

# RAPORTARE ȘTIINȚIFICĂ

*privind implementarea proiectului*

Calcul variational și tehnici numerice în mecanica solidului, PN-III-P1-1.1-TE-2019-0348

contract de finantare nr. TE 8/2020

– Etapa 2021 –

Studiile, activitățile și sarcinile intermediare în *etapa 2021* din cadrul proiectului s-au referit la temele:

1. Caracterizarea conceptelor de convexitate în elasticitatea neliniară;
2. Calcul variational în modele Cosserat ale pânzelor elastice;
3. Probleme inverse în mecanica solidelor.

Obiectivele prevăzute în această etapă au fost îndeplinit în totalitate, descrierea științifică și tehnică, cu punerea în evidență a rezultatelor etapei, a gradul de realizare a obiectivelor și a modului de diseminare a rezultatelor, fiind detaliată în acest raport de cercetare după o scurtă descriere schematică a stadiului cercetării din cadrul proiectului. Au fost elaborate 11 lucrări trimise, publicate sau acceptate spre publicare în reviste importante și indexate ISI, însumând un factor de impact ridicat. Membrii contractului au participat la conferințe cu 7 prezentări orale.

## Lucrări științifice elaborate în 2021

- L1. J. Voss, **I.D. Ghiba**, R.J. Martin, P. Neff. Sharp rank-one convexity conditions in planar split, isotropic elasticity for the additive volumetric-isochoric. *Journal of Elasticity* 143, 301-335, 2021.
- L2. J. Voss, **I.D. Ghiba**, R.J. Martin, P. Neff. A rank-one convex, non-polyconvex isotropic function on  $GL+(2)$  with compact connected sublevel sets. accepted *Proceedings A of the Royal Society of Edinburgh*, 2021.
- L3. **I.D. Ghiba**, M. Bîrsan, P. Lewintan, P. Neff. A constrained Cosserat shell model up to order  $O(h^5)$ : Modelling, existence of minimizers, relations to classical shell models and scaling invariance of the bending tensor. *Journal of Elasticity* 146 (1), 83-141, 2021.
- L4. G. Rizzi, G. Hütter, H. Khan, **I.D. Ghiba**, A. Madeo, P. Neff. Analytical solution of the cylindrical torsion problem for the relaxed micromorphic continuum and other generalized continua (including full derivations). accepted *Mathematics and Mechanics of Solids*, 2021.
- L5. G. Rizzi, H. Khan, **I.D. Ghiba**, A. Madeo, and P. Neff. Analytical solution of the uniaxial extension problem for the relaxed micromorphic continuum and other generalized continua (including full derivations). accepted *Archive of Applied Mechanics*, 2021.
- L6. S. Owczarek, **I.D. Ghiba**, P. Neff. A note on local higher regularity in the dynamic linear relaxed micromorphic model. in print *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. doi:10.1002/mma.7661, 2021.
- L7. **M. Bucătaru**, I. Cîmpean, **L. Marin**. A gradient-based regularization algorithm for the Cauchy problem in steady-state anisotropic heat conduction. submitted, 2021.
- L8. K. Van Bockstal, **L. Marin**. The reconstruction of a time-dependent heat source in isotropic thermoelasticity systems of type-III. submitted, 2021.
- L9. **I. Munteanu**. Boundary stabilizing actuators for multi-phase fluids in a channel. *Journal of Differential Equations* 285, 175-210, 2021.
- L10. **I. Munteanu**. Boundary stabilization of non-diagonal systems by proportional feedback forms. *Communications on Pure and Applied Analysis* 20 (9), 3095-3110, 2021.
- L11. D. Goreac, **I. Munteanu**, Improved stability for linear SPDEs using mixed boundary/internal controls. *Systems & Control Letters* 156, 2021.
- L12. **I. Munteanu**. Feedback exponential stabilization of the semilinear heat equation with nonlocal initial conditions, *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*. accepted 2021 .

## Participări la conferințe în etapa II

1. **M. Bucătaru**, I. Cîmpean, L. Marin, A GDM-based regularization algorithm for Cauchy inverse problems in anisotropic heat conduction. Sesiunea de comunicări științifice pentru studenți, Universitatea din București, Facultatea de Matematică și Informatică, 8 mai 2021, online.
2. **M. Bucătaru**, I. Cîmpean, L. Marin, A GDM-based regularization algorithm for Cauchy inverse problems in anisotropic heat conduction. Tenth Workshop for Young Researchers in Romania (*WYRM 10*), Institutul de Matematică "Simion Stoilow" al Academiei Române, Institutul de Matematică "Octav Mayer" al Academiei Române și Facultatea de Matematică și Informatică, Universitatea "Ovidius" din Constanța, 20–21 mai 2021, online.
3. **I.D. Ghiba**, A new Cosserat shell model: modelling and existence of the solution, 20-21 mai 2021, Tenth Workshop for Young Researchers in Romania (*WYRM 10*), Institutul de Matematică "Simion Stoilow" al Academiei Române, Institutul de Matematică "Octav Mayer" al Academiei Române și Facultatea de Matematică și Informatică, Universitatea "Ovidius" din Constanța, 20–21 mai 2021, online.
4. **I.D. Ghiba**, Modelling and existence results in the Cosserat shell theory, The 28th Conference on Applied and Industrial Mathematics, CAIM 2021, 17-18 September, online, 2021.
5. **I.D. Ghiba**, Existență și unicitate pentru problema propagării undelor seismice în medii cu microstructură, Sesiunea de comunicări științifice a Institutului de Matematică Octav Mayer împreună cu Comisia de Automatică teoretică și Teoria controlului, 30.10.2021, online.
6. **I.D. Ghiba**, Propagarea undelor seismice n medii Cosserat, Sesiunea de comunicări științifice a Facultății de Matematică în cadrul evenimentului Zilele Universității Alexandru Ioan Cuza din Iași, 29.10.2021, online.
7. **I. Munteanu**, Backstepping vs Direct-Proportional control design techniques, Sesiunea de comunicări științifice a Institutului de Matematică Octav Mayer împreună cu Comisia de Automatică teoretică și Teoria controlului, 30.10.2021, online.

## Descrierea rezultatelor obținute pentru îndeplinirea obiectivelor din etapa 2021

### Obiectivul 1/2021. *Caracterizarea conceptelor de convexitate în elasticitatea neliniară*

În cadrul etapei 2021 se studiază convexitatea de rang unu pentru energii care sunt scrise ca suma a două energii, adică o energie de forma  $W(F) = h(F^2/\det F) + f(\det F)$ . Scopul principal este de a verifica dacă convexitatea de rang unu a energiei  $W$  implică convexitatea de rang unu a fiecăreia dintre cele două energii,  $h$  și  $f$ . În acest scop se arată că inegalitățile din criteriu Knowles-Sternberg se reduc la un număr mult mai redus de inecuații. Din noul set de ecuații se observă că de fapt totul se reduce la unele inecuații ce implică funcții scalare. Se deduce faptul că  $W$  convex de rang unu nu implică faptul că  $f$  și  $h$  sunt convexe de rang unu ci că cel puțin una dintre aceste două funcții este convexă de rang unu. Aceste rezultate sunt incluse în lucrarea [L1] și aplicate pentru diverse cazuri particulare. Astfel, unele rezultate stabilite anterior în literatura de specialitate se redemonstrează folosind rezultatele obținute în [L1].

Tot legat de acest obiectiv, în cadrul acestui proiect ne-am propus să studiem dacă o conjectură formulată de Alexander Mielke în 2005 în *Journal of Convex Analysis* este adevărată. Această conjectură afirmă faptul că o funcție convexă de rang unu este policonvexă dacă mulțimile de subnivel sunt isotrope, compacte și conexe. Prin construirea unui contraexemplu, în [L2] am demonstrăm că această conjectura nu este adevărată.

### Obiectivul 2/2021. *Calcul variațional în modele Cosserat ale pânzelor elastice*

Referitor la acest obiectiv, în lucrarea [L3], plecând de la un model recent introdus de către trei autori, se construiesc modele de pânze prin particularizarea cazului general. Aceste cazuri particulare, obținute drept cazuri limită ale teoriilor generale, ne permit o mai bună comparare cu modelele de pânze ce nu consideră microrotația particulelor materialului. Teoriile obținute astfel sunt de ordinul  $O(h^5)$  în raport cu grosimea  $h$  a pânzei. Pentru toate modelele introduse se demonstrează existența soluției și se găsesc condiții asupra grosimii  $h$  care să asigure existența soluțiilor. În plus, aceste cazuri limită ne permit să aducem în discuție un alt aspect important, și anume identificarea unui set de condiții pe care "un tensor de încovoiere" trebuie să-l verifice. Se găsește faptul că tensorul dedus de noi este în acord cu cel introdus de Acharya (*Int. J. Solids Struct.* 37(39):5517-5528, 2000) și că îndeplinește toate condițiile cerute de înțelesul fizic, ingineresc, al conceptului de încovoiere.

Tot în cadrul acestui obiectiv în lucrările [L4,L5] se construiesc soluții analitice pentru două probleme importante privind deformarea domeniilor cilindrice (în particular a plăcilor). Teoria considerată este mai generală decât teoria

mediilor Cosserat. Mai concret, pentru medii micromorfe se găsesc soluții analitice pentru problema extensiei și problema torsiunii cilindrilor drepti. Aceste rezultate sunt utile în problema practică a determinării parametrilor constitutivi și pot fi aplicate și pentru cazul mediilor subțiri. O altă problemă abordată este legată de regularitatea soluției problemei liniare din teoria mediilor micromorfe. Sistemul de ecuații ale acestei teorii combină ecuații de tip Maxwell cu ecuații de tipul ecuației undelor. Totuși, în comparație cu ecuația Maxwell, la o prima vedere se constată că sunt cunoscute mai puține detalii despre derivatele soluției. Cu toate acestea, cuplarea cu ecuațiile de tipul ecuației undelor ne permite, a se vedea [L6], să demonstrăm faptul că soluția sistemului de ecuații este în  $H_{loc}^1(\Omega)$ .

### Obiectivul 3/2021. Probleme inverse în mecanica solidelor

În articolul [L7], este studiată reconstrucția numerică acurată, convergentă și stabilă a datelor la limită pe o porțiune inaccesibilă a frontierei unui domeniu ocupat de un solid anizotrop în cazul transferului staționar de căldură, pornind de la cunoașterea temperaturii și a fluxului de căldură pe partea remanentă și accesibilă a frontierei, adică date de tip Cauchy. Este de notorietate faptul că problema (Cauchy) inversă descrisă mai sus este rău-condiționată în sensul lui Hadamard și, prin urmare, necesită un procedeu de regularizare/stabilizare a soluției. Prin prezenta abordare, se construiește o procedură de aproximare numerică a soluției acestei probleme prin exploatarea a două surse de regularizare: natura regularizantă a problemelor directe utilizate și informații apriorice asupra soluției problemei inverse investigate. În consecință, problema Cauchy este reformulată ca o problemă de control care se reduce la minimizarea unei funcționale într-un spațiu Sobolev fracționar definit pe partea inaccesibilă a frontierei domeniului ocupat de solidul anizotrop. Această din urmă reformulare a problemei Cauchy produce un algoritm iterativ de tip gradient care constă, la fiecare pas, în rezolvarea a două probleme directe și a trei probleme adjuncte corespunzătoare în conformitate cu spațiul funcțional de căutare a controlului. Convergența teoretică a algoritmului propus este studiată și demonstrată pentru anumite valori admisibile ale parametrului care caracterizează acest algoritm. Au fost realizate experimente numerice în cazul bidimensional, folosind metoda diferențelor finite, atât pentru date Cauchy exacte, cât și pentru date Cauchy perturbate, iar soluția numerică a fost stabilizată prin intermediul a trei criterii de oprire cu caracter regularizant: principiul discrepantei al lui Morozov, criteriul lui Hansen (L-curve criterion) și criteriul lui Hansen simplificat, datorat lui Kindermann, care confirmă rezultatele teoretice demonstrate.

### Descrierea cercetărilor care vor conduce la îndeplinirea completă a obiectivelor din 2022 dar și pentru continuarea diseminării rezultatelor obținute în 2020:

- În [L9] se consideră modelul curgerii printr-un canal infinit a unui fluid care se poate afla în două stări de agregare diferite. Ca exemplu putem considera cazul curgerii apei printr-o conductă încălzită. Datorită căldurii, apa poate ajunge la punctul de fierbere, transformându-se în vapori. Astfel, fluidul care curge prin conductă va deveni o parte apă (lichid) și o parte vapori, cu o interfață unde cele două stări pot coexista. Modelul matematic care descrie transformarea de fază a fluidului sunt ecuațiile Cahn-Hilliard. Pentru a lua în considerare și mișcarea fluidului, aceste ecuații se cuplează cu ecuațiile Navier-Stokes, obținându-se astfel așa numitul **model H**. Se cunoaște că ecuațiile Navier-Stokes au un caracter turbulent, adică implică mișcări haotice ale fluidului. Pentru a atenua sau chiar elimina turbulența, una dintre uneltele principale o reprezintă controlul. În acest articol construiesc un control stabilizant pentru modelul H cu acțiune doar pe pereții canalului, nu și în interiorul acestuia.
- Multe dintre modele matematice, cum ar fi și cel al mediilor poroase, sunt ecuații de evoluție guvernate de operatori care nu sunt auto-adjunți, adică simetrici. În teoria controlului asociată problemei de stabilizare a evoluției soluției unui model matematic, lipsa simetriei complică foarte mult lucrurile. Motivul este că, în încercarea de a construi un control stabilizant ușor de utilizat în practică, metoda de proiecție a operatorului guvernator pe mulțimea autofuncțiilor naște matrici non-diagonale, greu de manipulat. În [L10], considerăm un model matematic abstract, non-simetric, pentru care construiesc un control stabilizant ce acționează la frontieră, ușor de implementat în practică. Deoarece rezultatele obținute sunt abstracte, ele se pot aplica pentru diferite modele particulare, evident, care verifică ipotezele impuse.
- În modelarea unui fenomen natural, modelul matematic utilizat este doar o aproximare a realității bazată pe legile clasice ale fizicii. Mai mult, în studierea fenomenului pot apărea diferite perturbații aleatoare, de exemplu pot apărea erori ale măsurătorilor realizate de oamenii de știință, pot interveni fenomene exterioare imprevizibile etc. Pentru a se lua în calcul aceste fluctuații aleatoare, modelului matematic i se atașează o parte stochastică generată de o mișcare Browniană, care modelează tocmai aceste interferențe aleatorii. În [L11] studiem un model matematic abstract de ecuații stochastice de evoluție. Construim controale, ușor de manipulat numeric și practic, care stabilizează evoluția soluției.
- Un model matematic direct oferă informațiile astfel: se introduce o dată inițială, după care modelul este lăsat să evolueze și la final se citesc rezultatele. Însă, în realitate, este posibil ca să nu se cunoască exact data inițială. În

acest caz, se fac măsurători repetate, iar data inițială este aleasă ca o medie ponderată a acestora. Astfel avem de-aface cu așa numitele date inițiale nelocale. În [L12] am considerat un model abstract guvernat de operatorul Laplace, în care datele inițiale sunt nelocale. Am construit un control stabilizant, ușor de implementat în practică.

- În articolul [L8], este studiată reconstrucția teoretică și numerică a surselor în cazul materialelor termoelastice izotrope de tip-III care ocupă un domeniu mărginit de o frontieră Lipschitz. Mai exact, sunt considerate surse de căldură dependente doar de timp ca urmare a unei măsurători adiționale în medie ponderată a temperaturii. Se demonstrează că tipul de măsurători adiționale corecte din punct de vedere teoretic depind de tipul de condiții la limită disponibile pentru câmpul termic, iar existența și unicitatea soluției slabe a problemei inverse considerate sunt, de asemenea, demonstrate în cazul datelor exacte. Pentru fiecare dintre cele două probleme de reconstrucție a unei surse termice investigate, este propus un algoritm numeric și este demonstrată convergența acestuia pentru date exacte. Sunt considerate și implementate numeric patru exemple numerice – câte două exemple unidimensionale, respectiv bidimensionale – cu date perturbate folosind metoda elementului finit, iar rezultatele numerice obținute validează convergența și stabilitatea algoritmilor propuși.

DIRECTOR DE PROIECT,

Dr. Ionel-Dumitrel GHIBA