

RAPORT ȘTIINȚIFIC

privind implementarea proiectului

Metode matematice aplicate în studiul sistemelor mecanice, PN-III-P1-1.1-TE-2016-2314

contract de finanțare nr. 69 din 02/05/2018

Etapa 2018

Studiile, activitățile și sarcinile intermediare în etapa 2018 din cadrul proiectului s-au referit la tema:

1. Convexitate de rank unu și policonvexitate în elasticitatea neliniară

Obiectivul prevăzut în această etapă a fost îndeplinit în totalitate, rezultatele fiind detaliate în acest raport de cercetare după o scurtă descriere schematică a stadiului cercetării din cadrul proiectului. Au fost publicate 2 lucrări în reviste indexate ISI însumând $IF=4.011$ $AIS=5.081$. Membrii contractului au participat la 6 conferințe internaționale cu prezentări orale și la 2 stagii de pregătire în străinătate.

În cadrul proiectului s-au realizat următoarele:

Lucrări științifice corespunzătoare obiectivelor din etapa I

- L1. **I.D. Ghiba**, R.J. Martin, P. Neff. Rank-one convexity implies polyconvexity in isotropic planar incompressible elasticity, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 116, 88-104, 2018, $IF=1.848$, $SRI=3.767$
- L2. R.J. Martin, **I.D. Ghiba**, P. Neff, A non-ellipticity result, or the impossible taming of the logarithmic strain measure, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 102, 147-158, 2018, $IF=2.163$, $SRI=1.314$

Total factor de impact pentru 2018: 4.011

Total scor de influență pentru 2018: 5.081

Comunicări la conferințe internaționale

- C1. I.D. Ghiba, Rank-one convexity and polyconvexity for some classes of functions, Workshop in analysis, differential equations and mechanics, ICUB and Faculty of Mathematics, University of Bucharest, 9 November, 2018. (cu R. Martin și P. Neff) <https://sites.google.com/site/cristianmihaicazacu/mini-workshop-icub-fmi>
- C2. E. Vărvărucă, Large-amplitude steady gravity water waves with constant vorticity, *Analyse, analyse numérique et contrôle des milieux continus*, București, 21-23 mai, 2018. (cu A. Constantin și W. Strauss) <https://indico.math.cnrs.fr/event/3053/>
- C3. E. Vărvărucă, Large-amplitude steady gravity water waves with constant vorticity, Lund Workshop on Fluid Dynamics and Dispersive Equations, University of Lund, Suedia, 25 - 29 iunie, 2018, (cu A. Constantin și W. Strauss) <http://delegia.com/app/attendee/default.asp?ProjectId=12468&PageId=72678>

- C4. E. Vărvărucă, Large-amplitude steady gravity water waves with constant vorticity, 14th Franco-Romanian conference on applied mathematics, 27-31 august, 2018, Bordeaux, Franța. (cu A. Constantin și W. Strauss) <https://france-roumanie.sciencesconf.org/>
- C5. C. Gales, On the dynamics of space debris, Outlook in Astronomy, Astrophysics, Space and Planetary Sciences, Cluj-Napoca, 17-19 mai, 2018. <http://www.cs.ubbcluj.ro/outlook-in-astro>
- C6. C. Gales, Dynamical effects of tesseral resonances in the LEO region, 2018AMC70 between Mathematics and Astronomy, A Workshop in honor of Andrea Milani Comparetti on the occasion of his 70th birthday, Pisa, 3-5 septembrie, 2018. <https://www.dm.unipi.it/webnew/it/content/2018-amc-70-between-mathematics-and-astronomy>

Participări la stagii de cercetare/documentare suportate de grant

- S1. I.D. Ghiba a participat la un stagiul de cercetare și documentare la Facultatea de Matematică, Universitatea Duisburg-Essen, Germania în perioada 10 iulie–08 august 2018, la invitația Prof. dr. Mircea Bîrsan.
- S2. I.D. Ghiba a participat la un stagiul de cercetare și documentare la Facultatea de Matematică, Universitatea Cagliari, Italia în perioada 9-16 septembrie 2018, la invitația Prof. dr. Stefano Montaldo.

Descrierea rezultatelor obținute în 2018

Obiectivul 1/2018. *Convexitate de rank unu și policonvexitate în elasticitatea neliniară*

Referitor la acest obiectiv, vom prezenta în continuare motivarea direcției de cercetare avută în vedere.

Diverse noțiuni de convexitate joacă un rol important în teoria elasticității. Noțiunea de policonvexitate introdusă de John Ball este fundamentală în elasticitatea neliniară deoarece a condus la primul rezultat notabil de existență a soluției.

Este cunoscut faptul că orice energie policonvexă este cvasiconvexă și că orice energie cvasiconvexă este rank-one convexă. Întrebarea este dacă orice energie rank-one convexă este cvasiconvexă.

În dimensiuni mai mari decât doi acest fapt este demonstrat, însă pentru cazul bidimensional această întrebare este considerată a fi una dintre problemele deschise majore din calculul variațiilor. Conjectura lui Morrey din 1952 afirmă că există funcții rank-one convexe care nu sunt quasiconvexe.

În literatură sunt prezentate diverse clase de funcții în care cele două noțiuni coincid. Recent, am demonstrat că cele două concepte coincid pentru toate energiile isocore. Desigur, conjectura lui Morrey rămâne o problemă deschisă, însă identificarea claselor de funcții în care afirmația lui Morrey nu este valabilă poate reprezenta un pas în găsirea unui răspuns. Se dorește deci identificarea unor relații între rank-one convexitatea unor energii și policonvexitatea lor.

În particular, funcții energetice care au drept domeniu $SL(2)$ sunt folosite pentru modelarea materialelor incompresibile, deoarece, în acest caz, deformarea φ este supusă contrângerii adiționale $\det \nabla \varphi = 1$.

Am studiat proprietăți de convexitate ale acestor energii în elasticitatea neliniară plană a mediilor incompresibile și am arătat că rank-one convexitatea unei energii obiective și izotrope W definită pe spațiul $SL(2)$ implică policonvexitatea lui W .

Întrucât domeniul acestor energii nu este un deschis din spațiul matricelor, se impune să includem și unele definiții.

Definition 1. O energie $W : \text{SL}(n) \rightarrow \mathbb{R}$ se numește **rank-one convexă** dacă

$$t \mapsto W(F + t \xi \otimes \eta)$$

este convexă în $t \in \mathbb{R}$ pentru orice $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ și orice $F \in \text{SL}(n)$ pentru care

$$F + t \xi \otimes \eta \in \text{SL}(n) \quad \text{pentru orice } t \in \mathbb{R}. \quad (1.1)$$

Condiția (1.1) este echivalentă cu $\langle \xi \otimes \eta, \text{Cof} F \rangle = 0$.

Definition 2. O energie $W : \text{SL}(n) \rightarrow \mathbb{R}$ se numește **policonvexă** dacă energia

$$\widetilde{W} : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \quad \widetilde{W}(F) = \begin{cases} W(F) & : F \in \text{SL}(n), \\ \infty & : F \notin \text{SL}(n). \end{cases}$$

este policonvexă în sensul definiției lui Ball.

Rezultatul principal al lucrării [L1] este

Theorem 3. Fie $W : \text{SL}(2) \rightarrow \mathbb{R}$ o energie obiectivă și izotropă. Următoarele afirmații sunt echivalente:

- i) W este rank-one convexă,
- ii) W este polyconvexă,
- iii) aplicația $\widetilde{\phi} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\widetilde{\phi}(\gamma) = W\left(\begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ este convexă,
- iv) funcția $\phi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ with $W(F) = \phi(\sqrt{\|F\|^2 - 2}) = \phi\left(\lambda_{\max}(F) - \frac{1}{\max(F)}\right)$ este crescătoare și convexă.

Să remarcăm faptul că echivalența dintre rank-one convexitate și policonvexitate este arătată fără a impune condiții de regulatitate asupra energiei. Teorema furnizează, de asemenea, și o interpretare geometrică a rank-one convexității și policonvexității: convexitatea și monoticitatea funcției ϕ este echivalentă cu convexitatea ei pe forfecările simple. Lucrarea include și o demonstrație pentru cazul funcțiilor de clasă C^2 .

Tot în cazul acestui obiectiv, se consideră și energii depinzând de tensorul deformare logaritmă (Hencky). Energii de acest tip sunt de interes datorită semnificației tensorului deformare logaritmă: s-a demonstrat (Neff et al. 2016, Archive Rational Mechanics and Analysis) că tensorul deformare logaritmă poate măsura distanța geodezică a gradientului deformării la grupul $\text{GL}^+(n)$. Cum energiile clasice depinzând de acest tensor nu sunt rank-one convexe, se pune următoarea întrebare: Există funcții depinzând de tensorul deformare Hencky care să fie rank-one convexe/policonvexe? S

Această caracterizare geometrică sugerează că o alegere constitutivă viabilă este reprezentată în elasticitatea neliniară poate fi considerarea de energii de tipul $W : \text{GL}^+(n) \rightarrow \mathbb{R}$

$$W(F) = \Psi(\|\log U\|^2) \quad (1.2)$$

pentru o funcție $\Psi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ bine aleasă.

Totuși, cu toate că astfel de energii se bucură de numeroase proprietăți utile și interesante, în lucrarea [L2] arătăm că este imposibil să identificăm o funcție monotonă Ψ pentru care W de forma form (1.2) este rank-one convexă.

În mod analog, considerăm măsura de deformare izotropă $\|\text{dev}_n \log U\|^2$. Funcții polyconvexe de acest tip au fost studiate recent în cazul bidimensional. În lucrarea noastră arătăm că pentru $n \geq 3$ nicio funcție strict monotonă function $\Psi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ nu face ca aplicația $F \mapsto \Psi(\|\text{dev}_n \log U\|^2)$ să fie rank-one convexă.

Mai mult, se consideră și energii de tipul $F \mapsto \Psi(\|\text{dev}_n \log U\|^2) + W_{\text{vol}}(\det F)$ și se arată că nu pot fi rank-one convexe începând cu $n = 3$, indiferent de cât de bune e contribuția funcției $W_{\text{vol}} : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

În continuarea acestui obiectiv, în etapa următoare se vor realiza extinderi policonvexe ale unor energii ce nu sunt rank-one convexe.

Referitor la celelalte obiective ale etapei pe 2019, rezultatele obținute până acum ne indică că vor fi realizate complet, ele fiind deja aduse în atenția comunității academice, prin conferințele și stagiile realizate.

DIRECTOR DE PROIECT,

Dr. Ionel-Dumitrel Ghiba

