

# RAPORTARE ȘTIINȚIFICĂ

*privind implementarea proiectului*

Calcul variational si tehnici numerice in mecanica solidului, PN-III-P1-1.1-TE-2019-0348

contract de finantare nr. TE 8/2020

– **Etapa 2020** –

Studiile, activitățile și sarcinile intermediare în *etapa 2020* din cadrul proiectului s-au referit la temele:

1. Calcul variațional în modele Cosserat ale pânzelor elastice;
2. Caracterizarea conceptelor de convexitate în elasticitatea neliniară;
3. Stabilitate pentru modele din mecanica solidelor.

Obiectivele prevăzute în această etapă au fost îndeplinite în totalitate, descrierea științifică și tehnică, cu punerea în evidență a rezultatelor etapei, a gradul de realizare a obiectivelor și a modului de diseminare a rezultatelor, fiind detaliată în acest raport de cercetare după o scurtă descriere schematică a stadiului cercetării din cadrul proiectului. Au fost publicate sau apărute online 4 lucrări în reviste importante și indexate ISI, însumând un factor de impact ridicat. Membrii contractului au participat la 4 conferințe cu prezentări orale.

## Lucrări științifice publicate în etapa I

- L1. I.D. Ghiba, M. Bîrsan, P. Lewintan, P. Neff. The isotropic Cosserat shell model including terms up to  $O(h^5)$ . Part I: Derivation in matrix notation, accepted, doi.org/10.1007/s10659-020-09796-3, Journal of Elasticity, 2020.
- L2. R.J. Martin, J. Voss, I.D. Ghiba, O. Sander, P. Neff. The quasiconvex envelope of conformally invariant planar energy functions in isotropic hyperelasticity, Journal of Nonlinear Science, 30:2885–2923, 2020.
- L3. I.D. Ghiba, P. Neff, S. Owczarek. Existence results for non-homogeneous boundary conditions in the relaxed micromorphic model, Math. Method. Appl. Sci., accepted, doi.org/10.1002/mma.6913, 2020.
- L4. I. Munteanu. Exponential stabilization of the semilinear heat equation with nonlocal boundary conditions, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 492 (2): 124512, doi.org/10.1016/j.jmaa.2020.124512, 2020.

## Lucrări științifice în lucru:

- L5. I.D. Ghiba, M. Bîrsan, P. Lewintan, P. Neff. A constrained Cosserat shell model up to order  $O(h^5)$ : Modelling, existence of minimizers, relations to classical shell models and scaling invariance of the bending tensor, în lucru.
- L6. J. Voss, I.D. Ghiba, R.J. Martin, P. Neff. A rank-one convex, non-polyconvex isotropic function on  $GL^+(2)$  with compact connected sublevel set, în lucru.
- L7. I. Munteanu, D. Goreac. Improved Stability for SPDEs Using Mixed Boundary/Internal Controls, în lucru.

## Participări la conferințe în etapa I

- C1. I.D. Ghiba, Un nou model matematic pentru pânze elastice, Sesiunea de comunicări științifice a Institutului de matematică „Octav Mayer” și a comisiei de automatizată teoretică și teoria controlului optimal, Zoom Meeting, 17.10.2020.

- C2. I.D. Ghiba, Despre un nou model în teoria pânzelor elastice, Sesiunea de comunicări științifice a Facultății de Matematică, Webex Meeting, 30.10.2020.
- C3. L. Marin, M. Bucătaru, I. Cîmpean, An iterative algorithm for the Cauchy problems associated with the steady-state anisotropic heat conduction, Current Trends in Applied Mathematics – Online Workshop, “Octav Mayer” Institute of Mathematics, Romanian Academy, Iași Branch, Iași, România, 21-22 septembrie 2020.
- C4. M. Bucătaru, L. Marin, An iterative algorithm for the Cauchy problem associated with the steady-state anisotropic heat conduction. Conferința Școlilor Doctorale din Consorțiul Universitaria (CSDCU-MIF2020), Iași, România, 22 octombrie 2020.

## Descrierea rezultatelor obținute în 2020

### Obiectivul 1/2020. *Calcul variațional în modele Cosserat ale pânzelor elastice*

Referitor la acest obiectiv, întrucât scopul final în cadrul proiectului este de a demonstra existența soluției într-un model care să implice termeni de ordinul 5 în raport cu grosimea plăcii, în această etapă s-a elaborat un model folosind doar scrierea matriceală și evitând folosirea coordonatelor curbilini. Această construcție ne va oferi o mai bună imagine asupra coercivității și convexității energiei de deformare obținute și ne va conduce la un rezultat de existență în articolul care va succeda articolul [L1] elaborat în această etapă. Rezultatele au fost prezentate la conferințele [C1] și [C2]. Mai exact, am elaborat un model de pânze geometric neliniar care folosește o expresie a deformării ce va depinde de 8 parametri. Teoria 3D neliniară folosită este cea a mediilor elastice Cosserat pentru a ne permite o mai bună descriere a micro-rotățiilor. Calculele sunt complet analitice însă toate aproximările sunt justificate și din punct de vedere mecanic. Mai mult, este important să plecăm de la o problemă 3D pentru care există rezultate de existență. Forma specifică a energiei 2D obținute include termeni de ordinul cinci în raport cu grosimea pânzei. Acest fapt este complet nou într-un model analitic și generalizează modelul de plăci considerat de P. Neff [Continuum Mech. Thermodyn. 16, 2004]. Am identificat o nouă modalitate de a scrie energia internă a modelului de pânze construit. Această nouă formă se va dovedi a fi foarte utilă în demonstrarea coercivității și convexității energiei interne. În articolul [L5] aflat în lucru, plecând de la articolul [L1], se construiesc mai multe modele, ce sunt cazuri limită ale modelului complet. Modul nostru de scriere a energiei ne conduce în [L5] la demonstrarea unor rezultate de existență a soluției chiar și în cazurile limită considerate.

### Obiectivul 2/2020. *Caracterizarea conceptelor de convexitate în elasticitatea neliniară*

În cadrul acestui obiectiv, în această etapă am studiat modul de calcul al înfășurătorii quasiconvexe a unui tip special de funcții. Rezultatele au fost incluse în lucrarea [L2]. Acest tip special de funcții va juca un rol important în etapa 2 a proiectului când un contraexemplu la conjectura lui Mielke dar și o caracterizare nouă a convexității de rang unu vor fi stabilite. Aceste rezultate fac obiectul lucrării [L6]. Trebuie să menționăm că determinarea înfășurătorii quasiconvexe este o sarcină dificilă chiar și din punct de vedere numeric, determinarea analitică fiind posibilă până în prezent doar pentru niște familii foarte restrictive de energii. Rezultatele noastre sunt complet analitice și testate apoi numeric, oferind un studiu complet asupra quasiconvexității familiei de funcții considerate. Concret, se consideră energii izocore. Rezultate noastre se bazează pe reprezentarea  $W(F) = h\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)$  a energiei  $W$  în funcție de valorile singulare  $\lambda_1, \lambda_2$  ale gradientului deformării  $F$ . Rezultatele sunt aplicate pentru a răspunde la o conjectură formulată de Adamowic în 2007 și se discută legătura dintre policonvexitate și problema Grötzsch cu frontieră liberă. În plus, discutăm proprietăți legate învășurătoarea  $W_p^1$ -quasiconvexă în domeniul  $GL(n)$ . În particular, aceasta arată că o versiune a formulei de tip of *Dacorogna* este aplicabilă pentru energii izocore.

### Obiectivul 3/2020. *Stabilitate pentru modele din mecanica solidelor*

Referitor la acest obiectiv, în articolul [L4] obiectivul principal a fost studiul următorului sistem

$$\begin{cases} y_t(t, x) - y''(t, x) - cy(t, x) = f(t, x, y(t, x)), & t > 0, x \in (0, \pi), \\ y(t, 0) = \int_0^\pi w(x)y(t, x)dx, & y'(t, 0) + y'(t, \pi) + \alpha y(t, \pi) = 0, & t > 0, \\ y(0, x) = y_o(x), & x \in (0, \pi). \end{cases} \quad (1.1)$$

Necunoscuta este funcția  $y$ ,  $f$  este neliniară de tip polinomial, iar  $w$  este văzut ca un control frontieră. Am construit un control  $w$ , dat în formă explicită și simplă, astfel încât odată introdus în (1.1), soluția sistemului corespunzător satisface descreșterea exponențială. Particularitatea importantă a acestui sistem este dată de condițiile nelocale la frontieră. Acest caz se poate întâlni în studiul semiconductorilor de tip bară. Într-un semiconductor curentul este reprezentat fie de fluxul de electroni fie de fluxul de goluri din structura electronică a materialului. Conductivitatea electrică a unui material semiconductor crește odată cu creșterea temperaturii. Astfel, o condiție la frontieră viabilă pentru acest caz este o medie între fluxurile de curent măsurate, ce intră și ies prin capetele semiconductorului  $y(t, \pi) = -\frac{y'(t, 0) + y'(t, \pi)}{\alpha}$  unde  $\alpha > 0$  este o constantă. Dacă conductivitatea electrică este foarte mare, intensitatea curentului crește, provocând încălzirea materialului, ceea ce duce la o și mai bună conductivitatea, provocând în final un posibil incendiu. A stabili un astfel de sistem înseamnă a modifica conductivitatea electrică pentru a nu avea valori foarte mari în fluxul de curent din semiconductor. Mai exact, în capătul  $x = 0$  se aplică un control asupra conductivității curentului, pentru a se obține descreșterea exponențială de mai sus. Tot referitor la acest obiectiv s-a considerat și studiul matematic al unui model folosit pentru modelarea metamaterialelor. Într-o astfel de teorie nu este clar de ce ar trebui ca toate condițiile la frontieră să fie omogene. De aceea, cu scopul studiului regularității și stabilizării soluției, un prim pas este de a demonstra unicitatea și existența soluției pentru condiții neomogene la frontieră. Această problemă are o rezolvare în elasticitatea liniară care acum este clasică. La fel și pentru modelele care implică ecuații de tip Maxwell. Modelul nostru consideră o cuplare a unei ecuații de tipul celei din elasticitatea clasică cu o ecuație asemănătoare cu ecuația lui Maxwell. Totuși, obținerea unui rezultat de existență de tipul celui dorit de noi nu este trivială pentru că multe informații care sunt a priori date în forma ecuației lui Maxwell sunt absente în cazul modelului nostru. Cuplarea cu ecuațiile de tipul celor din elasticitatea clasică ne va furniza informațiile care nu sunt ușor de observat din forma sistemului de ecuații. Ingredientul principal a fost reprezentat de identificarea unei noi proprietăți a unui operator de extindere construit de Alonsi and Valli. Rezultatele au fost incluse în lucrarea [L3]. Următorul pas în cadrul proiectului este de a studia problema stabilizării pentru ecuații cu derivate parțiale stochastice. Aceste ecuații pot modela de exemplu mișcarea unui solid supus unor perturbații aleatoare. Inițial este studiată problema cu controale ce acționează la frontieră. Viteza de descreștere exponențială este îmbunătățită apoi prin adăugarea unui control intern pe partea de drift și pe partea de difuzie. Rezultatele vor fi incluse în lucrarea [L7].

Rezultatele obținute<sup>1</sup> până acum ne indică că obiectivele etapei 2021 vor fi realizate complet, variante incipiente și chiar intermediare ale rezultatelor –conform planului de realizare propus– fiind deja aduse în atenția comunității academice.

DIRECTOR DE PROIECT,

Dr. Ionel-Dumitrel GHIBA

<sup>1</sup>Din cauza unor erori de redactare și comunicare, în lucrările [L1-L4] numărul grantului este scris greșit. Menționăm că numărul scris în aceste lucrări nu reprezintă numărul unui grant finanțat sau finanțabil în viitor. Vom dori să remediem această eroare solicitând editorilor includerea unor erate.