RAPORT ŞTIINŢIFIC

privind implementarea proiectului

Metode matematice aplicate în studiul sistemelor mecanice, PN-II-RU-TE-2014-4-0320

contract de finantare nr. 127 din 01/10/2015

2015 – 2016

Studiile, activităţile şi sarcinile intermediare s-au referit la următoarele teme:

2015

1. Probleme neliniare in mecanică;
2. Metode Hamiltoniene aplicate in studiul dinamicii sistemelor mecanice.

2016

1. Probleme neliniare in mecanică;
2. Studiul ecuaţiilor Euler şi a sistemelor hibride;
3. Metode Hamiltoniene aplicate în studiul dinamicii sistemelor mecanice.

Obiectivele prevăzute în 2015 şi 2016 au fost îndeplinite în totalitate, rezultatele fiind detaliate în acest raport de cercetare după o scurtă descriere schematică a stadiului cercetării din cadrul proiectului.

Până în acest moment în cadrul proiectului s-au realizat următoarele:

Lucrări ştiinţifice corespunzătoare obiectivelor din etapa I/status actualizat

L1. P. Neff, I.D. Ghiba, The exponentiated Hencky-logarithmic strain energy: Part III-coupling with idealized multiplicative isotropic finite strain plasticity, *Continuum Mechanics and Thermodynamics* 28: 477–487, 2016. *IF: 1.849 AIS: 1.808*

L2. A. Celletti, C. Galeş, Dynamical investigation of minor resonances for space debris, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 123: 203–222, 2015. *IF: 1.594 AIS: 1.110*

Total factor de impact pentru 2015: 3.443

Total scor de influenţă pentru 2015: 2.918

Lucrări ştiinţifice corespunzătoare obiectivelor din etapa II

L3. I.D. Ghiba, P. Neff, R.J. Martin, An ellipticity domain for the distortional Hencky- logarithmic strain energy, *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical & Engineering Sciences* 471, doi:10.1098/rspa.2015.0510, 2015. *IF: 1.935 AIS: 2.223*

L4. R.J. Martin, I.D. Ghiba, P. Neff, Rank-one convexity implies polyconvexity for isotropic, objective and isochoric elastic energies in the two-dimensional case, sub tipar, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, Section: A Mathematics*, 2016. *IF: 0.983 AIS: 1.616*

L5. A. Bucur, Rayleigh surface waves problem in linear thermoviscoelasticity with voids, *Acta mechanica* 227: 1199–1212, 2016. *IF: 1.694 AIS: 1.024*

L6. I. Rovenţa, A note on majorization via perturbed minimizers, trimis spre publicare.

L7. C. Burtea, New long time existence results for a class of Boussinesq-type systems, *Journal de Mathematiques Pures et Appliquees* 106: 203–236. *IF: 1.818 AIS: 3.117*

L8. C. Burtea, Long time existence results for bore-type initial data for BBM-Boussinesq systems, *Journal of Differential Equation* 261: 4729–5288. *IF: 1.821 AIS: 2.386*

L9. P. Lissy, I. Rovenţa, Optimal filtration for the approximation of boundary controls for the one-dimensional wave equation, trimis spre publicare.

L10. A. Celletti, C. Galeş, G. Pucacco, Bifurcation of lunisolar secular resonances for space debris orbits, *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems* 15: 1352–1383, 2016. *IF: 1.819 AIS: 1.730*

L11. C. Lhotka, A. Celletti, C. Galeş, Poynting–Robertson drag and solar wind in the space debris problem, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 460: 802–815, 2016. *IF: 4.952 AIS 1.855*

L12. A. Celletti, C. Galeş, A study of the lunisolar secular resonance $2\dot{\omega} + \dot{\Omega} = 0$, *Frontiers in Astronomy and Space Sciences - Fundamental Astronomy*, 31 March 2016, http://dx.doi.org/10.3389/fspas.2016.00011 (on-line paper).

Total factor de impact pentru 2016: 15.022

Total scor de influenţă pentru 2016: 13.951

Comunicări la conferinţe internaţionale

C1. I.D. Ghiba, Loss of ellipticity for non-coaxial plastic deformations in additive logarithmic finite strain plasticity and other related results on Hencky-type energies, 86th *Annual Meeting of the GAMM*, Braunschweig, Germany, 7–11 martie, 2016.

C2. I.D. Ghiba, On some Hencky-type energies, *XIII-ème Colloque Franco-Roumain de Mathématiques Appliéques*, Iaşi, 25–29 august 2016.

C3. C. Galeş, A study of the lunisolar secular resonances for space debris by using the Hamiltonian formalism, *Computational perturbative methods for Hamiltonian systems - Applications in physics and astronomy*, Athens, 11 iulie–13 iulie, 2016.

C4. C. Galeş, Resonance effects in the dynamics of space debris, *XIII-ème Colloque Franco-Roumain de Mathématiques Appliquées*, Iaşi, 25–29 august, 2016.

C5. C. Galeş, Dynamics of resonances in the space debris problem, *Final Stardust Conference*, ESA ESTEC, Leiden (The Netherlands), 31 octombrie–4 noiembrie, 2016.

C6. C. Burtea, New long time existence results for a class of Boussinesq-type systems, *XIII-ème Colloque Franco-Roumain de Mathématiques Appliquées*, Iaşi, 25–29 august, 2016.

C7. A. Bucur, Rayleigh surface waves problem in thermoviscoelastic medium with voids, *11th International Congress on Thermal Stresses 2016 (TS 2016)*, Salerno, Italy, 5–9 iunie, 2016.

C8. A. Bucur, Spatial behavior in linear theory of thermoviscoelasticity backward in time for porous media, *XIII-ème Colloque Franco-Roumain de Mathématiques Appliquées*, Iaşi, 25–29 august, 2016.

Participări la stagii de cercetare/documentare suportate de grant

S1. I.D. Ghiba a participat la un stagiu de cercetare şi documentare la Facultatea de Matematică, Universitatea Duisburg-Essen, Germania în perioada 11 ianuarie–18 martie 2016, la invitaţia Prof. dr. Patrizio Neff.

S2. C. Galeş a participat la un stagiu de cercetare şi documentare la Departamentul de Matematică, Universitatea din Roma Tor Vergata, Italia, în perioada 5 iunie–12 iunie, la invitaţia Prof. dr. Alessandra Celletti.

S3. I.D. Ghiba a participat la un stagiu de cercetare şi documentare la Facultatea de Matematică, Universitatea Duisburg-Essen, Germania în perioada 16 mai–12 august 2016, la invitaţia Prof. dr. Mircea Bîrsan.

S4. C. Galeş a participat la un stagiu de cercetare şi documentare la Departamentul de Matematică, Universitatea din Roma Tor Vergata, Italia, în perioada 25 iunie–9 iulie 2016, la invitaţia Prof. dr. Alessandra Celletti.

S5. I.D. Ghiba a participat la un stagiu de cercetare şi documentare la Facultatea de Matematică, Universitatea Duisburg-Essen, Germania în perioada 28 noiembrie–5 decembrie 2016, la invitaţia Prof. dr. Patrizio Neff.

Alte menţiuni

- I.D. Ghiba a primit în octombrie 2016 premiul Iuventas Scientiae acordat de Universitatea Alexandru Ioan Cuza pentru activitatea ştiinţifică din timpul anului academic 2015–2016.
- Pe site-ul revistei *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems* lucrarea [L10] apare ca *articol recomandat* (http://epubs.siam.org/journal/sjaday).

Lucrări ştiinţifice ce urmează să fie finalizate în anii următori pentru îndeplinirea obiectivelor corespunzătoare etapei III

L13. G. Barbagallo, M.V. D'Agostino, R. Abreu, I.D. Ghiba, A. Madeo, P. Neff, Transparent anisotropy for the relaxed micromorphic model: macroscopic consistency conditions and long wave length asymptotics, în lucru, 2016-2017.

L14. A. Madeo, P. Neff, G. Barbagallo, M.V. D'Agostino, I.D. Ghiba, A review on wave propagation modeling in band-gap metamaterials via enriched continuum models, în lucru, 2016-2017.

L15. C. Burtea, Optimal well-posedness for the inhomogeneous incompressible Navier-Stokes system with general viscosity, în lucru, 2016-2017.

L16. A. Celletti, C. Galeş, G. Pucacco, A. Rosengren, Analytical development of the lunisolar disturbing function and the critical inclination secular resonance, în lucru, 2016-2017.

Descrierea rezultatelor obţinute în 2015

Obiectivul 1/2015. *Probleme neliniare in mecanică*

Referitor la acest obiectiv, în lucrarea [L1] s-a investigat posibilitatea aplicării în plasticitatea finită multiplicativă a unei familii de energii neliniare în care partea volumetrică şi cea isocoră sunt decuplate

$$F \mapsto W_{_{\rm eH}}(F) := \widehat{W}_{_{\rm eH}}(U) := \begin{cases} \dfrac{\mu}{k}\, e^{k\,\|\,{\rm dev}_n \log U\|^2} + \dfrac{\kappa}{2\,\widehat{k}}\, e^{\widehat{k}\,[{\rm tr}(\log U)]^2} & \text{dacă} \quad \det F > 0, \\ +\infty & \text{dacă} \quad \det F \leq 0, \end{cases}$$

Această familie de energii neliniare se bazează pe tensorul de deformare de tip Hencky-logaritmic $\log U$. Aici, $k, \widehat{k}$ sunt constante fară dimensiune care rămân la dispoziţia noastră, $F = \nabla\varphi$ este gradientul deformării, $U = \sqrt{F^T F}$ şi ${\rm dev}_n \log U = \log U - \frac{1}{n}\,{\rm tr}(\log U)\cdot 1\!\!1$ este partea deviatorică a tensorului $\log U$. Celelalte cantităţi sunt constante constitutive. Ne referim la energiile din această familie sub numele de energii exponenţiale de tip Hencky. În studiile precedente s-a arătat că pentru $n = 2$ energia $W_{_{\rm eH}} : \mathbb{R}^{n\times n} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ este rank-one convexă pentru $k \geq \dfrac{1}{4}$ şi $\widehat{k} \geq \dfrac{1}{8}$, şi polyconvexă pentru $k \geq \dfrac{1}{3}$ şi $\widehat{k} \geq \dfrac{1}{8}$. De fapt, după cum va rezulta din lucrarea [L4], în general, pentru energii isotrope şi isocore depinzând de $\log U$ policonvexitatea coincide cu noţiunea de rank-one convexitate şi deci nu există nici o falie între $k \geq \frac{1}{4}$ şi $k < \frac{1}{3}$. În cazul $n = 3$ s-a demonstrat că nu există $k > 0$, pentru care energia $F \mapsto e^{k\,\|\,{\rm dev}_3 \log U\|^2}$, $F \in {\rm GL}^+(3)$ ar putea fi rank-one convexă (deci în mod clar nici policonvexă), în ciuda faptului că unele inegalităţi de tipul inegalităţii Jensen generalizată au loc de fapt pentru $n \geq 1$. Plecând de la acest incovenient, în etapa I a acestui grant de cercetare am discutat o relaţie interesantă dintre pierderea elipticităţii energiei $W_{_{\rm eH}}$ în cazul $n = 3$ şi plasticitatea finită. Folosindu-ne de descompunerea multiplicativă $F = F_e\, F_p$, am cuplat această energie cu legi de evoluţie $F_p\, \frac{\rm d}{\rm dt}[F_p^{-1}] \in -\partial\chi({\rm dev}_3\, \Sigma_e)$ definite în termenii lui F_p, unde $\partial\chi$ este subdiferenţiala funcţiei indicatoare χ a domeniului elastic convex $\mathcal{E}_{\rm e}(\Sigma_e, \frac{1}{3}\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{y}}^2) := \{\Sigma_e \in {\rm Sym}(3)\,|\,\|\,{\rm dev}_3\,\Sigma_e\|^2 \leq \frac{1}{3}\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{y}}^2\}$ exprimat cu ajutorul tensorului tensiune mixt Σ_e, $\Sigma_e = F_e^T D_{F_e} W_{\rm iso}(F_e)$, iar $W_{\rm iso}(F_e)$ reprezintă partea izocoră a energiei. Arătăm că domeniul unde $W_{_{\rm eH}}$ îşi pierde elipticitatea este prevestit de cuplarea cu fenomenul de plasticitate, deoarece domeniul de elipticitate a energiei $W_{_{\rm eH}}$ şi domeniul de elasticitate în termenii lui Σ_e sunt strâns legate între ele. Astfel, noua formulare rămâne eliptică în lipsa preîncărcărilor elastice pentru orice predeformare plastică. În plus, în acest domeniu relaţia tensiune-deformare rămâne monotonă după cum s-a observat din experimente. Păstrarea elipticităţii este o proprietate care trebuie să fie satisfăcută de orice model plastic hiperelastic deoarece în lipsa preîncărcărilor elastice materialul trebuie sa raspundă reversibil la încărcări elastice. Spre deosebire de modelul multiplicativ, modelul aditiv bazat pe tensorul deformare Hencky nu conservă elipticitatea. În cazul energiilor exponenţiale de tip Hencky W_{eH}, care nu sunt eliptice pentru deformări mari, am arătat explicit că modelul multiplicativ păstrează elipticitatea.

Obiectivul 2/2015. *Metode Hamiltoniene aplicate in studiul dinamicii sistemelor mecanice*

Referitor la acest obiectiv, în lucrarea [L2] am utilizat formalismul Hamiltonian pentru a studia dinamica deşeurilor spaţiale aflate în acele regiuni care corespund rezonanţelor minore; mai precis, am considerat rezonanţele 3:1, 3:2, 4:1, 4:3, 5:1, 5:2, 5:3, 5:4, unde rezonanţa $j : \ell$ (cu $j,\ \ell \in \mathbb{Z}$) semnifică faptul că perioada de revoluţie a deşeurilor spaţiale şi perioada de rotaţie a Pamântului sunt în raport de j/ℓ. Considerând un model matematic care ia în considerare efectele gravitaţionale ale Pământului, am studiat principalele aspecte dinamice referitoare la aceste rezonanţe. Rezultatele obţinute au fost validate prin compararea cu un model dezvoltat în coordonate carteziene care include pe lângă potenţialul terestru, atracţia Soarelui, influenţa Lunii şi presiunea radiaţiei solare. Avantajul utilizării formalismului Hamiltonian este acela că oferă argumente analitice care permit explicarea dinamicii globale a rezonanţelor. În colaborare cu Prof. dr. Alessandra Celletti, am demarat un amplu studiu al dinamicii deşeurilor spaţiale atât prin metode analitice cât şi prin metode numerice. Scopul nostru este acela de a obţine o descriere detaliată a regiunilor de rezonanţă, pentru a fi capabili în a discrimina între orbite regulate şi orbite haotice. Pentru a descrie regiunile care sunt obiectul investigaţiei noastre, amintim următoarea clasificare, devenită standard în momentul de faţă. Atunci când sunt studiate deşeurile spaţiale, se disting trei regiuni principale, denumite LEO (Low–Earth–Orbit), MEO (Medium–Earth–Orbit) şi GEO (Geostationary–Earth–Orbit); altitudinea acestor regiuni variază în funcţie de următoarea descriere. Regiunea LEO, aflată între altitudinile 0 şi 2 000 km, este afectată în ordinea importanţei de forţa de atracţie a Pământului, forţa de frecare cu aerul, nesfericitatea Pământului prin termenii armonici J_2 şi J_{22}, atracţia Lunii, influenţa Soarelui şi presiunea radiaţiei solare. Aşa numita "durată de viaţă orbitală " a unui deşeu spaţial, pe o orbita circulară cu altitudinea de aproximativ 250 km, este mai mică de 20 de zile, iar în acest caz, sunt necesare manevre frecvente pentru a menţine aceeaşi altitudine verticală. La altitudinea de 400 km durata de viaţă este mai mica de 200 zile, în timp ce la 800 km se ajunge la câteva sute de ani. Regiunea MEO, situată între 2 000 şi 30 000 km, este afectată (în ordinea importanţei), de următorii factori: atracţia gravitaţională a Pamântului, termenii armonici J_2 şi J_{22}, forţa de atracţie a Lunii, urmată de gravitaţia Soarelui şi presiunea radiaţiei solare (a se vedea, de exemplu, C.C. Chao, *Applied Orbit Perturbation and Maintenance*, Aerospace Press Series, AIAA, Reston, Virgina (2005)). Orbitele GPS se află la aproximativ 26 560 kilometri de centrul Pamântului; aici sateliţii se deplasează cu o viteză de aproximativ $3,9\ km/sec$ şi au perioada de revoluţie de 12 *ore* (timp sideral), adică jumatate din perioada de rotaţie a Pamântului. Această situaţie este denumită rezonanţă gravitaţională de tipul $2 : 1$. Identificarea caracterului dinamic în jurul rezonanţei $2 : 1$ este de o importanţă vitală pentru următoarele motive: regiunile stabile minimizează creşterea excentricităţii orbitei, în timp ce comportamentul haotic poate fi abil exploatat pentru a deplasa deşeurile în regiuni "cimitir" sau de a le modifica orbita în aşa fel încât să intre şi să se distrugă în atmosferă. GEO este regiunea aflată la altitudini mai mari de 30 000 km. Aceasta este afectată (în ordinea importanţei), de atracţia gravitaţională a Pamântului, termenii armonici J_2, atracţia Lunii, influenţa Soarelui, termenii armonici J_{22} şi presiunea radiaţiei solare (a se vedea A. Lemaître, N. Delsate, S. Valk, *A web of secondary resonances for large A/m geostationary debris*, Celest. Mech. Dyn. Astr. 104, 383–402 (2009); S. Valk, N. Delsate, A. Lemaître, T. Carletti, *Global dynamics of high area-to-mass ratios geosynchronous space debris by means of the MEGNO indicator*, Advances in Space Research, 43, 1509–1526 (2009)). În regiunea GEO, mecanismele de disipare sunt absente;

fiecare deşeu creat în această regiune va ramâne acolo pentru totdeauna.

În această etapă, am studiat rezonanţele gravitaţionale aflate în regiunea MEO, între 14000 km şi 37000 km faţă de centrul Terrei. Utilizând o serie de metode matematice bazate pe formalismul Hamiltonian şi teoria perturbaţiilor, am dezvoltat un model care descrie cu o foarte bună aproximare dinamica deşeurilor spaţiale. În acest sens, potenţialul terestru a fost dezvoltat în serie Fourier până la un ordin care depinde de rezonanţa studiată. Întrucât această dezvoltare conţine un număr mare de termeni, urmând procedura descrisă în lucrarea: A. Celletti, C. Galeş, *On the dynamics of space debris: 1:1 and 2:1 resonances*, J. Nonlinear Science 24, n. 6, 1231–1262 (2014), am introdus noţiunea de termen dominant într–o regiune specifică a spaţiului fazelor. Acest fapt permite să reducem considerabil numărul termenilor armonici ai dezvoltării, putându-ne astfel concentra doar asupra acelor termeni care influenţează direct dinamica. Pentru valori rezonabile ale elementelor orbitale, rezonanţele au o structură asemănătoare unui pendul matematic perturbat, care în spaţiul fazelor prezintă o zonă ("insulă") de libraţie (oscilaţie) care înconjoară punctul de echilibru stabil. Prezentăm un algoritm matematic simplu care permite calcularea cu un efort minim a amplitudinii rezonanţelor. Coroborând toate aceste informaţii legate de termenii dominanţi şi calculul amplitudinii rezonanţelor, am demonstrat un rezultat care prezice dacă "insulele" de libraţie asociate diverşilor termeni ai dezvoltării sunt disjuncte sau se suprapun. Predicţia acestui comportament este foarte importantă întrucât ne permite să discriminăm între orbitele regulate şi orbitele haotice. Dacă insulele sunt disjuncte, comportamentul este predictibil, în timp ce fenomenul de suprapunere a insulelor de libraţie dă naştere mişărilor haotice. Propunem un mecanism de transfer care necesită costuri mici în deplasarea deşeurilor în diverse regiuni ale spaţiului, iar în final, studiem un fenomen de bifurcaţie, care se produce în cazul unor rezonaţe, şi care provoacă o schimbare bruscă a caracterului stabil sau instabil al punctelor de echilibru.

Toate aceste rezultate calitative sunt dublate de studii numerice care permit cartografierea spaţiului fazelor pentru diverse valori ale elementelor orbitale. În acest sens, este calculat indicatorul Fast Lyapunov Indicator, care permite discriminarea între orbitele regulate şi orbitele haotice. Rezultatele sunt validate şi prin integrarea numerică a ecuaţiilor carteziene care descriu mişcarea, incluzând aici şi atracţia Lunii, atracţia Soarelui precum şi presiunea radiaţiei solare.

Descrierea rezultatelor obţinute în 2016

Obiectivul 1/2016. *Probleme neliniare in mecanică*

Referitor la acest obiectiv, să reamintim faptul că implicaţiile

$$\text{policonvexitatea} \quad \Longrightarrow \quad \text{quasiconvexitatea} \quad \Longrightarrow \quad \text{rank-one convexitatea}$$

au loc pentru orice dimensiune n. Cu toate acestea, este cunoscut faptul că rank-one convexitatea nu implică policonvexitatea şi că pentru $n > 2$ rank-one convexitatea nu implică quasiconvexitatea. Problema răspunsul la întrebarea dacă rank-one convexitatea implică quasiconvexitatea este considerată una dintre problemele majore în calculul variaţional. Morrey a afirmat în 1952 că aceste două concepte nu sunt echivalente, adică există funcţii $W : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$ care sunt rank-one convexe dar nu sunt quasiconvexe. Totuşi, există unele clase de energii pentru care cele două noţiuni coincid (a se vedea lucrările lui Müller şi ale lui Ball).

Urmând această ideea, în lucrare [L3] se prezintă o nouă condiţie pentru care rank-one convexitatea implică policonvexitatea (şi prin urmare şi quasiconvexitatea). Se arată că orice funcţie $W : \mathrm{GL}^+(2) \to \mathbb{R}$ care este izotropă, obiectivă (i.e. bi-SO(2)-invariant) dar şi izocoră este rank-one convexă dacă şi numai dacă este policonvexă. Folosind acest rezultat general, se arată că, pentru

$n = 2$, energiile din clasa energiilor exponenţiale de tip Hencky sunt rank-one convexe dacă şi numai dacă sunt policonvexe.

Necesitate identificării domeniului de elipticitate pentru invariantul izotrop $\| \operatorname{dev}_n \log U\|^2$ al tensorului de deformare logarimic $\log U$ apare ca urmare a observaţiei că partea izocoră $\|\operatorname{dev}_n \log U\|^2$ a energiei Hencky pătratice nu este rank-one convexă pe $\mathrm{SL}(n)$ pentru $n = 2, 3$. Este uşor de verificat dacă o energie este rank-one convexă sau nu. Este de asemenea clar că există o vecinătate a matricei identitate unde condiţia Legendre-Hadamard este satisfăcută. Ce este dificil este de a determina analitic cu exactitate care este domeniul maxim de elipticitate. Cu toate acestea, în lucrare [L4] am determinat numeric domeniu maxim de elipticitate pentru $\| \operatorname{dev}_n \log U\|^2$ şi am folosit o cale intermediară pentru a determina o multime considerabilă în care energia este eliptică. Calculele numerice şi graficele obţinute arată, după unele transformări convenabil alese, faptul că secţiunea acestui domeniu este elipsa maximă ce poate fi inclusă în secţiunea domeniului maxim de elipticitate.

Este cunoscut faptul că problema elipticităţii este strâns legată de studiul propagării undelor. Problema propagării undelor de suprafaţă Rayleigh are ca principală aplicaţie studiul mişcărilor solului ca urmare a exploziilor sau a cutremurelor. De asemenea, undele de suprafaţă au fost aplicate cu succes şi în multe domenii tehnologice, cum ar fi studiul rezistenţei materialelor, al senzorilor, al reactoarelor nucleare, al rezonatoarelor, al componentelor electronice etc. În lucrare [L5] am discutat efectele termice şi efectele memoriei asupra propagării undelor de suprafaţă Rayleigh într-un semispaţiu alcătuit dintr-un material termovâscoelastic cu goluri, gradat exponenţial. Utilizând procedeul descris de către Destrade (2007), am considerat că densitatea de masă şi coeficienţii constitutivi variază exponenţial în raport cu adâncimea semispaţiului considerat. Prezenţa energiei de disipare implică descreşterea asimptotică a soluţiei problemei propagării undelor de suprafaţă Rayleigh atunci când timpul tinde la infinit. Luând în considerare caracterul disipativ al modelului termovâscoelastic poros, se studiază problema propagării undelor de suprafaţă Rayleigh. Condiţia de propagare a fost stabilită sub forma unei ecuaţii algebrice de gradul zece, cu coeficienţi complexi. Soluţiile proprii ale sistemului dinamic sunt obţinute explicit în termenii soluţiilor caracteristice. Soluţia problemei propagării undelor de suprafaţă Rayleigh este reprezentată ca o combinaţie liniară de cinci soluţii proprii, iar ecuaţia seculară este stabilită în formă implicită. Rezultatele sunt ilustrate şi pentru cazul unui semispaţiu termovâscoelastic poros, izotrop şi neomogen. Forma explicită a ecuaţiei seculare este determinată pentru cazul mediilor izotrope şi omogene. Sunt prezentate unele rezultate numerice pentru a evidenţia rezultatele teoretice obţinute.

În lucrarea [L6] considerăm posibilitatea de a obţine diferite tipuri de concepte de majorizare, utile în studiul elipticităţii din mecanica neliniară, folosind o procedură de minimizare a unor energii/functionale perturbate. De asemenea, conexiuni cu conceptul de convexitate relativă folosind inegalitatea lui Jensen sunt stabilite. Considerăm $x = (x_1, ..., x_N)$ and $y = (y_1, ..., y_N)$ doi vectori din $\mathbb{R}^N$. Vom lega minimizanţii folosind inegalităţi din teoria clasică a majorizării şi obţinem o extensie interesantă a inegalităţii Hardy-Littlewood-Polya: Fie $\alpha \geq 0$ si $x, y \in \mathbb{R}^N_+$ doi vectori astfel încât $x \prec_\alpha y$. Atunci, pentru fiecare funcţie convexă $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ are loc inegalitatea

$$\frac{f(x_1) + ... + f(x_N)}{N} \leq \frac{1}{1+\alpha} \frac{f(y_1) + ... + f(y_N)}{N} + \frac{\alpha}{1+\alpha} f(0). \tag{1}$$

Mai mult, prezentăm o generalizare a inegalităţii Hardy-Littlewood-Polya pentru α-majorizare, ce foloseşte noţiunea de punct de convexitate: Considerăm $\alpha \geq 0$ si $x = (x_1, ..., x_N) \in \mathbb{R}^N_+$, unde $x_1, ..., x_N$ sunt puncte de convexitate ale funcţiei crescătoare $f : I \to \mathbb{R}$. Atunci pentru fiecare $y = (y_1, ..., y_N)$ ce verifica $x \prec_\alpha y$ are loc inegalitatea $\sum_{i=1}^N f(x_i) \leq \sum_{i=1}^N f(y_i)$. Partea finală a lucrării este dedicată posibilităţii de a considera noul concept de majorizare de mai sus in spaţiile cu geometrie curbă, folosind unele idei dintr-o lucrare anterioară a autorului împreună cu C. P. Niculescu.

Obiectivul 2/2016. *Studiul ecuaţiilor Euler şi a sistemelor hibride*

La modul general, curgerea unui fluid ideal, incompresibil, irotaţional într-un canal este regizată de ecuaţiile Euler cu frontieră liberă. În cele mai multe cazuri aceste ecuaţii se dovedesc prea complicate pentru a obţine informaţii relevante practic (spre exemplu dacă avem în vedere aplicaţii în ingineria costieră). O idee pentru a surmonta această dificultate este aceea de a deriva modele asimptotice în funcţie de problema fizică concretă care să încorporeze anumite aspecte particulare. Regimul Boussinesq descrie unde hidrodinamice de amplitudine mică cu lungime de undă mare, în raport cu adâncimea canalului. Astfel, în 2002 este obţinută următoarea familie de sisteme de ecuaţii cu derivate parţiale (familie cunoscută sub numele de sisteme *abcd*) ce are în vedere unde în regimul Boussinesq:

$$\begin{cases} (I-\varepsilon b\Delta)\,\partial_t\eta+(I+\varepsilon a\Delta)\operatorname{div}V+\varepsilon\operatorname{div}(\eta V)=0, \\ (I-\varepsilon d\Delta)\,\partial_t V+(I+\varepsilon c\Delta)\,\nabla\eta+\frac{\varepsilon}{2}\nabla\left|V\right|^2=0. \end{cases} \tag{2}$$

Mai sus, $\eta\in\mathbb{R}$ reprezintă variaţia suprafeţei libere în raport cu poziţia de echilibru iar câmpul vectorial $V\in\mathbb{R}^2$ este o aproximare a câmpului de viteză iniţial. Numerele reale a,b,c,d,ε sunt paramatrii de modelare. Parametrul ε caracterizează regimul Boussinesq si este presupus a fi mic i.e. $\varepsilon\ll 1$. Având în vedere caracterul de aproximare a modelui Euler, o teorie a existenţei globale a soluţiilor pentru familia (2) (de altfel săracă din cauza dificultăţilor de ordin teoretic) este irelevantă practic. Pentru aplicaţii în ingineria costieră, spre exemplu, o teorie a existenţei ce persistă pe un timp lung (de ordin ε^{-1} când efectele neliniare si cele dispersive au o contribuţie de ordin 1 la evoluţia undei) este suficientă. Astfel, problema existenţei pe timp lung consistă în construirea unei soluţii unice pentru problema Cauchy corespunzătoare sistemului (2) al cărei timp de existenţă să fie minorat de o cantitate de ordin ε^{-1}. Această problemă a fost abordată anterior de diverşi autori. În articolul [L7] punând în funcţiune maşinăria Litllewood-Paley generalizăm o parte din rezultatele anterior menţionate prin reducerea nivelului de regularitate necesar pentru rezolvarea problemei Cauchy pe timp lung. Spre deosebire de celelalte lucrări consacrate acestei probleme, metoda abordată de noi are avantajul de a nu fi sensibilă cu privire la valoarea parametrilor permiţându-ne astfel să abordăm de o manieră uniformă majoritatea cazurilor generate de alegerea parametrilor a,b,c,d.

Remarcăm faptul că întrucât sistemele (2) reprezintă o aproximare a modelui Euler, o teorie a existenţei ce persistă pe un timp lung (de ordin ε^{-1} când efectele neliniare şi cela dispersive au o contribuţie de ordin 1 la evoluţia undei) este suficientă prentu scopuri practice. Rezultate în acest sens sunt obţinute anterior, cadrul funcţional adoptat în aceste lucrări este cel al spaţiilor Sobolev modelate pe L^2 cu indice de regularitate $s>\frac{n}{2}+1$ unde n este dimensiunea spaţiului ambient. Aceste funcţii sunt esenţial localizate spaţial întrucât ele se anulează la infinit. Astfel, acest cadru nu este adaptat studiului mascareţilor care sunt exemple de valuri ce se propagă în sensul opus curgerii apei dintr-un canal. În [L8] propunem un cadru funcţional care să permită rezolvarea problemei Cauchy asociată sistemelor (2) cu $a=c=0$ astfel încât să putem considera date iniţiale de tip mascaret. Mai precis, în cazul 1-dimensional putem considera date iniţiale continue η_0^{1D} aşa încât:$\lim_{x\to\pm\infty}\eta_0^{1D}(x)=\eta_\pm$. Pentru cazul 2-dimensional considerăm date iniţiale care sunt esenţial perturbări 2-dimensionale ale situaţiei precedente, mai precis considerăm:

$$\begin{cases} \eta_0^{2D}(x,y)=\eta_0^{1D}(x)+\phi(x,y), \\ V_0^{2D}(x,y)=\left(u_0^{1D}(x)+\psi_1(x,y),\psi_2(x,y)\right) \end{cases}$$

şi cerem ca

$$\lim_{|(x,y)|\to\infty} |\phi(x,y)| = 0 \text{ şi } \lim_{|(x,y)|\to\infty} |\psi_i(x,y)| = 0 \text{ pentru } i = 1,2.$$

Demonstraţia este bazată pe teorie Littlewood-Paley cât şi pe o împărtire bine aleasă a datei iniţiale în frecvenţe joase, respectiv înalte, iar rezultatele sunt utile (eventual reinterpretând semnificaţia fizică a cantităţilor ce apar în sistem) şi în studiul sistemelor hibride.

În lucrarea [L9] considerăm o schemă semi-discretă cu diferenţe finite pentru aproximarea controalelor la frontieră pentru ecuaţia undelor 1-dimensională. Oscilaţiile mari ale frecvenţelor înalte duc la pierderea (în raport cu pasul de discretizare) a proprietăţii de controlabilitate al modelului semi-discret. Am demonstrat că, filtrând frecvenţele înalte ale datei iniţiale intr-un rang optim, vom restabili proprietatea de controlabilitate uniformă. Mai mult, obţinem o relaţie între rangul de filtrare şi timpul minimal de control necesar pentru a asigura uniform controlabiliatea, redescoperind în multe cazuri timpul minimal de control al ecuaţiei undelor continue. Fie $N \in \mathbb{N}^*$ si $h = \frac{1}{N+1}$. Pentru $T > 0$, considerăm următoarea discretizare cu diferenţe finite a ecuaţiei undelor:

$$\begin{cases} u_j''(t) - \frac{u_{j+1}(t)-2u_j(t)+u_{j-1}(t)}{h^2} = 0 & 1 \le j \le N,\ t > 0, \\ u_0(t) = 0 & t \in (0,T), \\ u_{N+1}(t) = v_h(t) & t \in (0,T), \\ u_j(0) = u_j^0, \quad u_j'(0) = u_j^1 & 1 \le j \le N. \end{cases} \tag{3}$$

Considerând $T \ge 2$, $h > 0$ si $((u_j^0, u_j^1))_{1\le j\le N} \in \mathbb{C}^{2N}$, studiem existenţa unei funcţii de control $v_h \in C^0([0,T])$ astfel încât solutia ecuaţiei (3) verifică

$$u_j(T) = u_j'(T) = 0 \qquad (j = 1, 2, ..., N).$$

Studiem existenţa unui şir uniform mărginit de controale $(v_h)_{h>0}$ în raport cu pasul de discretizare h. Rezultatul principal este: Fie $(u^0, u^1) \in L^2((0,1),\mathbb{C}) \times H^{-1}((0,1),\mathbb{C})$ şi fie $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ o funcţie crescătoare (ce corespunde funcţiei de filtrare a modurilor) ce verifică $f(N) \leqslant N$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ şi $f(N) \to \infty$ când $N \to \infty$. Vom nota prin

$$\Gamma(f) := \limsup_{N\to\infty} \frac{f(N)}{N} \in [0,1]. \tag{4}$$

Atunci, pentru orice $T > \frac{2}{1-\sin\left(\frac{\pi\Gamma(f)}{2}\right)}$, există un control $v_h \in C^0([0,T],\mathbb{C})$ ce duce soluţia problemei (3) (cu condiţia iniţială U_h^0) la (0,0) astfel încât şirul $(v_h)_{h>0}$ este mărginit in $C^0([0,T],\mathbb{C})$. Prin acest rezultat îmbunătăţim rezultatele obţinute in *Micu, S., Uniform boundary controllability of a semi–discrete 1–D wave equation, Numer. Math., 91 (2002), 723-768.* Mai mult, obţinem o estimare precisă a timpului minimal de control, ce se dovedeşte a fi optimal atunci când filtrăm destul de multe de frecvenţe. De exemplu, dacă $f(N) = o(N)$ (cazul în care $f(N) = N^\alpha$ cu $\alpha \in (0,1)$), atunci $\Gamma(f) = 0$, obţinem uniform controlabilitatea pentru orice timp $T > 2$, care este timpul minimal de control al sistemului continuu. Acest rezultat este optimal, este cunoscut faptul că nu putem alege $\Gamma(f) = 1$, în acest caz controalele explodează exponenţial când h tinde la 0.

Obiectivul 3/2016. *Metode Hamiltoniene aplicate in studiul dinamicii sistemelor mecanice*

În ceea ce priveşte acest obiectiv, în lucrările [L10] şi [L12] s-a folosit formalismul Hamiltonian cu scopul de a studia rezonanţele care influenţează dinamica deşeurilor cosmice. Mai mult decât atât, în lucrarea [L11] au fost studiate efectele disipative cauzate de vântul solar şi efectul Poynting–Robertson. S-a demonstrat că interacţiunea dintre diferitele forţe perturbatoare are ca efect o dinamică complexă a deşeurilor cosmice. O analiză detaliată bazată pe metode şi tehnici Hamiltoniene relevă existenţa unor fenomene dinamice diverse, cum ar fi: bifucaţii, suprapuneri de rezonanţe, variaţii ale amplitudinii rezonanţelor, haos etc. Aceste fenomene explică variaţia observată a elementelor orbitale.

Înainte de a intra în detalii, se cuvine să menţionăm că de la începutul erei spaţiale, un număr mare de deşeuri s-au acumulat în vecinătatea Pământului. Astfel de obiecte, a căror mărime variază de la câţiva milimetri la câţiva centimetri, sunt resturi ale exploziilor unor nave spaţiale sau coliziuni, sateliţi neoperaţionali, trepte ale unor rachete, etc. Estimările actuale arată că există aproximativ $3 \cdot 10^8$ obiecte cu dimensiuni mai mari de 1 mm şi aproximativ $3.5 \cdot 10^5$ obiecte mai mari de 1 cm. Impactul navelor spaţiale operaţionale sau sateliţilor cu astfel de obiecte ar putea duce la situaţii periculoase sau chiar dramatice; acumularea de resturi spaţiale în anumite regiuni ale cerului – acolo unde sunt poziţionaţi majoritatea sateliţilor operaţionali – nu mai poate fi neglijată. Este esenţială înţelegerea dinamicii acestor corpuri pentru strategiile de întreţinere şi control, precum şi pentru a stabili diverse proceduri care să atenueze efectele produse de resturile spaţiale.

În lucrarea [L10], utilizând teoria bifurcaţiilor, s-au studiat rezonanţele seculare induse de Soare şi Lună. În particular, a fost abordată o clasă specială de rezonanţe, şi anume rezonanţele care depind doar de înclinaţii. Această clasă cuprinde trei tipuri distincte de rezonanţe seculare: cele care se produc la înălţimea critică, cele care corespund orbitelor polare, iar un al treilea tip presupune o combinaţie liniară a ratelor de variaţie a argumentului perigeului şi longitudinii nodului ascendent. Modelul care descrie dinamica deşeurilor cosmice include perturbaţiile datorate nesfericităţii Pamântului, atracţia Lunii şi atracţia Soarelui, şi este definit în termenii variabilelor unghiuri–acţiuni. Împrumutând tehnici şi metode din teoria bifurcaţiilor şi teoria sistemelor Hamiltoniene, au fost studiate o serie de orbite periodice şi determinată acea valoare a energiei care conduce la fenomenul de bifurcaţie în cadrul resonanţelor seculare. Această abordare oferă informaţii privind existenţa şi poziţia punctelor de echilibru, care ne-a permis să identificăm regiunile stabile şi instabile ale spaţiului fazelor. Studiul rezonanţelor este important nu doar din punct de vedere al aplicaţiilor; acesta oferă o perspectivă interesantă şi în ceea ce priveşte teoria bifurcaţiilor.

În lucrarea [L11] s-a analizat efectul combinat al vântului solar şi efectul Poynting-Robertson. S-a propus un model matematic utilizând formalismele: cartezian, Gaussian şi Hamiltonian. Pe baza acestui model, s-a studiat în detaliu rezonanţa geostaţionară. Celelalte rezonanţe, aflate în regiunea MEO şi în afara inelului geostaţionar se studiază în mod asemănător. Utilizând atât abordări numerice cât şi analitice a fost determinată rata de descreştere a altitudinii orbitelor, efect datorat vântului solar şi efectului Poynting-Robertson. După o analiză calitativă a stabilităţii punctelor de echilibru, s-a studiat comportamentul regulat, rezonant şi haotic pentru un eşantion de condiţii iniţiale. Rezultatele, depin de valoarea parametrului arie-pe-masă, şi arată diverse comportări din punct de vedere dinamic: captări temporare în rezonanţa geostaţionară (primară) precum şi captări temporare în rezonanţele secundare care implică rata de variaţie a longitudinii Soarelui. Această analiză arată că dacă se studiază mişcarea pe un interval de timp lung (de ordinul sutelor de ani), vântul solar şi efectul Poynting-Robertson trebuiesc luate în considerare în modelarea dinamicii deşeurilor spaţiale. Fenomenele puse în evidenţă de modelele matematice introduse, pot fi expluatate practic prin plasarea deşeurilor în regiuni convenabile ale spaţiului.

Lucrarea [L12] conţine un studiu al rezonanţelor seculare. În particular, este considerată rezonanţa descrisă de relaţia $2\dot{\omega}+\dot{\Omega}=0$, unde ω şi Ω reprezintă argumentul perigeului şi respectiv longitudinea nodului ascendent. Această rezonanţă este deosebit de importantă întrucât afectează evoluţia constelaţiilor de sateliţi GNSS (global navigation satellite systems). S-au introdus trei modele matematice distincte, cu grade diferite de complexitate. Pe baza acestora, s-a arătat că creşterea exentricităţii orbitelor, aşa cum a fost pusă în evidenţă de observaţii asupra deşeurilor aflate în MEO şi sateliţilor GNSS, poate fi explicată ca un efect natural al rezonanţei seculare $2\dot{\omega} + \dot{\Omega} = 0$, în timp ce variaţia haotică a parametrilor orbitali este rezultatul interacţiunii şi suprapunerii rezonanţelor aflate în vecinătate.

DIRECTOR DE PROIECT,

Dr. Ionel-Dumitrel Ghiba

SCIENTIFIC REPORT

regarding the implementation of the project

Mathematical methods applied in the study of mechanical systems, PN-II-RU-TE-2014-4-0320

contract no. 127 from 01/10/2015

2015 – 2016

The studies, activities and tasks of this first intermediate stage of the project were related to the following topics:

2015

1. Nonlinear problems in mechanics;
2. Hamiltonian methods applied in the study of dynamics of mechanical systems.

2016

1. Nonlinear problems in mechanics;
2. The study of Euler equations and of hybrid interaction systems;
3. Hamiltonian methods applied in the study of dynamics of mechanical systems.

The objectives which were planned in 2015 and 2016 were completely accomplished. The results will be explicitly presented in this report after a short presentation of the stage of our research.

Until now, in this research grant the followings have been done:

Scientific papers reported in 2015/updated list

L1. P. Neff, I.D. Ghiba, The exponentiated Hencky-logarithmic strain energy: Part III-coupling with idealized multiplicative isotropic finite strain plasticity, *Continuum Mechanics and Thermodynamics* 28: 477–487, 2016. *IF: 1.849 AIS: 1.808*

L2. A. Celletti, C. Galeş, Dynamical investigation of minor resonances for space debris, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 123: 203–222, 2015. *IF: 1.594 AIS: 1.110*

Total IF for 2015: 3.443

Total AIS for 2015: 2.918

Scientific papers reported in 2016

L3. I.D. Ghiba, P. Neff, R.J. Martin, An ellipticity domain for the distortional Hencky- logarithmic strain energy, *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical & Engineering Sciences* 471, doi:10.1098/rspa.2015.0510, 2015. *IF: 1.935 AIS: 2.223*

L4. R.J. Martin, I.D. Ghiba, P. Neff, Rank-one convexity implies polyconvexity for isotropic, objective and isochoric elastic energies in the two-dimensional case, in print, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, Section: A Mathematics*, 2016. *IF: 0.983 AIS: 1.616*

L5. A. Bucur, Rayleigh surface waves problem in linear thermoviscoelasticity with voids, *Acta mechanica* 227: 1199–1212, 2016. *IF: 1.694 AIS: 1.024*

L6. I. Rovenţa, A note on majorization via perturbed minimizers, submitted.

L7. C. Burtea, New long time existence results for a class of Boussinesq-type systems, *Journal de Mathematiques Pures et Appliquees* 106: 203–236. *IF: 1.818 AIS: 3.117*

L8. C. Burtea, Long time existence results for bore-type initial data for BBM-Boussinesq systems, *Journal of Differential Equation* 261: 4729–5288. *IF: 1.821 AIS: 2.386*

L9. P. Lissy, I. Rovenţa, Optimal filtration for the approximation of boundary controls for the one-dimensional wave equation, submitted.

L10. A. Celletti, C. Galeş, G. Pucacco, Bifurcation of lunisolar secular resonances for space debris orbits, *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems* 15: 1352–1383, 2016. *IF: 1.819 AIS: 1.730*

L11. C. Lhotka, A. Celletti, C. Galeş, Poynting–Robertson drag and solar wind in the space debris problem, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 460: 802–815, 2016. *IF: 4.952 AIS 1.855*

L12. A. Celletti, C. Galeş, A study of the lunisolar secular resonance $2\dot{\omega} + \dot{\Omega} = 0$, *Frontiers in Astronomy and Space Sciences - Fundamental Astronomy*, 31 March 2016, http://dx.doi.org/10.3389/fspas.2016.00011 (on-line paper).

Total IF for 2016: 15.022

Total AIS for 2016: 13.951

Conferences

C1. I.D. Ghiba, Loss of ellipticity for non-coaxial plastic deformations in additive logarithmic finite strain plasticity and other related results on Hencky-type energies, 86th *Annual Meeting of the GAMM*, Braunschweig, Germany, March 7–11, 2016.

C2. I.D. Ghiba, On some Hencky-type energies, *XIII-ème Colloque Franco-Roumain de Mathématiques Appliéques*, Iaşi, August 25–29, 2016.

C3. C. Galeş, A study of the lunisolar secular resonances for space debris by using the Hamiltonian formalism, *Computational perturbative methods for Hamiltonian systems - Applications in physics and astronomy*, Athens, June 11 – July 13, 2016.

C4. C. Galeş, Resonance effects in the dynamics of space debris, *XIII-ème Colloque Franco-Roumain de Mathématiques Appliquées*, Iaşi, August 25–29, 2016.

C5. C. Galeş, Dynamics of resonances in the space debris problem, *Final Stardust Conference*, ESA ESTEC, Leiden (The Netherlands), October 31– November 4, 2016.

C6. C. Burtea, New long time existence results for a class of Boussinesq-type systems, *XIII-ème Colloque Franco-Roumain de Mathématiques Appliquées*, Iaşi, August 25–29, 2016.

C7. A. Bucur, Rayleigh surface waves problem in thermoviscoelastic medium with voids, *11th International Congress on Thermal Stresses 2016 (TS 2016)*, Salerno, Italy, June 5–9, 2016.

C8. A. Bucur, Spatial behavior in linear theory of thermoviscoelasticity backward in time for porous media, *XIII-ème Colloque Franco-Roumain de Mathématiques Appliquées*, Iaşi, August 25–29, 2016.

Academic visits supported by this grant

S1. I.D. Ghiba was guest of Prof. dr. Patrizio Neff, Duisburg-Essen University, Germany, January 11 ianuarie– March 18, 2016.

S2. C. Galeş was guest of Prof. dr. Alessandra Celletti, Department of Mathematics, University Tor Vergata, Rome, Italy, June 5–12, 2016.

S3. I.D. Ghiba was guest of Prof. dr. Mircea Bîrsan, Duisburg-Essen University, Germany, May 16– August 12, 2016.

S4. C. Galeş was guest of Prof. dr. Alessandra Celletti, Department of Mathematics, University Tor Vergata, Rome, Italy, June 25– July 9, 2016.

S5. I.D. Ghiba was guest of Prof. dr. Patrizio Neff, Duisburg-Essen University, Germany, November 28– December 5, 2016.

Others

- I.D. Ghiba has received in October 2016 the Award Iuventas Scientiae from Alexandru Ioan Cuza University of Iasi for the scientific results obtained during the academic year 2015-2016.
- Paper [L10] appears as FEATURED ARTICLE on the web page of SIAM Journal on Applied Dynamical Systems: http://epubs.siam.org/journal/sjaday.

Scientific papers to be finished in the next years in order to accomplish the objectives corresponding to 2017

L13. G. Barbagallo, M.V. D'Agostino, R. Abreu, I.D. Ghiba, A. Madeo, P. Neff, Transparent anisotropy for the relaxed micromorphic model: macroscopic consistency conditions and long wave length asymptotics, in work, 2016-2017.

L14. A. Madeo, P. Neff, G. Barbagallo, M.V. D'Agostino, I.D. Ghiba, A review on wave propagation modeling in band-gap metamaterials via enriched continuum models, in work, 2016-2017.

L15. C. Burtea, Optimal well-posedness for the inhomogeneous incompressible Navier-Stokes system with general viscosity, in work, 2016-2017.

L16. A. Celletti, C. Galeş, G. Pucacco, A. Rosengren, Analytical development of the lunisolar disturbing function and the critical inclination secular resonance, in work, 2016-2017.

Presentation of the results obtained in 2015

Objective 1/2015. *Nonlinear problems in mechanics*

Related to this objective, in the paper [L1] we have investigated an immediate application in finite strain multiplicative plasticity of the family of isotropic volumetric-isochoric decoupled strain energies

$$F \mapsto W_{\text{eH}}(F) := \widehat{W}_{\text{eH}}(U) := \begin{cases} \dfrac{\mu}{k}\, e^{k\,\|\operatorname{dev}_n \log U\|^2} + \dfrac{\kappa}{2\,\widehat{k}}\, e^{\widehat{k}\,[\operatorname{tr}(\log U)]^2} & \text{if} \quad \det F > 0, \\ +\infty & \text{if} \quad \det F \leq 0, \end{cases}$$

based on the Hencky-logarithmic (true, natural) strain tensor $\log U$. Here, $\mu > 0$ is the infinitesimal shear modulus, $\kappa = \frac{2\mu+3\lambda}{3} > 0$ is the infinitesimal bulk modulus with λ the first Lamé constant, $k, \widehat{k}$ are dimensionless fitting parameters, $F = \nabla\varphi$ is the gradient of deformation, $U = \sqrt{F^T F}$ is the right stretch tensor and $\operatorname{dev}_n \log U = \log U - \frac{1}{n}\operatorname{tr}(\log U)\cdot \mathbb{1}$ is the deviatoric part of the strain tensor $\log U$.

We have called this the exponentiated Hencky energy. For the two-dimensional situation $n = 2$ and for $\mu > 0, \kappa > 0$, we have established that the functions $W_{\text{eH}} : \mathbb{R}^{n\times n} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ from the family of exponentiated Hencky type energies are rank-one convex for $k \geq \dfrac{1}{4}$ and $\widehat{k} \geq \dfrac{1}{8}$, while they are polyconvex for $k \geq \dfrac{1}{3}$ and $\widehat{k} \geq \dfrac{1}{8}$. In fact, for $n = 2$ we will finish in the next year a results [L4] which shows that for isochoric and isotropic energies depending on $\log U$ polyconvexity is equivalent with rank-one convexity. This proves that there is not a gap between $k > \frac{1}{4}$ and $k < \frac{1}{3}$. Regarding the three-dimensional case we have proved that, for all $k > 0$, the function $F \mapsto e^{k\,\|\operatorname{dev}_3 \log U\|^2}$, $F \in \mathrm{GL}^+(3)$ is not rank-one convex (and therefore not polyconvex), even some generalised Jensen type inequalities hold true. However, from this shortcoming, in this grant we have discussed an interesting relation between non-ellipticity of W_{eH} in three-dimensions and finite plasticity models. Based on the multiplicative decomposition $F = F_e\, F_p$, we couple these energies with some isotropic elasto-plastic flow rules $F_p\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}[F_p^{-1}] \in -\partial\chi(\operatorname{dev}_3 \Sigma_e)$ defined in the plastic distortion F_p, where $\partial\chi$ is the subdifferential of the indicator function χ of the convex elastic domain $\mathcal{E}_{\text{e}}(W_{\text{iso}}, \Sigma_e, \frac{1}{3}\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{y}}^2)$ in the mixed-variant Σ_e-stress space, $\Sigma_e = F_e^T D_{F_e}, W_{\text{iso}}(F_e)$ and $W_{\text{iso}}(F_e)$ represents the isochoric part of the energy. While W_{eH} may loose ellipticity, we show that loss of ellipticity is effectively prevented by the coupling with plasticity, since the ellipticity domain of W_{eH} on the one hand, and the elastic domain in Σ_e-stress space on the other hand, are closely related. Thus the new formulation remains elliptic in elastic unloading at any given plastic predeformation. In addition, in this domain, the true-stress-true-strain relation remains monotone, as observed in experiments. We have shown that the multiplicative plasticity models preserve ellipticity in purely elastic processes at frozen plastic variables provided that the initial elastic response is elliptic. Preservation of LH-ellipticity is, in our view, a property which should be satisfied by any hyperelastic-plastic model since the elastically unloaded material specimen should respond reasonable under further purely elastic loading. In contrast to multiplicative models, the much used additive logarithmic model does not preserve LH-ellipticity in general.

An interesting question concerns the requirements that one should impose on the elastic response for arbitrary large distortional strains. One may reasonably argue that these requirements are void of any relevance, since the material can never be observed in a state of large distortional strain: prior to that, dissipative processes will occur. In the case of the energy W_{eH}, which is not rank-one elliptic for extreme distortional strains, we have explicitly shown that elastic unloading will remain rank-one convex.

Objective 2/2015. *Hamiltonian methods applied in the study of dynamics of mechanical systems*

Related to this objective, in the paper [L2] we used the Hamiltonian formalism in order to study the dynamics of the space debris in regions corresponding to minor resonances; precisely, we consider the resonances 3:1, 3:2, 4:1, 4:3, 5:1, 5:2, 5:3, 5:4, where a $j : \ell$ resonance (with j, $\ell \in \mathbb{Z}$) means that the periods of revolution of the debris and of rotation of the Earth are in the ratio j/ℓ. We consider a Hamiltonian function describing the effect of the geopotential and we use suitable finite expansions of the Hamiltonian for the description of the different resonances. Since the Hamiltonian approach includes just the effect of the geopotential, we validate our results by performing a numerical integration in Cartesian variables of a more complete model including the gravitational attraction of Sun and Moon, as well as the solar radiation pressure.

In order to describe the regions that will be the object of investigation of our study, let us introduce the following (nowadays standard) classification of the sky, according to the altitude from the Earth. When studying space debris one typically distinguishes between three main regions, referred to as LEO (acronym of Low–Earth–Orbit), MEO (Medium–Earth–Orbit) and GEO (Geostationary–Earth–Orbit); the altitude of such regions varies according to the following description. LEO is the region between 0 and 2 000 km, which is affected (in order of importance) by the monopole term GM_E of the gravitational attraction of the Earth, air drag, Earth's oblateness harmonics J_2 and J_{22}, the attraction of the Moon, the influence of the Sun and the solar radiation pressure. For a space debris with area–to–mass ratio equal to about 0.01 $\left[\frac{m^2}{kg}\right]$, the orbital lifetime in a circular orbit with radius of about 250 km is less than 20 days; in this case frequent maneuvers are required to keep the orbital altitude. At 400 km the lifetime is less than 200 days, while at 800 km it reaches several hundred years. MEO is the region between 2 000 and 30 000 km, which is affected (in order of importance) by the following factors: the GM_E term, Earth's oblateness J_2, Earth's oblateness J_{22}, which is comparable to next factor, namely the attraction of the Moon, followed by the influence of the Sun and the solar radiation pressure. GPS orbits are located at about 26 560 km from Earth's center; here satellites move with a speed of about 3.9 km/sec and a period of 12^h (sidereal time), namely half of the period of rotation of the Earth. We shall refer to this situation as a *gravitational 2:1 resonance*. Much of the present work is devoted to the study of the 2:1 resonance, whose typical effect is to provoke long–period changes of the eccentricity. The identification of the dynamical character around the 2:1 resonance is of seminal importance for the following reasons: stable regions allow to minimize the eccentricity growth, while chaotic behaviors can be skilfully exploited for mitigation strategies, either moving the debris in graveyard regions or aiming at its re–enter and destruction into the atmosphere. GEO is the region at altitudes larger than 30 000 km, which is affected (in order of importance) by the GM_E term, Earth's oblateness J_2, the attraction of the Moon, the influence of the Sun, Earth's oblateness J_{22} and the solar radiation pressure. In GEO, the decay mechanisms are absent; each satellite in a geostationary orbit is assigned to an orbital slot of about 0.1^o of width in longitude. Any debris created in this region will stay there almost forever. In this work we concentrated on resonances of lower order (w.r.t. GEO and GPS), to which we will refer as *minor* resonances: 3:1, 3:2, 4:1, 4:3, 5:1, 5:2, 5:3, 5:4, which populate the region of the sky between 14000 km and 37000 km from Earth's center. Our study aims at exploiting the minor resonances using mathematical tools based on a Hamiltonian approach, which allows us to have a deep understanding of the dynamics of such resonances. This task can be accomplished, once we have a model that describes with good accuracy the dynamics. To this end, we expand the geopotential to different orders, according to the resonance we are considering. However, since the expansion might contain a huge number of terms, following A. Celletti, C. Galeş, *On the dynamics of space debris: 1:1 and 2:1 resonances*, J. Nonlinear Science 24, n. 6, 1231–1262 (2014), we introduce the notion of *dominant* term in a specific region of the orbital elements' space. This allows us to considerably reduce the number of harmonics which really shape the dynamics. For reasonable parameter values, the resonances have a typical pendulum structure, showing an island shape surrounding the elliptic point. We present a simple mathematical algorithm that allows one to compute the amplitudes of the resonant islands with a minimum computational effort. Casting together such information about the dominant terms and the amplitudes of the islands, we are able to proceed further in predicting whether the islands associated to the different harmonic terms are well separated or they rather overlap giving birth to chaotic motions (the so-called splitting or superposition phenomena). The prediction of such behavior is obviously very important, since it could allow for regular or chaotic motions. Indeed, we also propose a transfer mechanism at low cost, taking advantage of the stable or chaotic character of the dynamics as some orbital elements are suitably varied. The knowledge of the dynamical behavior can also facilitate collision avoidance maneuvers. Finally, we studied the mechanism of transcritical bifurcations, which occur for some resonances and which provoke a sudden change in the stable/unstable behavior of the equilibria. All these results, which are based on a careful mathematical analysis of the Hamiltonian expansion, are confirmed by a numerical study of the dynamical behavior obtained by computing the so-called Fast Laypunov Indicators. Since the Hamiltonian approach includes just the effect of the geopotential, we validate our results by performing a numerical integration in Cartesian variables of a more complete model including the gravitational attraction of Sun and Moon, as well as the solar radiation pressure.

Presentation of the results obtained in 2016

Objective 1/2016. *Nonlinear problems in mechanics*

Let us first recall that

$$\text{polyconvexity} \quad \Longrightarrow \quad \text{quasiconvexity} \quad \Longrightarrow \quad \text{rank-one convexity}$$

hold for arbitrary dimension n. However, it is also known that rank-one convexity does not imply polyconvexity in general, and that for $n > 2$ rank-one convexity does not imply quasiconvexity. The question whether rank-one convexity implies quasiconvexity in the two-dimensional case is considered to be one of the major open problems in the calculus of variations. Morrey conjectured in 1952 that the two are not equivalent, i.e. that there exists a function $W : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$ which is rank-one convex but not quasiconvex. There are some cases for which the two convexity conditions are, in fact, equivalent (see the works of Müller and Ball).

In this spirit, in [L3] we present a new condition under which rank-one convexity implies polyconvexity (and thus quasiconvexity). We show that any function $W : \mathrm{GL}^+(2) \to \mathbb{R}$ which is isotropic and objective (i.e. bi-SO(2)-invariant) as well as *isochoric* is rank-one convex if and only if it is polyconvex. Using this general result, we have shown that, for $n = 2$, an energy which belongs to the family of exponentiated Hencky energies is rank-one convex if and only it is polyconvex.

The necessity of finding an ellipticity domain for the isotropic invariant $\|\operatorname{dev}_n \log U\|^2$ of the logarithmic strain tensor $\log U$ arises from the observation that the isochoric part $\mu\,\|\operatorname{dev}_n \log U\|^2$ of the quadratic Hencky energy is not rank-one convex even in $\mathrm{SL}(n)$ for $n = 2, 3$. It is easy to show that a given hyperelastic formulation is not rank-one convex. In general, it is also clear that there exists a neighborhood of the identity tensor where the formulation is Legendre-Hadamard elliptic (LH-elliptic). What is difficult, however, is to precisely describe the maximal domain of ellipticity. Although, in [L4] we were able to numerically determine the maximal ellipticity domain for $\|\operatorname{dev}_n \log U\|^2$. We choose an intermediary way in that we analytically describe a large set in which the energy is LH–elliptic. The numerically obtained visualization indicates that this subset, expressed in terms of certain transformations of the principal stretches, is in fact the ellipse inscribed in the maximal ellipticity domain.

It is well known that the ellipticity problem is related to the wave propagation phenomena. Rayleigh surface waves propagation problem finds its principal application in the interpretation of ground motions due to earthquakes or explosions. Also, many other applications have been found in the industrial world (electronic components, soil dynamics, filters and sensors, resonators, detectors, etc.). In [L5] we discuss the thermal and the memory effects upon the propagation of Rayleigh surface waves in a half-space filled by an exponentially functionally graded thermoviscoelastic material with voids. Therefore, using an idea of Destrade (2007), we consider that the characteristic coefficients and the mass density are exponentially varying with depth. The presence of the dissipation energy implies that the wave solutions have to decay to zero when the time tends to infinity. We take into consideration the dissipative character of the porous thermoviscoelastic models upon the propagation waves and study the damped in time wave solutions. The propagation condition is established in the form of an algebraic ten degree equation whose coefficients are complex numbers. The eigensolutions of the dynamical system are explicitly obtained in terms of the characteristic solutions. The concerned solution of the Rayleigh surface wave problem is expressed as a linear combination of the five analytical solutions, while the secular equation is established in an implicit form. The results are illustrated for the case of an isotropic and inhomogeneous thermoviscoelastic with voids half-space. The explicit secular equation is obtained for an isotropic and homogeneous thermoviscoelastic porous half-space and some numerical simulations are given for a specific material.

In [L6] we consider the possibility to obtain different types of majorization, concepts which are useful in the study of ellipticity from nonlinear mechanics. This possibility is related to the procedure of minimizing some perturbed energies/functionals. Some connections with relative convexity via a generalized Jensen's inequality are established. Let us consider $x = (x_1, ..., x_N)$ and $y = (y_1, ..., y_N)$ be two vectors in $\mathbb{R}^N$. We relate the perturbed minimizers via classical majorization inequalities and we obtain a nice extension of Hardy-Littlewood-Polya's inequality into this context: Let $\alpha \geq 0$ and $x, y \in \mathbb{R}^N_+$ be two vectors such that $x \prec_\alpha y$. Then for each convex function $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ we have that

$$\frac{f(x_1) + ... + f(x_N)}{N} \leq \frac{1}{1+\alpha}\frac{f(y_1) + ... + f(y_N)}{N} + \frac{\alpha}{1+\alpha} f(0). \tag{1}$$

Moreover, we present a generalized Hardy-Littlewood-Polya's inequality version for α-majorization, which use the notion of point of convexity notion: Let us consider $\alpha \geq 0$ and $x = (x_1, ..., x_N) \in \mathbb{R}^N_+$, where $x_1, ..., x_N$ are points of convexity for the increasing function $f : I \to \mathbb{R}$. Then for each

$y = (y_1, ..., y_N)$ with the property that $x \prec_\alpha y$ we have that $\sum_{i=1}^{N} f(x_i) \leq \sum_{i=1}^{N} f(y_i)$. The final part of the paper is devoted to the posibility of considering the above new majorization concept in the spaces with curved geometry, by using some ideas from a previous joint work with C.P. Niculescu.

Objective 2/2016. *The study of Euler equations and of hybrid interaction systems*

The motion of a layer of incompressible, irrotational, perfect fluid flowing through a canal is governed by the Euler system system with free boundary. In many applications this model raises a significant number of difficulties from both a theoretical and a numerical point of view. This is the reason why approximate models have been established, each of them dealing with some particular physical regimes. The Boussinesq regime deals with small amplitude, long wavelength water waves. Back in 2002, Bona, Chen and Saut derived the following system of PDEs which deal with water waves that fit into the Boussinesq regime:

$$\begin{cases} (I - \varepsilon b\Delta)\, \partial_t \eta + (I + \varepsilon a\Delta)\, \mathrm{div}\, V + \varepsilon\, \mathrm{div}\, (\eta V) = 0, \\ (I - \varepsilon d\Delta)\, \partial_t V + (I + \varepsilon c\Delta)\, \nabla \eta + \frac{\varepsilon}{2} \nabla |V|^2 = 0. \end{cases} \tag{2}$$

The variable η is an approximation of the deviation of the free surface of the water from the rest state while V is an approximation of the fluid velocity while the real numbers a, b, c, d, ε are modeling parameters. The parameter ε characterizes the Boussinesq regime and it is supposed to be small i.e. $\varepsilon \ll 1$. Recalling that systems (2) are in fact approximations of the full Euler system, they are reliable from a practical point of view only on large time scales (that is of formal order ε^{-1} when the dispersive and nonlinear effects will have an order one contribution to the wave's evolution). Thus, the long time existence problem consists in constructing solutions to (2) for which one may find a lower bound of order ε^{-1} on the time of existence. In [L7] we generalized some of the previous results by implementing an energy method applied for spectrally localized equations. In particular, we managed to lower the regularity assumptions needed in order to develop the l.t.e theory. Moreover, as opposed to other works our approach allows us to treat in a unified manner most of the cases given by different values of the a, b, c, d parameters.

The systems (2) are reliable from a practical point of view only on large time scales (that is of formal order ε^{-1} when the dispersive and nonlinear effects will have an order one contribution to the wave's evolution). It is for this reason that people considered the so-called long time existence problem which consists in constructing solutions to (2) for which one may find a lower bound of order ε^{-1} on the time of existence. All the above results are established for initial data that lie in L^2-based Sobolev spaces with regularity index $s > \frac{n}{2} + 1$ where n is the space dimension. As it is well-known, functions drawn from these spaces vanish at infinity. Bores are a special kind of water waves that are modeled by functions that admit non-trivial behavior at infinity. Thus, the long time existence results previously mentioned are not adapted to the study of bore propagation. In [L8], we propose both a $1D$ and $2D$ functional framework in order to study the Cauchy problem associated to (2) with $a = c = 0$ such that we may consider bore type initial data. More precisely, in the 1-dimensional case, we might consider general disturbances modeled by continuous functions[1] η_0^{1D} such that: $\lim_{x \to \pm\infty} \eta_0^{1D}(x) = \eta_\pm$. In the two dimensional setting, the situation in view is that of a $2D$ perturbation of the essentially 1-dimensional situation, i.e. we consider:

$$\begin{cases} \eta_0^{2D}(x, y) = \eta_0^{1D}(x) + \phi(x, y)\,, \\ V_0^{2D}(x, y) = \left(u_0^{1D}(x) + \psi_1(x, y)\,, \psi_2(x, y)\right) \end{cases}$$

[1] with some extra regularity on its derivative

where we ask

$$\lim_{|(x,y)|\to\infty} |\phi(x,y)| = 0 \text{ and } \lim_{|(x,y)|\to\infty} |\psi_i(x,y)| = 0 \text{ for } i = 1,2.$$

Let us point out that in some sense, the change of the functional setting in order to study bore propagation corresponds in solving a Neumann problem. The method of proof relies on Littlewood-Paley theory and a special low-high frequency splitting of the initial data and the results are applicable (eventual after a reinterpretation of the involving quantities) in the study of hybrid interaction systems.

In [L9], we consider a finite-differences semi-discrete scheme for the approximation of boundary controls for the one-dimensional wave equation. The high frequency numerical spurious oscillations lead to a loss of the uniform (with respect to the mesh-size) controllability property of the semi-discrete model in the natural setting. We prove that, by filtering the high frequencies of the initial data in an optimal range, we restore the uniform controllability property. Moreover, we obtain a relation between the range of filtration and the minimal time of control needed to ensure the uniform controllability, recovering in many cases the usual minimal time to control the (continuous) wave equation. Let $N \in \mathbb{N}^*$ and $h = \frac{1}{N+1}$. For $T > 0$, we consider the following semi-discrete space approximation of the wave equation by the explicit finite-differences method:

$$\begin{cases} u_j''(t) - \frac{u_{j+1}(t)-2u_j(t)+u_{j-1}(t)}{h^2} = 0 & 1 \le j \le N,\ t > 0, \\ u_0(t) = 0 & t \in (0,T), \\ u_{N+1}(t) = v_h(t) & t \in (0,T), \\ u_j(0) = u_j^0, \quad u_j'(0) = u_j^1 & 1 \le j \le N. \end{cases} \tag{3}$$

Given $T \ge 2$, $h > 0$ and $((u_j^0, u_j^1))_{1\le j\le N} \in \mathbb{C}^{2N}$, we study the existence of a control function $v_h \in C^0([0,T])$ such that the solution of the equation (3) verifies

$$u_j(T) = u_j'(T) = 0 \qquad (j = 1,2,...,N).$$

We study the existence of a uniformly bounded sequence of controls $(v_h)_{h>0}$ with respect to the mesh size h. Our main result is the following: Let $(u^0,u^1) \in L^2((0,1),\mathbb{C}) \times H^{-1}((0,1),\mathbb{C})$ and let $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ be an increasing function (which corresponds to the filtering function of the modes) verifying $f(N) \leqslant N$ for every $n \in \mathbb{N}^*$ and $f(N) \to \infty$ as $N \to \infty$. We denote by

$$\Gamma(f) := \limsup_{N\to\infty} \frac{f(N)}{N} \in [0,1]. \tag{4}$$

Then, for any $T > \frac{2}{1-\sin\left(\frac{\pi\Gamma(f)}{2}\right)}$, there exists a control $v_h \in C^0([0,T],\mathbb{C})$ bringing the solution of (3) (with initial condition U_h^0) to (0,0) such that the sequence $(v_h)_{h>0}$ is bounded in $C^0([0,T],\mathbb{C})$. We improve the results from *Micu, S., Uniform boundary controllability of a semi–discrete 1–D wave equation, Numer. Math., 91 (2002), 723-768.* Moreover, we obtain a precise estimate on the minimal time needed that turns out to be optimal as soon as we filter enough frequencies. For example, if $f(N) = o(N)$ (this is notably the case if $f(N) = N^\alpha$ with $\alpha \in (0,1)$), then $\Gamma(f) = 0$, and in this case, we obtain the uniform controllability for any time $T > 2$, which is the minimal time needed to control the corresponding continuous system. Note that this result is sharp, because it is well-known that one cannot choose $\Gamma(f) = 1$, in this case the controls might explode exponentially when h goes to 0.

Objective 3/2016. *Hamiltonian methods applied in the study of dynamics of mechanical systems*

Related to this objective, in papers [L10] and [L12] we have used the Hamiltonian formalism in order to investigate the resonance dynamics in the space debris problem. Moreover, in [L11] we have investigated the dissipate effects caused by the Poynting–Robertson drag and solar wind. We proved that the interplay between various perturbing forces has as effect a complex dynamics of space debris; A detailed analysis underpinned by Hamiltonian methods and tools reveal the existence of various dynamical phenomena like: bifurcation of equilibria, overlapping of resonances, variation of amplitude of resonances, chaos etc. These phenomena explain the observed long-term evolution of the debris' orbital elements.

Before entering details, it is important to note that since humankind started the conquest of space, a number of debris accumulated and now populate the sky, from the near atmosphere to the geostationary region. Such debris, whose size runs from a few millimeters to several centimeters, are remnants of spacecraft explosions or collisions, non-operative satellites, rocket upper stages, etc. Current estimates show that there exist about $3 \cdot 10^8$ objects with size larger than 1 mm and about $3.5 \cdot 10^5$ objects larger than 1 cm. The impact of such debris with operative spacecraft or satellites could result in a dangerous or even dramatic situation; the accumulation of debris in specific regions of the sky - where most of operative satellites are positioned - cannot be neglected anymore. Understanding the dynamics and evolution of space debris is essential for maintenance and control strategies, as well as to assess mitigation procedures.

In paper [L10], by using bifurcation theory, we studied the secular resonances induced by the Sun and Moon on space debris orbits around the Earth. In particular, we concentrated on a special class of secular resonances, which depend only on the debris' orbital inclination. This class is typically subdivided into three distinct types of secular resonances: those occurring at the critical inclination, those corresponding to polar orbits, and a third type resulting from a linear combination of the rates of variation of the argument of perigee and the longitude of the ascending node. The model describing the dynamics of space debris includes the effects of the geopotential, as well as the Sun's and Moon's attractions, and it is defined in terms of suitable action-angle variables. We considered the system averaged over both the mean anomaly of the debris and those of the Sun and Moon. Such multiply-averaged Hamiltonian was used to study the lunisolar resonances which depend just on the inclination. Borrowing the technique from the theory of bifurcations of Hamiltonian normal forms, we studied the birth of periodic orbits and we determined the energy thresholds at which the bifurcations of lunisolar secular resonances take place. This approach gave us physically relevant information on the existence and location of the equilibria, which helped us to identify stable and unstable regions in the phase space. Besides their physical interest, the study of inclination dependent resonances offers interesting insights from the dynamical point of view, since it sheds light on different phenomena related to bifurcation theory.

In paper [L11] we analyzed the combined effect of Poynting-Robertson and solar wind drag on space debris. We derived a model within Cartesian, Gaussian and Hamiltonian frameworks. We focused on the geosynchronous resonance, although the results can be easily generalized to any resonance in MEO and in regions located outside the geostationary ring. By numerical and analytical techniques, we computed the drift in semi-major axis due to Poynting-Robertson and solar wind drag. After a linear stability analysis of the equilibria, we combined a careful investigation of the regular, resonant, chaotic behavior of the phase space with a long-term propagation of a sample of initial conditions. The results strongly depend on the value of the area-to-mass ratio of the debris, which might show different dynamical behaviors: temporary capture or escape from the geosynchronous resonance, as well as temporary capture or escape from secondary resonances involving the rate of variation of the longitude of the Sun. Such analysis shows that Poynting-Robertson and solar wind drag must be taken into account, when looking at the long-term behavior of space debris. Trapping or escape from the resonance can be used to place the debris in convenient regions of the phase space.

Paper [L12] investigates the dynamics of secular resonances. In particular, we concentrated our attention on the lunisolar secular resonance described by the relation $2\dot{\omega} + \dot{\Omega} = 0$, where ω and Ω denote the argument of perigee and the longitude of the ascending node of the space debris. This resonance is very important in understanding the long–term evolution of GNSS constellations (global navigation satellite systems). We introduced three different models with increasing complexity. We show that the growth in eccentricity, as observed in space debris located in the MEO region at the inclination about equal to 56°, can be explained as a natural effect of the secular resonance $2\dot{\omega} + \dot{\Omega} = 0$, while the chaotic variations of the orbital parameters are the result of interaction and overlapping of nearby resonances.

Project manager,

Dr. Ionel-Dumitrel Ghiba