

# RAPORT ȘTIINȚIFIC

*privind implementarea proiectului*

Metode matematice aplicate în studiul sistemelor mecanice, PN-III-P1-1.1-TE-2016-2314

contract de finanțare nr. 69 din 02/05/2018

## Etapa 2019

Studiile, activitățile și sarcinile intermediare în etapa 2019 din cadrul proiectului s-au referit la temele:

1. Convexitate de rank unu și policonvexitate în elasticitatea neliniară
2. Unde călătoare neliniare la suprafața oceanelor
3. Sisteme dinamice neliniare în mecanica clasică

Obiectivele prevăzute în această etapă au fost îndeplinite în totalitate, rezultatele fiind detaliate în acest raport de cercetare după o scurtă descriere schematică a stadiului cercetării din cadrul proiectului. Au fost publicate 3 lucrări în reviste indexate ISI însumând  $IF = 3.86$  și a fost elaborată o lucrare a cărei publicare va fi finalizată în etapa următoare. Membrii contractului au participat la 3 conferințe internaționale cu prezentări orale, la 2 Workshop-uri și la numeroase stagii de pregătire în străinătate.

În cadrul proiectului s-au realizat următoarele:

### Lucrări științifice corespunzătoare obiectivelor din etapa I

- L1 I.D. Ghiba, R.J. Martin, P. Neff. Rank-one convexity implies polyconvexity in isotropic planar incompressible elasticity, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 116, 88-104, 2018,  $IF=1.848$
- L2 R.J. Martin, I.D. Ghiba, P. Neff, A non-ellipticity result, or the impossible taming of the logarithmic strain measure, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 102, 147-158, 2018,  $IF=2.163$

### Lucrări științifice corespunzătoare obiectivelor din etapa II

- L3. R.J. Martin, I.D. Ghiba, P. Neff, A polyconvex extension of the logarithmic Hencky strain energy, *Analysis and Applications* 17: 349-361, 2019.  $IF=1.21$
- L4. A. Constantin, W. Strauss, E. Varvaruca, Large-amplitude steady downstream water waves, trimis spre publicare, 2019.
- L5. S. Nistor, C. Oniciuc, On the uniqueness of complete biconservative surfaces in  $\mathbb{R}^3$ , *Proceedings AMS* 147: 1231-1245, 2019.  $IF=0.813$
- L6. C. Lhotka, C. Gales, Charged dust close to outer mean-motion heliosphere, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 131: UNSP 49, 2019.  $IF=1.837$

## Descrierea rezultatelor obținute în 2019

### **Obiectivul 1/2019.** *Convexitate de rank unu și policonvexitate în elasticitatea neliniară*

Diverse noțiuni de convexitate joacă un rol important în teoria elasticității. Noțiunea de poli-convexitate introdusă de John Ball este fundamentală în elasticitatea neliniară deoarece a condus la primul rezultat notabil de existență a soluției. Activitățile din această etapă corespunzătoare acestui obiectiv sunt în legătură cu cele din etapa precedentă. Întrucât energii policonvexe având o forma clasică și care să depindă de tensorul de deformare Hencky nu există, se pune problema exploatării metodelor de construcție a unei energii care să extindă energiile Hencky cunoscute la funcții policonvexe în afara domeniului lor de elipticitate (o vecinătate a identității). O metodă comună ar fi transformarea energiei într-o energie rank-one convexe pe înfășurătoarea rank-one convexe a sa. Totuși, o astfel de abordare nu este viabilă în cazul nostru. În schimb, am abordat o altă metodă prin care energia este extinsă în afara domeniului său de elipticitate. Desigur, o astfel de energie duce la o oarecare pierdere a motivului de a exista al energiilor de tip Hencky în afara unei vecinătăți suficient de mari a identității. Să mai notăm faptul că policonvexitatea unei energii este o proprietate globală și nu una locală, așa cum este rank-one convexitatea. În acest sens, în cadrul acestei etape am plecat de la metoda introdusă de Ball, Muir, Schryvers and Tirry care consideră alte tipuri de energii pentru a construi astfel de extensii. Am adaptat această metodă la cazul energiilor de tip Hencky și am construit extensii policonvexe ale lor. Rezultatele au fost publicate în lucrarea [L3].

### **Obiectivul 2/2019.** *Unde călătoare neliniare la suprafața oceanelor*

Lucrarea este un studiu riguros al undelor călătoare bidimensionale de suprafață, spațial periodic, sub influența gravitației și cu vorticitate constantă, în care sunt demonstrate noi estimări cantitative pentru aceste unde precum și proprietăți geometrice ale acestora. Punctul de plecare al studiului nostru îl constituie un articol al aceluiași autori (Constantin et al. 2016, Acta Mathematica) în care este propusă o nouă formulare echivalentă a problemei, sub forma unei ecuații pseudodiferențiale nelocale în care apare o versiune a transformatei Hilbert acționând asupra unei funcții periodice de o variabilă care descrie coordonata verticală a profilului unei într-o parametrizare asociată unei transformări conforme a domeniului ocupat de fluid. Cu ajutorul teoriei globale a bifurcației analitice este demonstrată existența, într-un spațiu funcțional adecvat, a două curbe globale de soluții care corespund, în cazul unei vorticități constante pozitive, unor familii de unde călătoare care se propaga în același sens cu curentul ('downstream waves') și respectiv în sens contrar curentului ('upstream waves'). Lucrarea [L4] elaborată în această etapă consideră diverse proprietăți ale 'downstream waves' de pe curba globală de soluții. Un prim rezultat nou este că suprafața oricărei asemenea unde, deși în principiu ar fi putut avea o formă geometrică complicată, este de fapt în mod necesar reprezentabilă ca graficul unei funcții. Celelalte rezultate noi se referă însă la estimări cantitative asupra soluțiilor. În mod deosebit, lucrarea pune în evidență o estimare uniformă explicită asupra amplitudinii undelor (diferența de înălțime dintre cel mai de sus și cel mai de jos punct al suprafeței libere), estimare ce depinde doar de valoarea vorticității și de perioada undei. Simplitatea formei acestei estimări este surprinzătoare și remarcabilă având în vedere caracterul complicat al ecuației studiate și are la bază o înțelegere profundă a structurii acestei ecuații. În particular, estimarea arată că, pentru aceeași valoare arbitrară a perioadei, amplitudinea undelor tinde uniform la zero când vorticitatea tinde la infinit. Pe lângă faptul, de interes și în sine însuși, că amplitudinea undelor rămâne marginită de-a lungul curbei globale de soluții, estimarea noastră conduce și la mărghinirea uniformă a altor caracteristici ale soluțiilor, cum ar fi fluxul masei și așa-numitul 'Bernoulli head'. Este cunoscut

faptul că existența unei unde extreme cu vorticitate constantă, având la creastă tangente laterale formând un unghi de 120 grade, depinde în mod esențial de validitatea unor estimări a priori pentru unde cu suprafața netedă de forma celor stabilite în această lucrare. Rezultatele noastre deschid astfel posibilitatea unor studii ulterioare asupra acestor unde extreme. Menționăm de asemenea că o parte din rezultatele noastre se extind, cu anumite restricții, și asupra undelor care se propagă contrar curentului, iar completarea acestor rezultate constituie unul dintre obiectivele investigațiilor noastre prezente. Publicarea tuturor acestor rezultate va fi finalizată în etapa următoare.

Tot în cadrul acestui obiectiv, Am studiat unicitatea suprafețelor biconservative complete în spațiul euclidian  $R^3$  și am demonstrat că singurele suprafețe regulate biconservative complete în  $R^3$  sunt fie CMC, adică suprafețe cu curbura medie constantă, fie anumite suprafețe de rotație. Reamintim aici că o suprafață biconservativă se definește prin anularea divergenței unui câmp tensorial de tip  $(0,2)$  simetric care are proprietatea că divergența sa se anulează în punctele critice ale funcționalei bienergiei. În particular, am demonstrat ca orice suprafață regulată biconservativă compactă în  $R^3$  este o sferă rotundă. Rezultatele au fost publicate în [L5].

### **Obiectivul 3/2019.** *Sisteme dinamice neliniare în mecanica clasică*


În cadrul etapei II sunt modelate diverse forțe care perturbă mișcarea kepleriană a unui corp ceresc. Pentru problema celor trei corpuri, sau în unele cazuri pentru problema celor patru corpuri, sub ipoteza că unul dintre corpurile primare nu este sferic, sunt analizate rezonanțele care se produc în diverse regimuri orbitale, precum: mișcarea în jurul Soarelui, dinamica din vecinătatea Pământului și mișcarea unui satelit în jurul unui asteroid. De asemenea, în același context al rezonanțelor din cadrul problemei celor trei corpuri sunt investigate efectele produse de forțe negravitaționale precum forța Lorentz și presiunea radiației solare. În acest scop sunt dezvoltate o serie de metode analitice bazate pe dezvoltări în serii Fourier a funcțiilor perturbatoare în cadrul formalismului Hamiltonian, precum și metode numerice pentru integrarea ecuațiilor de mișcare și calculul unor exponenți de tip Lyapunov care permit cartografierea spațiului fazelor, determinarea punctelor de echilibru și discriminarea între orbitele regulate și cele haotice. Astfel, în lucrarea [L6] este studiată dinamica particulelor interplanetare electrizate aflate în vecinătatea rezonanțelor exterioare produse de planeta Jupiter. Este arătată importanța pe care o joacă câmpului magnetic interplanetar asupra evoluției orbitale a prafului interplanetar. În acest sens, se evidențiază producerea de noi efecte dinamice precum: modificări în orientarea planelor orbitale ale particulelor de praf, o cantitate crescută de mișcări orbitale haotice, o scădere a timpului de captare în zona de oscilație a rezonanței ca urmare a acțiunii forței Lorentz. Studiul se bazează pe un model dinamic derivat din problema restrânsă circulară a celor trei corpuri. Forțele suplimentare includ presiunea radiației solare, efectul Poynting-Robertson și influența unui model de câmp magnetic interplanetar de tip Parker. Estimările analitice sunt obținute pe baza ecuațiilor planetare ale mișcării în timp ce rezultatele numerice se bazează pe calculul unor indicatori de haos de tip Lyapunov.

În continuarea acestor obiective, în etapa următoare se va finaliza lucrarea [L4] cu privire la undele călătoare și vor fi continuate cercetările legate de studiul pânzelor Cosserat și al sistemelor dinamice în mecanica clasică. Rezultatele obținute până acum ne indică că obiectivele etapei 2020 vor fi realizate complet, ele fiind deja aduse în atenția comunității academice, prin lucrările

- [L7] M. Birsan, I.D. Ghiba, R.J. Martin, P. Neff, Refined dimensional reduction for isotropic elastic Cosserat shells with initial curvature, *Mathematics and Mechanics of Solids*, DOI: 10.1177/1081286519856061, first online 2019.

- [L8] A. Celletti, C. Gales, C. Lhotka, Resonances in the Earth's space environment, *Communication in Nonlinear Science and Numerical Simulations*, (accepted 2019).
- [L9] J. Burgos-Garcia, A. Celletti, C. Gales, M. Gidea, W.T. Lam, Hill four-body problem with oblate tertiary: an application to the Sun-Jupiter-Hektor-Skamandrios system, (submitted 2019).

DIRECTOR DE PROIECT,

A handwritten signature in black ink, consisting of a series of loops and a long horizontal stroke extending to the right.

Dr. Ionel-Dumitrel Ghiba