/2017. *Teorii relaxate în elasticitate*

În lucrarea [L13], studiem clase de anisotropie a unor tensori de ordin patru în teoria relaxată a mediilor micromorfe. În contrast cu teoria clasică, în teoria relaxată se folosesc doar tensorii elasticității clasice având cel mult 21 componente independente împreună cu alte 6 componente ai tensorilor de cuplare. Arătăm că în cazul limită  $L_c \rightarrow 0$  coeficienții meso- și micro- ai teoriei relaxate pot fi puși în relație directă cu coeficienții macroscopici prin unele formule de omogenizare. Arătăm că o formulă similară nu este posibilă în cazul teoriei Mindlin-Eringen. Rezultatele noastre ne ajută să folosim teoria relaxată la studiul metamaterialelor anizotrope.

În lucrarea [L14], considerăm modelul micromorfic relaxat cu ponderi și studiem în profunzime curbele de dispersie când parametrii constitutivi variază. Se arată că împărțirea tensorului  $P_t$  furnizează un control asupra undelor optice. Acest lucru este crucial în calibrarea modelului micromorfic cu fenomenul band-gap care apare în metamateriale.

Teoria mediilor poroase reprezintă un domeniu de cercetare modern, fapt dovedit și prin numărul mare de articole publicate în ultimii ani, acestea prezentând numeroase aplicații în domenii ca industria petrolieră, construcții, chimie, biomedicină. În anul 2011, Ieșan a introdus teoria mediilor termovâscoelastice poroase. Aceste medii prezintă o microstructură cu o proprietate importantă: densitatea de masă în fiecare punct al materialului poate fi scrisă ca produsul dintre densitatea materialului matriță și funcția porozitate. În [L18] se studiază problema existenței și a unicității soluției în contextul teoriei liniare a mediilor termovâscoelastice poroase. Vom considera problema la limită cu valori inițiale, cu condiții Dirichlet omogene pe frontieră asociată acestor medii pentru cazul general, al mediilor anizotrope și neomogene, și vom presupune că densitatea de energie internă este pozitiv definită. Pentru a studia problema existenței și a unicității soluției, vom transforma problema la limită cu valori inițiale într-o problemă Cauchy abstractă într-un spațiu Hilbert potrivit ales. Apoi, utilizând rezultate din teoria semigrupurilor de operatori liniari, vom deriva un rezultat de existență și unicitate a soluției slabe. Metoda utilizată pentru demonstrarea acestui rezultat ne conduce în final la o estimare ce descrie dependența continuă a soluției slabe în raport cu datele inițiale și încărcările masice.

În lucrare [L19] se studiază comportarea spațială și temporală a soluțiilor în contextul teoriei mediilor termoelastice cu dublă porozitate. Așadar, vom considera teoria liniară propusă de către Ieșan și Quintanilla în 2014. Acest model consideră două tipuri de porozitate: o macro porozitate corespunzătoare golurilor din material și o micro porozitate corespunzătoare fisurilor sau crăpăturilor din material. Mediile termoelastice cu dublă porozitate prezintă numeroase aplicații în domenii ca biomedicina, geofizica, industria energetică. Problema comportării spațiale a soluției problemei la limită cu valori inițiale asociată teoriei liniare a mediilor termoelastice cu dublă porozitate este studiată utilizând metoda propusă de către Chiriță și Ciarletta (1990). Așadar, vom considera două măsuri ponderate ale soluției și vom deduce unele proprietăți ale acestor măsuri. Pentru a descrie comportarea spațială a soluției, deducem unele estimări exponențiale cu rate de creștere, respectiv de descreștere dependente de timp. Așadar, pentru cazul domeniilor mărginite, vom obține estimări de tipul Saint-Venant, iar pentru cazul domeniilor nemărginite,

vom deduce o alternativă de tipul Phragmén-Lindelöf. Combinând aceste două tipuri de estimări, vom obține o descriere completă asupra comportării spațiale a soluției. Mai mult, în această lucrare, studiem comportarea asimptotică a energiei totale în contextul teoriei liniare a mediilor termoelastice cu dublă porozitate. Vom introduce măsurile Césaro pentru diversele părți ale energiei, și, utilizând unele identități de tip Lagrange-Brun, vom stabili unele relații ce descriu comportarea asimptotică a energiei. Mai precis, am demonstrat că energia termică medie tinde la zero atunci când timpul tinde la infinit și, în plus, are loc un rezultat de echipartiție asimptotică între măsurile Césaro asociate energiei cinetice și energiei interne.

**Obiectivul 2/2017.** *Studiul ecuațiilor Euler și a sistemelor hibride*

Sistemul Navier-Stokes pentru un fluid incompresibil neomogen se scrie:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) - \operatorname{div}(\mu(\rho) D(u)) + \nabla P = 0, \\ \operatorname{div} u = 0, \\ u|_{t=0} = u_0. \end{array} \right. \quad (5)$$

Mai sus,  $\rho > 0$  reprezintă densitatea fluidului,  $u \in \mathbb{R}^n$  este câmpul de viteze iar  $P$  reprezintă câmpul de presiune. Coeficientul de vâscozitate  $\mu$  este modelat de o funcție netedă, strict pozitivă ce depinde de  $\rho$  în timp ce

$$D(u) = \nabla u + Du$$

reprezintă tensorul de deformare. Sistemul de mai sus este folosit pentru a studia amestecuri de fluide cu densități diferite, spre exemplu fluide conținând o substanță topită, apă/aer poluat etc. În ultimii cinsprezece ani, o mare atenție a fost acordată studiului problemei Cauchy în așa zisele spații critice. În contextul spațiilor Besov, acestea sunt:

$$\rho_0 - \bar{\rho} \in \dot{B}_{p_1, r_1}^{\frac{n}{p_1}}(\mathbb{R}^n) \text{ respectiv } u_0 \in (\dot{B}_{p_2, r_2}^{\frac{n}{p_2}-1}(\mathbb{R}^n))^n. \quad (6)$$

În lucrarea [L16], rezolvăm problema Cauchy pentru sistemul (5) corespunzând cazului când data inițială verifică:

$$\rho_0 - \bar{\rho} \in \dot{B}_{p,1}^{\frac{3}{p}}(\mathbb{R}^3), u_0 \in (\dot{B}_{p,1}^{\frac{3}{p}-1}(\mathbb{R}^3))^3, p \in \left(\frac{6}{5}, 4\right),$$

și, în plus, presupunem următoarele ipoteze:

- funcția  $\mu$  este strict pozitivă netedă arbitrară,
- nu presupunem nicio restricție de mărime asupra variației densității,
- nu impunem ipoteze suplimentare de regularitate pentru frecvențele joase ale datelor inițiale.

Astfel, obținem o generalizare a teoriei locale de existență și unicitate construită de H. Abidi, G. Gui și P. Zhang. Într-o primă fază, rescriem sistemul (5) în coordonate lagrangiene. În mod natural, suntem nevoiți să tratăm un sistem de tip Stokes cu coeficienți variabili. Pentru a putea obține estimări a priori pentru acest sistem, arătăm ca operatorul soluție pentru ecuația eliptică care regizează evoluția câmpului de presiune este continuu de la spațiul  $(\dot{B}_{p,1}^{\frac{3}{p}-1}(\mathbb{R}^3))^3$  (pentru

$p \in (\frac{6}{5}, 4)$ ) în el însuși. În lucrarea [L17], scrisă în colaborare cu F. Charve, tratăm cazul în care fluidul în cauza manifestă efecte datorate capilarității.

**Obiectivul 1/2017.** *Metode Hamiltoniene aplicate în studiul dinamicii sistemelor mecanice*

În lucrarea [L17] a fost furnizată o prezentare detaliată a seriilor analitice care descriu forțele perturbatoare datorate Lunii și Soarelui. Deși există numeroase lucrări consacrate acestui subiect, multe rezultate conțin greșeli, fie în expresia finală a seriei, fie în demonstrații, fiind necesară astfel o reformulare și corectare a calculelor și demonstrațiilor originale. În studiul nostru, am prezentat pe larg dezvoltarea în serie a perturbației lunare. Am prezentat mai întâi dezvoltarea Kaula, care include elementele orbitale ale satelitului și Lunii raportate la ecuatorul ceresc. Apoi am prezentat demonstrația dezvoltării Lane, în care elementele orbitale ale Lunii sunt raportate la ecliptică, iar elementele orbitale ale satelitului sunt raportate la ecuatorul ceresc. Utilizând această abordare, înclinația Lunii devine constantă, în timp ce argumentul perigeului, longitudinea nodului ascendent și anomalia medie varază liniar în timp. S-a realizat o comparație între diverse dezvoltări în serie și s-a profitat de ocazie pentru a puncta o serie de erori existente în literatura de specialitate, care pot compromite corectitudinea rezultatelor. Ca aplicație, s-a analizat evoluția pe termen lung a orbitelor eliptice Molniya. Dezvoltările analitice prezentate aici sunt mult mai eficiente în comparație cu studiile bazate pe abordarea carteziană deoarece acestea permit o evaluare intuitivă și foarte rapidă a dinamicii globale a problemei investigate.

DIRECTOR DE PROIECT,

Dr. Ionel-Dumitrel Ghiba