Universitatea “Al. I. Cuza” Iaşi

Facultatea de Matematică

Teză de doctorat

Stabilizarea ecuaţiilor Navier-Stokes

Coordonator ştiinţific:
Acad. Viorel Barbu

Doctorand:
Ionuţ Munteanu

Iaşi
2012

Cuprins

Prefaţă

Curgerea fluidelor este unul dintre cele mai importante fenomene fizice studiate de către cercetători, datorită numeroaselor aplicaţii în viaţa de zi cu zi. Mecanica fluidelor vâscoase este ramura Fizicii care se ocupă cu studiul fluidelor la care apar forţe de frecare între diferitele straturi de fluid aflate în mişcare. Principalele mărimi caracteristice ale fluidelor vâscoase sunt: *coeficientul de vâscozitate* (notat cu simbolul ν) şi *numărul lui Reynolds* (notat cu simbolul Re). Coeficientul de vâscozitate a fost introdus în urma măsurătorilor experimentale care arată că forţa de frecare dintre două straturi de fluid vecine este proporţională cu gradientul viteză şi cu suprafaţa comună a acestora. Coeficientul de proporţionalitate fiind tocmai coeficientul de vâscozitate. Numărul lui Reynolds a fost introdus cu scopul de a caracteriza tipul de curgere al unui fluid, care poate să fie de două feluri: *laminară* şi *turbulentă*. De exemplu, curgerea laminară a unui fluid vâscos între două plăci plane şi paralele presupune faptul că diferitele straturi de fluid, ce se pun în mişcare, sunt nişte plane orizontale ce rămân paralele între ele, fără amestecul particulelor componente diferitelor straturi. În caz contrar, mişcarea este turbulentă. Experimentele arată că, în cazul curgerii unui fluid, există o valoare critică (notată Re_{cr}) a numărului lui Reynolds, cu proprietatea că: pentru $Re < Re_{cr}$, curgerea este laminară; pentru $Re > Re_{cr}$, curgerea este turbulentă; iar pentru $Re = Re_{cr}$, se face trecerea de la un regim la altul.

Ecuaţiile care guvernează mişcarea unui fluid sunt celebrele ecuaţii Navier-Stokes (numite aşa după fizicianul francez Claude-Louis Navier şi matematicianul irlandez George Gabriel Stokes). Aceste ecuaţii au luat naştere prin aplicarea legii a doua a lui Newton, la mişcarea fluidelor, împreună cu ipoteza că tensiunea fluidului este proporţională cu gradientul vitezei (fluid Newtonian), la care se adaugă gradientul presiunii. Ecuaţiile Navier-Stokes sunt folosite în modelarea multor domenii ale mecanicii fluidelor, cum ar fi: mişcarea curenţilor atmosferici (previziunile meteorologice), ai curenţilor oceanici, curgerea fluidelor prin tuburi, curgerea aerului în jurul unei aripi de avion, pentru mişcarea din interiorul stelelor, mişcarea galaxiilor, curgerea sângelui prin vene, etc.. Cuplate cu ecuaţiile lui Maxwell, ele pot fi folosite la modelarea şi studiul magnetohidrodinamicii (curgerea fluidelor conductoare electric, sub acţiunea unui câmp magnetic), cum ar fi: zborurile supersonice, răcirea, propulsia, etc.. Pentru o introducere în subiectul ecuaţiilor Navier-Stokes se pot consulta lucrările TEMAM [81] şi CONSTANTIN şi FOIAŞ [28].

Turbulenţa este componenta haotică, dependentă de timp, observată în curgerea fluidelor. Se crede că aceasta se datorează inerţiei fluidului, considerat ca un tot. Acolo unde efectele inerţiale ale unui fluid sunt mici, curgerea lui tinde spre o curgere laminară. De asemenea, se crede că ecuaţiile Navier-Stokes descriu corect curgerea turbulentă. Un instrument principal folosit pentru a atenua sau chiar elimina turbulenţele este *stabilizarea ecuaţiilor Navier-Stokes*, cu comenzi în formă *feedback* la frontieră sau distribuite intern.

Controlul este în formă feedback înseamnă de fapt că, în orice moment t, acesta este definit de câmpul vitezelor fluidului, considerat în acelaşi moment t. Prin urmare, controlul poate reacţiona la fluctuaţii imprevizibile ale câmpului vitezelor, suprimând influenţa lor negativă asupra fluxului fluidului. Prima lucrare în care este adresată direct problema stabilizării unui fluid este rezultatul lui CORON [32], asupra stabilizării asimptotice a originii pentru ecuaţiile Euler doi-dimensionale într-un domeniu mărginit, simplu-conex, cu comenzi feedback ce acţionează pe bucăţi oricât de mici, nevide şi deschise, ale frontierei. În lucrarea de faţă, studiem, de asemenea, problema stabilizării feedback exponenţiale a curgerii unui fluid, propunând metode noi de obţinere a comenzilor feedback stabilizante şi legi noi ce le definesc, îmbunătăţind rezultatele de stabilizare deja existente în literatură.

În primul capitol, studiem curgerea unui fluid printr-un canal doi-dimensional şi trei-dimensional. Acest subiect a fost intens studiat în literatură, datorită aplicaţiilor sale numeroase. În prima secţiune, adresăm problema stabilizării feedback normale a profilului parabolic Poiseuille, a curgerii unui fluid incompresibil într-un canal dreptunghiular semi-infinit. Primele rezultate în legătură cu acest subiect au fost de natură numerică şi au confirmat rezultatele experimentale amintite mai sus, şi anume: pentru valori mari ale numărului lui Reynolds, curgerea fluidului devine haotică. ROZHDESTVENSKY şi SIMAKIN [76], folosind algoritmi de calcul eficienţi, reuşesc să simuleze dinamica, în intervale mari de timp, a acestor tipuri de fluxuri, evidenţiind comportarea turbulentă a fluidului. JIMÉNEZ [50] reuşeste să elucideze, prin simulări numerice, cum afectează numărul Reynolds trecerea fluxului Poiseuille de la o curgere laminară la un comportament haotic, turbulent. FORTIN et al. [41] propun o abordare din punctul de vedere al sistemelor dinamice şi a teoriei bifurcaţiei Hopf, şi, la fel ca şi Jiménez, constată influenţa numărului Reynolds asupra tipului de curgere a fluidului. Primele rezultate importante, în legătură cu stabilizarea feedback a unui fluid doi-dimensional printr-un canal, au fost obţiunte de SPEYER şi colaboratorii săi. În lucrările [34] şi [52], Speyer investighează cazul unui fluid printr-un canal, ce dezvoltă doar turbulenţe aproape de perete. Sunt folosite tehnicile de reducere a modelului şi teoria controlului optimal cu funcţionale liniar-pătratice Gaussiene, pentru a obţine comenzi feedback robuste, din liniarizatul ecuaţiei Navier-Stokes, în două dimensiuni. În lucrarea [51], Speyer şi colaboratorii săi reuşesc să obţină scheme mai simple pentru determinarea controlului, bazându-se pe localizarea zerourilor sistemului fluid şi a polilor acestuia. Alte rezultate notabile, bazate pe metoda controlului optimal, au fost obţinute de BEWELEY şi colaboratorii săi în [24, 23, 26, 25]. În 2001, BALOGH, LIU şi KRSTIČ [3] construiesc comenzi feedback stabilizante, uşor de implementat numeric, cu acţiune doar pe peretele superior asupra componentei tangenţiale şi a celei normale a câmpului vitezelor. Metoda lor se bazează pe tehnici de tip Lyapunov şi pe metoda lui Galerkin. În 2007, KRSTIČ şi VAZQUEZ [85] reuşesc să îmbunătăţească acest rezultat, obţinând soluţii explicite pentru sistemul cu buclă închisă. Este pentru prima oară când se obţin formule explicite ale soluţiilor ecuaţiei liniarizate Navier-Stokes într-un canal. Aceasta fiind posibilă datorită construcţiei particulare a comenzilor feedback, ce acţionează asupra componentelor tangenţiale şi normale ale vitezei, folosind metoda *backstepping*, introdusă în 1990 de KOKOTOVIC [54]. Din păcate, ambele rezultate [3] şi [85] garantează stabilitatea doar pentru valori mici ale numărului Reynolds. De asemenea, controlul acţionează şi asupra componentei tangenţiale, ceea ce, în practică, este greu de realizat. Oricum, studiile lui GLEZER [79], asupra jeturilor sintetice, arată că acest tip de control este tehnologic posibil. Glezer demonstrează că o pereche de jeturi sintetice poate atinge un unghi de $85°$ de la direcţia normală, în acelaşi moment cu acţiunea controlului normal. Din punct de vedere practic, ideală ar fi construcţia unui control feedback stabilizant normal, la frontieră. Principala dificultate a stabilizării normale la frontieră o reprezintă reducerea presiunii din sistem. BARBU [14] şi TRIGGIANI [83] propun două metode diferite în acest sens, obţinând rezultate de stabilizare normală, independente de valoarea numărului lui Reynolds. În [14] presiunea este redusă via descompunerii în moduri Fourier, în timp ce, în [83] presiunea este redusă din sistem prin aplicarea *rotorului.* În lucrarea de faţă, ne propunem să îmbunătăţim rezultatele prezentate mai sus. Obţinem stabilizarea exponenţială a profilului Poiseuille, pentru ecuaţia liniarizată, printr-un control feedback, liniar, finit-dimensional, uşor de manevrat din punct de vedere numeric, ce acţionează doar asupra componentei normale a câmpului vitezelor, doar pe peretele $y = 1$, cu stabilitate garantată indiferent de valoarea numărului lui Reynolds. Reducem presiunea folosind aceeaşi metodă introdusă de BARBU [14], adică: descompunem liniarizatul Navier-Stokes într-un canal, via seriile Fourier, după care eliminăm presiunea prin sumarea celor două ecuaţii, prima derivată în raport cu y şi cea de-a doua înmulţită cu ik. Rezultă astfel un sistem parabolic infinit, decuplat. Din acest motiv, stabilizarea se realizează pe fiecare nivel în parte. Tehnica de obţinere a controlului feedback stabilizant este complet diferită de cea din [14]. De asemenea, dacă în [14] controlul acţionează asupra componentei normale a vitezei pe ambii pereţi, aici controlul acţionează normal, doar pe un perete. În linii mari, tehnica utilizată este următoarea: folosind aplicaţia Dirichlet, transformăm problema de control la frontieră într-o problemă de control intern, căreia îi aplicăm metoda de stabilizare spectrală dezvoltată de BARBU şi TRIGGIANI [10]. Pe scurt, sistemul controlat intern se descompune în două: partea stabilă şi cea instabilă. Sistemului instabil, fiind finit-dimensional, îi aplicăm metode de stabilizare clasice din teoria sistemelor liniare controlate, finit-dimensionale. Forma feedback a controlului este obţinută via o problemă de minimizare a unei funcţionale de cost pătratice. Aşadar, în forma controlului feedback, intervin operatori liniari, auto-adjuncţi, ce satisfac ecuaţii Riccati, uşor de manipulat din punct de vedere numeric, deoarece sunt asociate cu probleme de control la frontieră, parabolice, pe intervalul $(0, 1)$, a căror structură este identică pentru diferite valori ale modurilor Fourier. Conţinutul acestei secţiuni reprezintă contribuţii originale ale autorului cuprinse în lucrarea [66].

Rezultatele de stabilizare prezentate mai sus sunt valabile pentru liniarizatul sistemului Navier-Stokes într-un canal. RAYMOND [75] obţine un rezultat de stabilizare locală a sistemului neliniar Navier-Stokes, rezolvând o problemă de control liniar-pătratică şi folosind proiectorii Helmoholtz. Pe acelaşi subiect, BAKER et al. [2] propun un control neliniar, bazat pe metoda reducerii modelului. În cea de-a doua secţiune, folosind idei asemănătoare cu cele din prima parte a capitolului, construim un control feedback, stabilizant pentru liniarizat, ce acţionează, de această dată, doar asupra componentei tangenţiale a câmpului vitezelor, pe peretele superior. Datorită condiţiilor tangenţiale la frontieră, reuşim să demonstrăm că feedback-ul propus asigură şi stabilitatea locală a sistemului neliniar Navier-Stokes într-un canal, folosind ideile dezvoltate în BARBU, TRIGGIANI şi LASIECKA [13], [12]. Conţinutul acestei secţiuni se bazează pe lucrarea [65] a autorului.

În cea de-a treia secţiune, tratăm subiectul stabilizării profilului Poiseuille pentru curgerea unui fluid trei-dimensional, periodic în raport cu două coordonate, într-un canal.

Aşa cum anunţaseră în [85], COCHRAN, VAZQUEZ şi KRSTIČ [27] extind rezultatul de stabilizare, obţinut în cazul fluidului doi-dimensional, la cazul canalului trei-dimensional. Controlul stabilizant propus acţionează asupra tuturor celor trei componente ale câmpului vitezelor, pe peretele superior. Stabilitatea fiind garantată tot doar pentru valori mici ale numărului lui Reynolds. Lucrarea lui RAYMOND [75], amintită mai sus, oferă un rezultat de stabilizare şi în cazul fluidului trei-dimensional, însă, de data aceasta, doar pentru liniarizat. În lucrarea de faţă, construim un control feedback stabilizant, liniar, finit-dimensional, ce acţionează tot doar asupra componentei normale a vitezei, pe peretele $y = 1$, cu stabilitatea liniarizatului garantată indiferent de valoarea numărul lui Reynolds. Metoda folosită este asemănătoare cu cea din prima secţiune, cu câteva modificări datorate cadrului trei-dimensional. Rezultatele de stabilizare, pentru cazul canalului trei-dimensional, au fost stabilite de către autor în lucrarea [67].

În ultima secţiune, considerăm cazul unui fluid conductibil electric, printr-un canal doi dimensional (respectiv trei-dimensional), asupra căruia acţionează, din exterior, un câmp magnetic transversal. Acest tip de flux a fost pentru prima dată studiat experimental şi teoretic de către HARTMANN [46]. Vom considera fluidul cu un număr Reynolds magnetic mic. Astfel, ecuaţiile ce guvernează mişcarea sunt o combinaţie între ecuaţiile Navier-Stokes şi ecuaţiile Inducţiei Magnetice, derivate din ecuaţiile lui Maxwell. După cum se va vedea, aceste ecuaţii sunt perturbaţii liniare ale ecuaţiilor Navier-Stokes într-un canal. Prin urmare, este de aşteptat ca, făcând ajustările necesare, să se obţină rezultate de stabilizare asemănătoare cu cele prezentate mai sus. Într-adevăr, urmărind ideile din [3], SCHUSTER, LUO şi KRSTIČ [77] obţin un rezultat de stabilizare pentru acest tip de flux, în două dimensiuni. Pentru cazul trei-dimensional, LUO şi SCHUSTER [64] demonstrează stabilitatea folosind doar comenzi asupra potenţialului electric, pe ambii pereţi. În sfârşit, VAZQUEZ, SCHUSTER şi KRSTIČ [92], [87] propun comenzi stabilizante, prin metoda backstepping. În lucrarea de faţă, bazându-ne pe rezultatele din primele trei secţiuni, construim controale feedback normale, liniare, stabilizante, finit-dimensionale pentru ambele cazuri ale fluidului conductibil electric într-un canal doi-dimensional, respectiv trei-diemnsional. Din nou, trebuie precizat că, spre deosebire de rezultatele lui Krstic şi a colaboratorilor săi [77, 64, 92, 87], stabilizarea normală obţinută este independentă de numărul lui Reynolds.

La finalul acestei secţiuni, studiem şi problema construirii unui *Observator* pentru curgerea unui fluid conductibil electric doi-dimensional, într-un canal (ideile prezentate pot fi extinse foarte uşor şi pentru cazul trei-dimensional). Construcţia unui Observator este un subiect foarte important din punctul de vedere al implemetării numerice, deoarece, în marea majoritate a cazurilor practice, starea fizică internă a unui sistem nu poate fi determinată prin observaţii directe. În schimb, efecte indirecte ale stării interne sunt observate analizând output-ul sistemului. De exemplu, în cazul curgerii fluidului într-un canal, se observă doar comportarea fluxului pe pereţi, trăgându-se astfel concluzii asupra comportării acestuia, în interiorul canalului. Pentru cazul unui fluid printr-un canal doi-dimensional, VAZQUEZ şi KRSTIČ [84] propun construcţia unui Observator folosind metoda backstepping şi ideile din [85]. Pentru cazul unui fluid conductibil electric printr-un canal trei-dimensional, VAZQUEZ, SCHUSTER şi KRSTIČ [86] folosesc aceeaşi metodă backstepping şi ideile din [87] pentru a găsi un Observator. În lucrarea de faţă, construim un Observator bazându-ne pe rezultatele obţinute la începutul acestei secţiuni. Observatorul constă dintr-o copie a liniarizatului ecuaţiilor, ce guvernează mişcarea, combinată cu o injecţie a estimării erorii output-ului componentei normale a vitezei, pe peretele necontrolat. Conţinutul acestei secţiuni se bazează pe rezultatele originale obţinute de către autor în lucrarea [70].

Cel de-al doilea capitol adresează problema stabilizării interne a soluţiilor staţionare ale ecuaţiilor Navier-Stokes, într-un domeniu deschis şi mărginit. Cel mai important rezultat în acest sens a fost dedus de BARBU şi TRIGGIANI [10] (vezi şi [8]), unde se obţine stabilizarea prin controale finit-dimensionale, distribuite intern într-o submulţime deschisă, oricât de mică. Metoda spectrală folosită se bazează pe proprietatea de unică continuare a autofuncţiilor operatorului Oseen-Stokes (pentru mai multe detalii vezi [19]). LEFTER [58] a obţinut un rezultat de stabilizare, similar cu acesta, pentru ecuaţiile Navier-Stokes în două dimensiuni, cu condiţii de alunecare la frontieră de tip Navier. BARBU şi LEFTER [9] propun un control stabilizant proporţional pentru ecuaţiile Navier-Stokes cu condiţii de alunecare la frontieră de tip rotor. Alte rezultate de stabilizare, bazate pe sisteme extinse, se găsesc în lucrarea BEDRA [22]. Pentru mai multe detalii despre stabilizarea ecuaţiilor Navier-Stokes poate fi consultată monografia [16]. BARBU, RODRIGUES şi SHIRIKYAN [18] obţin un rezultat de stabilizare pentru cazul soluţiilor nestaţionare ale ecuatiilor Navier-Stokes. Trebuie amintită şi legătura strânsă între stabilizarea internă şi controlabilitatea exactă locală (obţinută de FURSIKOV şi IMANUVILOV [43] şi IMANUVILOV [49]), deoarece controlabilitatea exactă implică stabilizarea prin comenzi cu buclă deschisă. Rezultate semnificative în această direcţie pot fi găsite în cartea scrisă de CORON [33]. În lucrarea de faţă, construim un control feedback stabilizant, finit-dimensional, neliniar pentru soluţiile staţionare ale ecuaţiilor Navier-Stokes. Pe lângă faptul că controlul are o formă precisă, acesta asigură şi un tip de controlabilitate exactă, pe spaţiul modurilor stabile. Mai exact, controlul feedback propus duce data iniţială în spaţiul modurilor stabile, în timp finit. Acest rezultat de controlabilitate exactă este în legătură cu cel obţinut de SHIRIKYAN [78], diferind de acesta prin tehnica folosită. Rezultatele incluse în acest capitol sunt rezultate originale ale autorului obţinute împreună cu V. Barbu în lucrarea [71].

Cel de-al treilea capitol tratează problema găsirii unui control ce stabilizează, nu o singură soluţie staţionară, ci o familie de soluţii staţionare. Din câte ştim, această problemă este nouă şi nu există rezultate pe acest subiect în literatură. Ea a provenit de la următoarea observaţie: când se consideră stabilizarea unui sistem controlat, mai întâi se caută o soluţie particulară (staţionară sau nestaţionară), după care, aplicând diferite tehnici, se construieşte un control ce o stabilizează. Dacă vom considera acum altă soluţie particulară a aceluiaşi sistem, controlul găsit anterior nu mai asigură, în general, stabilitatea acesteia. Se pune problema determinării unui control care, odată introdus în sistem, asigură stabilitatea unei familii de soluţii particulare. Metoda de obţinere a acestui tip de control o aplicăm sistemului Navier-Stokes, controlat intern, deoarece acesta este subiectul lucrări de faţă. Însă, se poate observa cu uşurinţă că aceeaşi metodă poate fi aplicată şi altor tipuri de sisteme controlate. Conţinutul acestui capitol a fost publicat de către autor în lucrarea [69].

Lucrarea se încheie cu un Apendix ce conţine o incursiune rapidă în principalele noţiuni şi rezultate teoretice, utilizate de-a lungul prezentării.

Doresc să mulţumesc, în mod deosebit, domnului Academician Viorel Barbu pentru faptul că a acceptat să fie îndrumătorul primilor paşi realizaţi în cercetarea matematică. Îi mulţumesc pentru tema interesantă şi de actualitate propusă, dar mai ales pentru modul în care m-a ghidat în tainele matematicii şi pentru încrederea inspirată în fiecare din etapele elaborării acestei lucrări. De asemenea, doresc să îi mulţumesc şi pentru faptul că mi-a oferit şansa să lucrez într-un cadru prielnic cercetării oferit de Institutul de Matemtică "Octav Mayer" al Academiei Române.

Mulţumesc colectivului de profesori din cadrul Facultăţii de Matematică a Universităţii "Alexandru Ioan Cuza" din Iaşi, în mod special domnului Prof. Dr. Cătălin Lefter pentru sprijinul şi sfaturile oferite.

În realizarea acestei lucrări, autorul a beneficiat de suportul oferit de Ministerul Educaţiei şi Cercetării prin granturile:

- POSDRU/88/1.5/S/47646 - director de proiect Prof. dr. O. Iancu
- PN-II-IDEI-ID-70/2008 - director de proiect CS I G. Marinoschi
- PN-II-PCE-2011-3-0027 - director de proiect Acad. V. Barbu

Capitolul 1

Stabilizarea ecuaţiilor Navier-Stokes într-un canal

În acest capitol, vom studia modelul matematic ce descrie curgerea unui fluid Newtonian, incompresibil, printr-un canal semi-infinit, doi-dimensional

$$(x, y) \in (-\infty, +\infty) \times (0, 1),$$

respectiv trei-dimensional

$$(x, y, z) \in (-\infty, +\infty) \times (0, 1) \times (-\infty, +\infty).$$

Considerăm două cazuri, mai precis: în primele trei secţiuni vom presupune că fluidul nu este supus nici unei influenţe magnetice exterioare, în timp ce, în cea de-a patra secţiune, vom presupune că asupra fluidului se exercită un câmp magnetic exterior, transversal faţă de axa canalului. Ecuaţiile ce guvernează mişcarea sunt ecuaţiile Navier-Stokes, respectiv ecuaţiile magnetohidrodinamicii, adică ecuaţiile Navier-Stokes combinate cu ecuaţiile lui Maxwell.

Cercetările experimentale arată că, pentru valori mari ale numărului Reynolds (echivalent, pentru valori mici ale coeficientului de vâscozitate), curgerea fluidului poate să dezvolte un comportament haotic, turbulent. Teoria matematică a stabilizării soluţiilor staţionare a ecuaţiilor Navier-Stokes a fost dezvoltată ca instrument principal pentru a atenua sau chiar elimina turbulenţele din curgerea unui fluid. În acest capitol, vom studia stabilizarea feedback a profilului parabolic Poiseuille, corespunzător fluidelor printr-un canal. Stabilitatea este obţinută prin controale feedback, liniare, finit-dimensionale, ce acţionează doar asupra componentei normale (sau doar asupra componentei tangenţiale) a câmpului vitezelor, doar pe peretele superior. Obţinerea unui control normal stabilizant, uşor de manipulat numeric, este de o importanţă evidentă din punctul de vedere al aplicaţiilor. Există numeroase lucrării în legătură cu stabilizarea la frontieră pentru curgerea fluidelor printr-un canal, însă singurele rezultate de stabilizare normală sunt Barbu [14] şi Triggiani [83], rezultate pe care le vom îmbunătăţi în cele ce urmează. Metoda folosită este următoarea: descompunem sistemul în moduri Fourier, reducem presiunea din ecuaţii şi obţinem un sistem parabolic infinit, decuplat. Din acest motiv, stabilizarea se realizează pe fiecare nivel în parte, urmărind metoda dezvoltată de Barbu şi Triggiani în lucrarea [10], şi anume: descompunerea ecuaţiei în partea stabilă şi cea instabilă, şi stabilizarea componentei instabile, finit-dimensionale. Forma feedback a controlului este obţinută via minimizarea unei funcţionale de cost pătratice, asociată liniarizatului. Deci, aceasta conţine operatori liniari, auto-adjuncţi, ce satisfac ecuaţii Riccati, uşor de manipulat din punct de vedere numeric, deoarece sunt asociate unor probleme de control intern, parabolice, pe intervalul $(0, 1)$, ce au aceeaşi structură pentru diferite moduri Fourier.

1.1 Stabilizare feedback normală a fluidelor periodice într-un canal doi-dimensional

În această secţiune, vom trata cazul stabilizării normale a profilului parabolic Poiseuille, corespunzător curgerii fluidelor periodice într-un canal semi-infinit, doi-dimensional. Conţinutul acestei secţiuni este formată în totalitate din rezultatele originale obţinute de către autor în lucrarea [66].

1.1.1 Prezentarea problemei

Modelul matematic ce descrie dinamica unui fluid Newtonian, incompresibil, ce curge printr-un canal semi-infinit, doi-dimensional

$$(x, y) \in (-\infty, +\infty) \times (0, 1),$$

este alcătuit din ecuaţiile Navier-Stokes în $\mathbb{R}^2$ şi de următoarele condiţii la frontieră.

$$\begin{cases} u_t - \nu\Delta u + uu_x + vu_y = p_x, \\ v_t - \nu\Delta v + uv_x + vv_y = p_y, \\ u_x + v_y = 0, \\ \forall t \geq 0,\ x \in \mathbb{R},\ y \in (0, 1). \end{cases} \tag{1.1.1}$$

Aici $u = u(t, x, y)$ şi $v = v(t, x, y)$ reprezintă componenta tangenţială, respectiv normală, a câmpului vitezelor fluidului; $p = p(t, x, y)$ reprezintă presiunea fluidului; iar $\nu > 0$ coeficientul de vâscozitate. Cea de-a treia ecuaţie a sistemului (1.1.1), numită şi ecuaţia de continuitate, reprezintă exprimarea matematică a faptului că fluidul considerat este incompresibil (din acest motiv se mai numeşte şi condiţia de incompresibilitate).

Pentru a nu lucra în domenii infinite, vom presupune că atât câmpul vitezelor cât şi presiunea sunt $2\pi-$periodice în raport cu coordonata x, mai precis avem

$$u(t, x + 2\pi, y) = u(t, x, y),\ v(t, x + 2\pi, y) = v(t, x, y),\ p(t, x + 2\pi, y) = p(t, x, y),$$

$$\forall t \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in (0, 1).$$

Perioada 2π poate fi înlocuită cu oricare alt număr pozitiv, fără a schimba în esenţă ideile. În cele ce urmează, vom considera $2\pi-$periodicitatea, pentru facilitarea calculelor. Evident, această presupunere este în contradicţie cu realitatea fizică, însă, din punct de vedere matematic, astfel de condiţii periodice sunt presupuse adevărate, deoarece nu alterează ca- racteristicile esenţiale ale comportării fluidului (acest punct de vedere este explicat pe larg în lucrarea [24]). Condiţiile de periodicitate sunt completate de condiţiile pe pereţii $y = 0, 1$, şi anume

$$u(t, x, 0) = u(t, x, 1) = 0,\ v(t, x, 0) = 0,\ v(t, x, 1) = \Psi(t, x),\ \forall t \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Aici Ψ reprezintă controlul aplicat asupra componentei normale v, pe peretele $y = 1$, ce va asigura stabilitatea exponenţială a sistemului. După cum se observă, controlul nu acţionează nici asupra componentei tangenţiale a câmpului vitezelor, nici în interiorul canalului. În final, rămân de precizat doar datele iniţiale, şi anume

$$u(0, x, y) = u_o(x, y),\ v(0, x, y) = v_o(x, y),\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in (0, 1).$$

Soluţia de echilibru, ce urmează a fi stabilizată, este profilul parabolic Poiseuille, şi are forma

$$(U^e(x, y), 0).$$

Aceasta verifică sistemul Navier-Stokes staţionar, adică

$$\begin{cases} -\nu\Delta u + uu_x + vu_y = p^e_x, \\ -\nu\Delta v + uv_x + vv_y = p^e_y, \\ u_x + v_y = 0, \\ u(x + 2\pi, y) = u(x, y),\ v(x + 2\pi, y) = v(x, y),\ \forall x \in \mathbb{R},\ y \in (0, 1), \\ u(x, 0) = u(x, 1) = 0,\ v(x, 0) = v(x, 1) = 0, \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{1.1.2}$$

Aici p^e este presiunea de echilibru.

Datorită formei particulare, soluţia de echilibru poate fi determinată exact din sistemul (1.1.2). Astfel, divergenţa zero şi componenta normală zero implică $U^e_x \equiv 0$, adică U^e este funcţie doar de y. Atunci, din prima ecuaţie a sistemului (1.1.2), deducem că

$$-\nu(U^e)'' = p^e_x$$

(am notat cu $'$ derivata în raport cu coordonata y, şi anume $\frac{\partial}{\partial y}$). Din a doua ecuaţie a sistemului (1.1.2), reiese că

$$0 \equiv p^e_y,$$

adică $p^e = p^e(x)$. Prin urmare, avem

$$(U^e)''' \equiv 0.$$

Dacă ţinem cont de condiţiile la frontieră, obţinem într-un final

$$U^e(y) = C(y^2 - y),$$

unde $C \in \mathbb{R}_-$. În cele ce urmează, vom considera C de forma $C = -\frac{a}{2\nu}$, unde $a \in \mathbb{R}_+$. Deci, scopul acestei secţiuni este de a stabiliza profilul parabolic Poiseuille

$$\left(-\frac{a}{2\nu}(y^2 - y), 0\right).$$

Făcând substituţiile

$$(u, v) \Rightarrow (u, v) - (U^e, 0) \text{ şi } p \Rightarrow p - p^e,$$

suntem conduşi, via (1.1.1) şi (1.1.2), la studiul nulei stabilizări a sistemului următor

$$\begin{cases} u_t - \nu\Delta u + u_x U^e + vU^e_y + uu_x + vu_y = p_x, \\ v_t - \nu\Delta v + v_x U^e + uv_x + vv_y = p_y, \\ u_x + v_y = 0, \\ u(t, x, 0) = u(t, x, 1) = 0,\ v(t, x, 0) = 0,\ v(t, x, 1) = \Psi(t, x), \\ u(t, x + 2\pi, y) = u(t, x, y),\ v(t, x + 2\pi, y) = v(t, x, y), \\ p(t, x + 2\pi, y) = p(t, x, y),\ \forall t \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in (0, 1), \end{cases} \tag{1.1.3}$$

cu datele iniţiale

$$u(0, x, y) = u^0(x, y) := u_o(x, y) - U^e(y),\ v(0, x, y) = v^0(x, y) := v_o(x, y),$$
$$\forall x \in \mathbb{R},\ y \in (0, 1).$$

Liniarizatul sistemului (1.1.3) este

$$\begin{cases} u_t - \nu\Delta u + u_x U^e + vU^e_y = p_x, \\ v_t - \nu\Delta v + v_x U^e = p_y, \\ u_x + v_y = 0, \\ u(t, x, 0) = u(t, x, 1) = 0,\ v(t, x, 0) = 0,\ v(t, x, 1) = \Psi(t, x), \\ u(t, x + 2\pi, y) = u(t, x, y),\ v(t, x + 2\pi, y) = v(t, x, y), \\ p(t, x + 2\pi, y) = p(t, x, y),\ \forall t \geq 0,\ x \in \mathbb{R},\ y \in (0, 1), \end{cases} \tag{1.1.4}$$

cu datele iniţiale u^0, v^0. Acesta se mai numeşte şi liniarizatul sistemului (1.1.1) în jurul soluţiei staţionare $(U^e, 0)$.

În cele ce urmează, vom construi un control feedback Ψ care, odată introdus în liniarizatul (1.1.4), asigură nula stabilitate asimptotică a soluţiei. Din cauza condiţiilor la frontieră ne-tangenţiale, este dificil de arătat că acelaşi control Ψ implică şi nula stabilitate locală a sistemului neliniar (1.1.3) (pentru mai multe detalii despre ecuaţiile Navier-Stokes, cu condiţii ne-tangenţiale la frontieră, poate fi consultată lucrarea [75]). Aşadar, nula stabilizare a sistemului neliniar rămâne o problemă deschisă, ce urmează a fi tratată în lucrări viitoare, de către autor (în practică, însă, nula stabilitate a sistemului liniarizat este considerată suficientă pentru aplicaţii). Spre deosebire de acest caz, în următoarea secţiune vom studia modelul matematic în care controlul acţionează asupra componentei tangenţiale a câmpului vitezelor, prin urmare, vom avea condiţii tangenţiale la frontieră. În acest caz, vom arăta şi nula stabilitate locală a sistemului neliniar, via o teoremă de punct fix, folosind metoda dezvoltată de Barbu et al. în [12].

1.1.2 Preliminarii

În această subsecţiune, prezentăm cadrul funcţional Fourier, în care vom dezvolta metoda de stabilizare a liniarizatului (1.1.4), descrisă la începutul acestui capitol.

Fie $L^2_{2\pi}(Q)$, $Q=(0,2\pi)\times(0,1)$, spaţiul tuturor funcţiilor $u\in L^2_{loc}(\mathbb{R}\times(0,1))$, care sunt $2\pi-$periodice în raport cu variabila x. Aceste funcţii sunt caracterizate de seriile lor Fourier

$$u(x,y)=\sum_{k\in\ \mathbb{Z}}u_k(y)e^{\mathrm{i}kx},$$

astfel încât

$$\sum_{k\in\ \mathbb{Z}}\int_0^1|u_k(y)|^2dy<\infty.$$

Deoarece funcţiile sunt cu valori reale, avem în plus că

$$u_k=\overline{u_{-k}},\forall k\in\mathbb{Z}.$$

(Aici $\overline{z}$ reprezintă conjugatul complex al lui $z\in\mathbb{C}$.) Norma în $L^2_{2\pi}(Q)$ este definită astfel

$$\|u\|_{L^2_{2\pi}(Q)}:=\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}2\pi\|u_k\|^2_{L^2(0,1)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Deoarece nu este pericol de confuzie, notăm cu $\|\cdot\|$ norma din ambele spaţii $L^2_{2\pi}(Q)$ şi $L^2(0,1)$. Definim

$$(L^2_{2\pi}(Q))^2:=\left\{(u,v):u,v\in L^2_{2\pi}(Q)\right\}.$$

Notăm cu $\|(\cdot,\cdot)\|$ norma în $(L^2_{2\pi}(Q))^2$, definită astfel

$$\|(u,v)\|:=\left(\|u\|^2+\|v\|^2\right)^{\frac{1}{2}},\ \forall(u,v)\in(L^2(Q))^2.$$

Considerăm H spaţiul complexificat al lui $L^2(0,1)$. Necesitatea introducerii spaţiului H este dată de necesitatea unei teorii Fredholm complete, pentru operatorii liniari introduşi mai jos (vezi Teorema 4.1.1 din Apendix). De asemenea, notăm cu $\|\cdot\|$ norma în H, şi cu $<\cdot,\cdot>$ produsul scalar. $H^m(0,1),m\in\mathbb{N}$, sunt spaţiile Sobolev uzuale pe intervalul $(0,1)$ (vezi [1]), iar

$$H^1_0(0,1):=\left\{v\in H^1(0,1):v(0)=v(1)=0\right\}$$

şi

$$H_0^2(0,1) := \left\{v \in H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1) : v'(0) = v'(1) = 0\right\}.$$

Ne întoarcem acum la sistemul (1.1.4) şi îl rescriem în funcţie de coeficienţii Fourier ai câmpului vitezelor, presiunii şi controlului, adică

$$u = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k(t,y)e^{\mathrm{i}kx},\ v = \sum_{k\in\mathbb{Z}} v_k(t,y)e^{\mathrm{i}kx}$$

şi

$$p = \sum_{k\in\mathbb{Z}} p_k(t,y)e^{\mathrm{i}kx},\ \Psi = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \psi_k(t)e^{\mathrm{i}kx}.$$

Mai exact, introducem dezvoltările de mai sus în ecuatiile (1.1.4) şi identificăm coeficienţii. Obţinem următorul sistem infinit

$$\begin{cases} (u_k)_t - \nu u_k'' + (\nu k^2 + \mathrm{i}kU^e)u_k + (U^e)'v_k = \mathrm{i}kp_k \text{ a.p.t. în } (0,1), \\ (v_k)_t - \nu v_k'' + (\nu k^2 + \mathrm{i}kU^e)v_k = p_k' \text{ a.p.t. în } (0,1), \\ \mathrm{i}ku_k + v_k' = 0 \text{ a.p.t. în } (0,1), \\ u_k(0) = u_k(1) = 0, v_k(0) = 0, v_k(1) = \psi_k, \end{cases} \tag{1.1.5}$$

cu datele iniţiale u_k^0, v_k^0, pentru toţi $k \in \mathbb{Z}$.

Vom studia, pentru început, cazul în care $k = 0$. În acest caz, sistemul (1.1.5) capătă forma

$$\begin{cases} (u_0)_t - \nu u_0'' + v_0(U^e)' = 0 \text{ a.p.t. în } (0,1), \\ (v_0)_t - \nu v_0'' = p_0' \text{ a.p.t. în } (0,1), \\ v_0' = 0 \text{ a.p.t. în } (0,1), \\ u_0(0) = u_0(1) = 0,\ v_0(0) = 0,\ v_0(1) = \psi_0. \end{cases} \tag{1.1.6}$$

Din divergenţa zero, $v_0' = 0,\ \forall t \geq 0$, şi condiţiile la frontieră, $v_0(0) = 0,\ \forall t \geq 0$, deducem că $v_0 \equiv 0$. Ceea ce implică, de asemenea, că $\psi_0 \equiv 0$. Deci, u_0 satisface următoarea ecuaţie

$$\begin{cases} (u_0)_t - \nu u_0'' = 0, y \in (0,1), \\ u_0(0) = u_0(1) = 0. \end{cases} \tag{1.1.7}$$

Multiplicând scalar ecuaţia (1.1.7) cu u_0, luând partea reală a rezultatului, şi folosind inegalitatea lui Poincaré (vezi [1]), avem că pentru o constantă $C_0 > 0$, are loc

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_0(t)\|^2 + C_0\nu\|u_0\|^2 \leq 0,\ t \geq 0.$$

Aceasta implică

$$\|u_0(t)\|^2 \leq e^{-2C_0\nu t}\|u_0^0\|^2,\ \forall t \geq 0. \tag{1.1.8}$$

Ceea ce înseamnă că, pentru coeficienţii Fourier u_0, v_0, stabilitatea exponenţială are loc fără a aplica vreun control. Din acest motiv, de acum încolo, vom considera doar $k \neq 0$.

Una din problemele majore pe care le prezintă ecuaţiile Navier-Stokes este prezenţa presiunii p. Din cauza acesteia, sistemul Navier-Stokes este un sistem cu d ecuaţii si $d+1$ necunoscute, unde $d = 2$ sau 3. Din acest motiv, în general, se încearcă eliminarea acesteia prin diferite procedee, cum ar fi: aplicarea proiectorului Leray, aplicarea operatorului *rotor*, ş.a.m.d.. În cazul de faţă, vom aborda problema în acelaşi mod. Vom reduce presiunea din sistemul (1.1.5), astfel: derivăm prima ecuaţie în raport cu y, înmulţim a doua ecuaţie cu ik şi facem diferenţa lor. Obţinem

$$\begin{aligned}\mathrm{i}k(v_k)_t - \mathrm{i}k\nu v_k'' + \mathrm{i}k^2(\nu k + \mathrm{i}U^e)v_k - (u_k')_t + \nu u_k''' \\ - k(\nu k + \mathrm{i}U^e)u_k' - \mathrm{i}k(U^e)'u_k - (U^e)'v_k' - (U^e)''v_k = 0.\end{aligned} \tag{1.1.9}$$

Relaţia dată de divergenţa zero ne permite să exprimăm u_k în funcţie de v_k', şi anume $u_k = -\frac{1}{\mathrm{i}k}v_k'$. Astfel, înlocuind u_k în relaţia de mai sus, deducem că

$$\begin{aligned}\mathrm{i}k(v_k)_t - \mathrm{i}k\nu v_k'' + \mathrm{i}k^2(\nu k + \mathrm{i}U^e)v_k + \frac{1}{\mathrm{i}k}(v_k'')_t \\ - \frac{\nu}{\mathrm{i}k}v_k'''' + \frac{1}{i}(\nu k + \mathrm{i}U^e)v_k'' - (U^e)''v_k = 0, t \geq 0, y \in (0,1).\end{aligned} \tag{1.1.10}$$

Prin urmare, obţinem următorul sistem parabolic infinit în v_k

$$\begin{cases}(-v_k'' + k^2 v_k)_t + \nu v_k'''' - (2\nu k^2 + \mathrm{i}kU^e)v_k'' \\ \qquad + k(\nu k^3 + \mathrm{i}k^2 U^e + \mathrm{i}(U^e)'')v_k = 0, \ \forall t \geq 0, \ \forall y \in (0,1), \\ v_k'(t,0) = v_k'(t,1) = 0, v_k(t,0) = 0, v_k(t,1) = \psi_k(t), \ \forall t \geq 0, \\ v_k(0,y) = v_k^0(y), \ y \in (0,1).\end{cases} \tag{1.1.11}$$

Pentru a scrie într-un mod abstract sistemul (1.1.11), introducem următorii operatori liniari, pentru toţi $k \in \mathbb{Z}^*$

$$L_k : \mathcal{D}(L_k) \subset H \to H \text{ şi } F_k : \mathcal{D}(F_k) \subset H \to H,$$

definiţi astfel

$$L_k v := -v'' + k^2 v, \ \mathcal{D}(L_k) = H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1), \tag{1.1.12}$$

$$F_k v := \nu v'''' - (2\nu k^2 + \mathrm{i}kU^e)v'' + k(\nu k^3 + ik^2 U^e + \mathrm{i}(U^e)'')v, \tag{1.1.13}$$
$$\mathcal{D}(F_k) = H^4(0,1) \cap H_0^2(0,1).$$

De asemenea, considerăm şi următoarele expresii diferenţiale

$$\mathcal{L}_k v := -v'' + k^2 v,$$

şi

$$\mathcal{F}_k v := \nu v'''' - (2\nu k^2 + \mathrm{i}kU^e)v'' + k(\nu k^3 + \mathrm{i}k^2 U^e + \mathrm{i}(U^e)'')v.$$

Cu aceste notaţii, sistemul (1.1.11) devine:

$$\begin{cases}(\mathcal{L}_k v_k)_t + \mathcal{F}_k v_k = 0, \ t \geq 0, \ y \in (0,1), \\ v_k'(0) = v_k'(1) = 0, \ v_k(0) = 0, \ v_k(1) = \psi_k(t).\end{cases} \tag{1.1.14}$$

Mai departe, ideea este să transformăm ecuaţia (1.1.14) într-o ecuaţie cu condiţii nule la frontieră. Pentru aceasta, fie $w_k = w_k(t,y)$ soluţia sistemului

$$\begin{cases}\theta_k w_k + \mathcal{F}_k w_k = 0, \ t \geq 0, \ y \in (0,1), \\ w_k'(0) = w_k'(1) = 0, w_k = 0, w_k(1) = \psi_k.\end{cases} \tag{1.1.15}$$

Se observă uşor că pentru $\theta_k \in \mathbb{R}$, pozitiv şi suficient de mare, există o soluţie unică w_k, pentru ecuaţia (1.1.15). Facem diferenţa între sistemele (1.1.14) şi (1.1.15). Obţinem

$$(\mathcal{L}_k v_k)_t + \mathcal{F}_k(v_k - w_k) - \theta_k w_k = 0, \ t \geq 0.$$

Sau, echivalent,

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_k(v_k - w_k))_t + \mathcal{F}_k(v_k - w_k) = \theta_k w_k - (\mathcal{L}_k w_k)_t, \\ v_k - w_k \in \mathcal{D}(F_k). \end{aligned} \tag{1.1.16}$$

Ecuaţia (1.1.16) se poate rescrie astfel

$$(L_k(v_k - w_k))_t + (F_k L_k^{-1}) L_k(v_k - w_k) = \theta_k w_k - (\mathcal{L}_k w_k)_t, \tag{1.1.17}$$

ceea ce sugerează să introducem următorii operatori liniari

$$\mathbf{A}_k : \mathcal{D}(\mathbf{A}_k) \subset H \to H, \text{ pentru toţi } k \in \mathbb{Z}^*,$$

definiţi astfel

$$\mathbf{A}_k := F_k L_k^{-1}, \ \mathcal{D}(\mathbf{A}_k) = \left\{ v \in H : L_k^{-1} v \in \mathcal{D}(F_k) \right\}. \tag{1.1.18}$$

Un punct cheie în nula stabilizare a sistemului (1.1.11) îl constituie următoarea lemă, ce listează câteva proprietăţi esenţiale ale operatorilor $\mathbf{A}_k$, introduşi mai sus. Aceasta a fost stabilită de Barbu în [17]. Pe scurt, lema spune că operatorii $-\mathbf{A}_k$ sunt compacţi şi generează C_0-semigrupuri, care sunt exponenţial stabile pentru k suficient de mare.

Lema 1.1.1 *Pentru toţi $k \in \mathbb{Z}^*$, operatorul $-\boldsymbol{A}_k$ generează un C_0-semigrup analitic în H, şi pentru toţi $\lambda \in \rho(-\boldsymbol{A}_k)$, $(\lambda I + \boldsymbol{A}_k)^{-1}$ este compact. Mai mult, avem*

$$\sigma(-\boldsymbol{A}_k) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \Re\lambda \leq 0\}, \forall |k| > S,$$

unde

$$S = \frac{1}{\sqrt{\nu}} \left(1 + \frac{a}{\sqrt{2}\nu}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.1.19}$$

Aici, $\rho(-\boldsymbol{A}_k)$ şi $\sigma(-\boldsymbol{A}_k)$ reprezintă mulţimea rezolventă, respectiv spectrul, lui $-\boldsymbol{A}_k$.

Demonstraţie. Demonstraţia acestei leme se regăseşte în [17, Lemma 1], din acest motiv va fi omisă. □

Remarca 1.1.1 O primă consecinţă a lemei de mai sus este că sistemul parabolic infinit (1.1.11) trebuie controlat doar pentru $|k| \leq S$, S dat de relaţia (1.1.19). Într-adevăr, pentru $|k| > S$, să considerăm sistemul (1.1.11) cu control nul la frontieră, adică:

$$\begin{cases} (-v_k'' + k^2 v_k)_t + \nu v_k'''' - (2\nu k^2 + \mathrm{i}kU^e) v_k'' \\ \qquad + k(\nu k^3 + \mathrm{i}k^2 U^e + \mathrm{i}(U^e)'') v_k = 0, \ t \geq 0, y \in (0,1), \\ v_k'(0) = v_k'(1) = 0, \ v_k(0) = 0, \ v_k(1) = 0. \end{cases} \tag{1.1.20}$$

Înmulţind scalar ecuaţia (1.1.20) cu v_k şi luând partea reală a rezultatului, avem că

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|v_k'\|^2+k^2\|v_k\|^2\right)+\nu\|v_k''\|^2+2\nu k^2\|v_k'\|^2+\nu k^4\|v_k\|^2&\\ =-\Re\left(\mathrm{i}k\int_0^1(U^e)'v_k'\overline{v_k}dy\right).&\end{aligned}\tag{1.1.21}$$

Prin urmare,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|v_k'\|^2+k^2\|v_k\|^2\right)&+2\nu k^2\|v_k'\|^2+\nu k^4\|v_k\|^2\\ &\le |k|\left|\int_0^1(U^e)'v_k'\overline{v_k}dy\right|\\ &\le \frac{3}{2}\nu k^2\|v_k'\|^2+\frac{2}{3\nu}\int_0^1|(U^e)'|^2|\overline{v}_k|^2dy\\ &\le \frac{3}{2}\nu k^2\|v_k'\|^2+\frac{a^2}{6\nu^3}\|v_k\|^2\\ &\le \frac{3}{2}\nu k^2\|v_k'\|^2+\frac{1}{2}\nu k^4\|v_k\|^2,\end{aligned}\tag{1.1.22}$$

deoarece $|k|>S=\frac{1}{\sqrt{\nu}}\left(1+\frac{a}{\sqrt{2}\nu}\right)^{\frac{1}{2}}$. Estimările de mai sus implică faptul că

$$\frac{d}{dt}\left(\|v_k'\|^2+k^2\|v_k\|^2\right)+\nu k^2(\|v_k'\|^2+k^2\|v_k\|^2)\le 0,\ t\ge 0.$$

De unde deducem că

$$\|v_k'(t)\|^2+k^2\|v_k(t)\|^2\le e^{-\nu k^2 t}\left(\|(v_k^0)'\|^2+k^2\|v_k^0\|^2\right),\ t\ge 0,\tag{1.1.23}$$

care, împreună cu relaţia dată de divergenţa zero $u_k=-\frac{1}{\mathrm{i}k}v_k'$, implică

$$\|u_k(t)\|^2+\|v_k(t)\|^2\le e^{-\nu S^2 t}\left(\|u_k^0\|^2+\|v_k^0\|^2\right),\ \forall t\ge 0,\ \forall |k|>S.\tag{1.1.24}$$

Relaţia (1.1.24) nu spune altceva decât că pentru $|k|>S$, soluţia sistemului (1.1.11), cu control nul la frontieră, satisface o descreştere exponenţială pentru $t\to\infty$. Deci, rămâne de controlat sistemul (1.1.11) doar pentru $0<|k|\le S$.

Ne întoarcem la sistemul (1.1.17), notăm cu

$$y_k(t):=L_k(v_k(t)-w_k(t)),$$

şi aplicăm formula variaţiei constantelor pentru a obţine că

$$\begin{aligned}y_k(t)&=e^{-t\mathbf{A}_k}y_k(0)+\textstyle\int_0^t e^{-(t-s)\mathbf{A}_k}(\theta_k w_k(s)-(\mathcal{L}_k w_k(s))_s)ds\\ &=e^{-t\mathbf{A}_k}y_k(0)-\mathcal{L}_k w_k(t)+e^{-t\mathbf{A}_k}\mathcal{L}_k w_k(0)\\ &\quad+\int_0^t e^{-(t-s)\mathbf{A}_k}(\theta_k w_k(s)+\tilde{F}_k w_k(s))ds.\end{aligned}\tag{1.1.25}$$

Deoarece w_k nu aparţine în mod necesar domeniului de definiţie al operatorului F_k, am considerat în ultima relaţie de mai sus, în loc de F_k, $\tilde{F}_k : H \to (\mathcal{D}(F_k^*))^*$, extinderea lui F_k la întreg spaţiul H (vezi (4.1.6), din Apendix). De asemenea, considerăm $\tilde{\mathbf{A}}_k$ extinderea operatorului $\mathbf{A}_k$ la întreg spaţiul H. La fel ca şi $-\mathbf{A}_k$, operatorul $-\tilde{\mathbf{A}}_k$ generează un C_0-semigrup analitic în H. Extinderea operatorului L_k, notată la fel cu L_k, acţionează de pe H pe spaţiul dual $(H_0^1(0,1) \cap H^2(0,1))^*$. Cu aceste notaţii, ecuaţia (1.1.25) poate fi rescrisă astfel

$$(L_k v_k)_t + \tilde{\mathbf{A}}_k L_k v_k = (\theta_k + \tilde{F}_k) w_k, t \geq 0. \tag{1.1.26}$$

În continuare, dorim să evidenţiem faptul că soluţia w_k depinde de valoarea de pe frontieră ψ_k. Pentru aceasta, pentru orice $\psi \in \mathbb{C}$, notăm cu $D_k \psi := w \in H^4(0,1)$ soluţia ecuaţiei

$$\begin{cases} \theta_k w + \mathcal{F}_k w = 0, \ \forall y \in (0,1), \\ w'(0) = w'(1) = 0, w(0) = 0, w(1) = \psi. \end{cases} \tag{1.1.27}$$

Astfel, introducem operatorul $D_k : \mathbb{C} \to H$, care poartă numele de aplicaţia Dirichlet asociată operatorului $\theta_k + \tilde{F}_k$. Un calcul simplu arată că dualul operatorului $(\theta_k + \tilde{F}_k) D_k$ este dat de

$$((\theta_k + \tilde{F}_k) D_k)^* \phi = \nu \phi'''(1), \tag{1.1.28}$$

pentru toţi $\phi \in H^4(0,1), \phi(0) = \phi(1) = 0, \phi'(0) = \phi'(1) = 0$.

Putem conchide că ecuaţia (1.1.26) poate fi rescrisă astfel

$$(L_k v_k)_t + \tilde{\mathbf{A}}_k L_k v_k = (\theta_k + \tilde{F}_k) D_k \psi_k, t > 0, \tag{1.1.29}$$

şi data iniţială v_k^0.

Remarca 1.1.2 Prin introducerea operatorului Dirichlet D_k am transformat sistemul (1.1.11), cu control la frontieră, într-un sistem echivalent (1.1.29), de tip controlat intern. Spunem de tipul, deoarece, spre deosebire de cazul sistemelor controlate intern, operatorul ce defineşte controlul, în cazul de faţă, nu este continuu.

Remarca 1.1.3 Ecuaţia (1.1.29) este înţeleasă în sensul slab, adică

$$\langle (L_k v_k)_t, \phi \rangle + \langle L_k v_k, \mathbf{A}_k^* \phi \rangle = \left\langle \psi_k(t), ((\theta_k + \tilde{F}_k) D_k)^* \phi \right\rangle, \ \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbf{A}_k^*).$$

1.1.3 Proprietăţi ale operatorilor liniari $\mathbf{A}_k$ şi D_k

În subsecţiunea anterioară am introdus operatorii $\mathbf{A}_k$ şi D_k cu scopul de a rescrie sistemul cu control la frontieră (1.1.11) ca o problemă abstractă de control intern (1.1.29). În această subsecţiune, vom contiuna cu studiul proprietăţiilor acestora.

Din Lema 1.1.1 ştim că $-\mathbf{A}_k$ este un operator liniar compact, prin urmare are o mulţime numărabilă de valori proprii notată cu $\left\{\lambda_j^k\right\}_{j=1}^{\infty}$ (vezi Teorema 4.1.2 din Apendix) (λ_j^k este repetat în acord cu multiplicitatea sa m_j^k). Deci, $\left\{\overline{\lambda_j^k}\right\}_{j=1}^{\infty}$ sunt autovalorile operatorului dual $-\mathbf{A}_k^*$, a lui $-\mathbf{A}_k$. Notăm cu $\left\{\phi_j^k\right\}_{j=1}^{\infty}$, respectiv $\left\{\phi_j^{k*}\right\}_{j=1}^{\infty}$, autofuncţiile corespunzătoare operatorilor $-\mathbf{A}_k$, respectiv $-\mathbf{A}_k^*$.

Remarca 1.1.4 Trebuie menţionat că autovalorile (respectiv autofuncţiile) operatorului extins $-\tilde{\mathbf{A}}_k$ coincid cu autovalorile (respectiv autofuncţiile) lui $-\mathbf{A}_k$. La fel are loc şi pentru operatorii duali $-\tilde{\mathbf{A}}_k^*$, $-\mathbf{A}_k^*$. Cu alte cuvinte, operatorul $-\mathbf{A}_k$ şi extinsul său $-\tilde{\mathbf{A}}_k$ au aceleaşi proprietăţi spectrale.

După cum am menţionat şi mai înainte (vezi Remarca 1.1.1), trebuie să stabilizăm sistemul (1.1.14) (echivalent (1.1.29)) doar pentru $0 < |k| \leq S$. Fie $k \in \mathbb{Z}^*$, astfel încât $|k| \leq S$. Tot din Lema 1.1.1 rezultă că $-\mathbf{A}_k$ are un număr finit N_k de autovalori λ_j^k cu $\Re\lambda_j^k \geq 0$, aşa numitele autovalori instabile (vezi Teorema 4.1.2 din Apendix). Notăm cu $M_k := m_1^k + ... + m_{N_k}^k$, suma multiplicităţilor autovalorilor instabile.

Deoarece metoda de stabilizare, pe care o aplicăm aici, se bazează pe proprietăţile spectrale ale operatorilor $-\mathbf{A}_k$, este necesar un rezultat de tipul "unică continuare" pentru autofuncţiile dualului $-\mathbf{A}_k^*$. Lema de mai jos oferă un răspuns în acest sens şi reprezintă, de altfel, rezultatul cheie al întregului capitol.

Lema 1.1.2 *Fie $\overline{\lambda_j^k}$, pentru un $0 < |k| \leq S$ şi un $j \in \{1, ..., N_k\}$, o autovaloare instabilă pentru operatorul dual $-\boldsymbol{A}_k^*$. Atunci, putem alege o bază pentru spaţiul autofuncţiilor, corespunzător autovalorii $\overline{\lambda_j^k}$, alcătuită din funcţii ϕ^*, pentru care $\Re(\phi^*)'''(1) > 0$. Cu alte cuvinte, putem presupune că autofuncţia ϕ_j^{k*}, corespunzătoare autovalorii instabile $\overline{\lambda_j^k}$, satisface $\Re(\phi_j^{k*})'''(1) > 0$.*

Demonstraţie. Notăm cu $\lambda = \lambda_j^k$, autovaloarea instabilă. Dacă $\phi^* = \phi_j^{k*}$ este o autofuncţie a operatorului dual $-\mathbf{A}_k^*$, corespunzătoare lui $\overline{\lambda}$, atunci ϕ^* satisface următoarea problemă cu valori la frontieră, pe intervalul $(0, 1)$,

$$\begin{cases} \nu(\phi^*)'''' - (2\nu k^2 - \mathrm{i}kU^e + \overline{\lambda})(\phi^*)'' \\ \qquad\qquad + 2\mathrm{i}k(U^e)'(\phi^*)' + (k^2\overline{\lambda} + \nu k^4 - \mathrm{i}k^3U^e)\phi^* = 0, \\ \phi^*(0) = \phi^*(1) = 0, (\phi^*)'(0) = (\phi^*)'(1) = 0. \end{cases} \tag{1.1.30}$$

Vom arăta că putem alege autofuncţia ϕ^* astfel încât

$$(\phi^*)'''(1) \neq 0.$$

Atunci, înlocuind eventual ϕ^* cu $\overline{(\phi^*)'''(1)}\phi^*$, obţinem că $(\phi^*)'''(1) > 0$. Demonstraţia este alcătuită din trei paşi, în care vom arăta că dacă presupunem prin absurd că $(\phi^*)'''(1) = 0$ atunci, în mod necesar, $\phi^* \equiv 0$.

Pasul 1. Pentru o funcţie $f : [0, 1] \to \mathbb{C}$, notăm cu $\check{f} : [0, 1] \to \mathbb{C}$, următoarea funcţie

$$\check{f}(y) := f(1 - y), \forall y \in [0, 1].$$

Spunem că funcţia $f : [0, 1] \to \mathbb{C}$ este simetrică dacă şi numai dacă $f(y) = \check{f}(y)$, $\forall y \in [0, 1]$ şi anti-simetrică dacă şi numai dacă $f(y) = -\check{f}(y)$, $\forall y \in [0, 1]$.

În acest pas, vom arăta că putem alege o bază pentru spaţiul autofuncţiilor duale alcătuită din funcţii simetrice sau anti-simetrice. Observăm că, dacă ϕ^* este soluţie pentru (1.1.30), atunci şi $\check{\phi}^*$ este soluţie pentru (1.1.30), datorită formei simetrice a ecuaţiei (avem U^e simetrică, derivate de ordin par, iar derivata de ordin impar este compensată de faptul că $(U^e)'$ este anti-simetrică). Notăm cu $\mathcal{H}$ spaţiul liniar de dimensiune patru, peste corpul numerelor complexe, al soluţiilor ecuaţiei diferenţiale liniare şi omogene de ordin patru, pe intervalul $(0,1)$

$$\nu(\phi^*)'''' - (2\nu k^2 - \mathrm{i}kU^e + \overline{\lambda})(\phi^*)'' + 2\mathrm{i}k(U^e)'(\phi^*)' + (k^2\overline{\lambda} + \nu k^4 - \mathrm{i}k^3U^e)\phi^* = 0. \quad (1.1.31)$$

Atunci, spaţiul autofuncţiilor poate fi reprezentat ca un subspaţiu liniar $\mathcal{E}$ al lui $\mathcal{H}$, definit astfel

$$\mathcal{E} := \{\phi \in \mathcal{H} : \phi(0) = \phi(1) = 0,\ \phi'(0) = \phi'(1) = 0\}.$$

Este uşor de văzut că dimensiunea lui $\mathcal{E}$ este ≤ 2. Putem găsi atunci o bază a acestui spaţiu liniar alcătuită din funcţii simetrice sau anti-simetrice. Într-adevăr, să presupunem că există un $\phi \in \mathcal{E}$ care nu este nici simetrică nici anti-simetrică. Atunci, următoarele două funcţii $\phi_1 = \phi + \check{\phi}$, $\phi_2 = \phi - \check{\phi}$ aparţin spaţiului $\mathcal{E}$. Mai mult, $\phi_1 \neq 0, \phi_2 \neq 0$ şi sistemul $\{\phi_1, \phi_2\}$ este liniar independent, deoarece ϕ_1 este simetrică, iar ϕ_2 este anti-simetrică. Aceasta, împreună cu faptul că dimensiunea lui $\mathcal{E}$ este ≤ 2, susţine afirmaţia făcută anterior.

Prin urmare, putem presupune că autofuncţia corespunzătoare ϕ^* este simetrică sau anti-simetrică. Pentru a fixa ideile, să presupunem de exemplu că ϕ^* este simetrică. Celălalt caz poate fi tratat asemănător. Vrem să arătăm că avem $(\phi^*)'''(1) \neq 0$. Să presupunem, prin reducere la absurd, că avem $(\phi^*)'''(1) = 0$. Din simetrie rezultă imediat şi că $(\phi^*)'''(0) = 0$. Notăm cu $\mathtt{E}_k$ şi $\mathtt{E}_k^*$ următoarele forme diferenţiale

$$\mathtt{E}_k\phi := \nu\phi'''' - (2\nu k^2 + \mathrm{i}kU^e + \lambda)\phi'' + k(\nu k^3 + \mathrm{i}k^2U^e + \mathrm{i}(U^e)'' + k\lambda)\phi,$$

respectiv

$$\mathtt{E}_k^*\phi := \nu\phi'''' - (2\nu k^2 - \mathrm{i}kU^e + \overline{\lambda})\phi'' + 2\mathrm{i}k(U^e)'\phi' + (k^2\overline{\lambda} + \nu k^4 - \mathrm{i}k^3U^e)\phi.$$

Este evident că ϕ^* satisface $\mathtt{E}_k^*\phi^* = 0$. Deci,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 \mathtt{E}_k^*\phi^*\overline{\phi}dy \\ &= \int_0^1 \phi^*\overline{\mathtt{E}_k\phi}dy + \nu((\phi^*)''(1)\overline{\phi'(1)} - (\phi^*)''(0)\overline{\phi'(0)}),\ \forall\phi \in H^4(0,1), \end{aligned} \quad (1.1.32)$$

datorită condiţiilor la frontieră pentru ϕ^*, adică,

$$\phi^*(0) = \phi^*(1) = 0, (\phi^*)'(0) = (\phi^*)'(1) = 0, (\phi^*)'''(0) = (\phi^*)'''(1) = 0.$$

Din (1.1.32), deducem că

$$\int_0^1 |\phi^*|^2 dy = 0, \quad (1.1.33)$$

dacă ϕ satisface

$$\begin{cases} \mathtt{E}_k\phi = \phi^*, \\ \phi'(0) = \phi'(1) = 0. \end{cases} \quad (1.1.34)$$

Relaţia (1.1.33) implică $\phi^* \equiv 0$, ceea ce este în contradicţie cu faptul că ϕ^* este o autofuncţie. Aceasta implică faptul că presupunerea $(\phi^*)'''(1) = 0$ este falsă, ceea ce conduce la rezultatul dorit. Aşadar, pentru a termina demonstraţia, mai rămâne de arătat că există o soluţie ϕ pentru ecuaţia (1.1.34).

Pasul 2. Afirmăm că există o funcţie ϕ_1, astfel încât

$$\begin{cases} \mathtt{E}_k\phi_1 = 0, y \in (0,1), \\ \phi_1'(0) - \phi_1'(1) \neq 0. \end{cases} \tag{1.1.35}$$

Demonstraţia acestui fapt va fi prezentată in pasul al treilea. În acest pas, vom arăta că, dacă afirmaţia de mai sus este adevărată, atunci există o soluţie pentru ecuaţia (1.1.34), obţinând astfel rezultatul dorit.

Construim următoarea funcţie $\phi_2 := \phi_1 + \check{\phi}_1$. Ca şi mai înainte, ecuaţia $\mathtt{E}_k\phi_1 = 0$ este simetrică, aceasta implicând faptul că ϕ_1, fiind soluţie, atunci şi $\check{\phi}_1$ este soluţie. Deci, avem

$$\begin{cases} \mathtt{E}_k\phi_2 = 0, \\ \phi_2'(0) = \phi_1'(0) - \phi_1'(1) \neq 0, \\ \phi_2 \text{ este simetrică }. \end{cases} \tag{1.1.36}$$

Fie ϕ_3 o soluţie pentru ecuaţia $\mathtt{E}_k\phi_3 = \phi^*$, astfel încât ϕ_3 să fie simetrică. Există o soluţie simetrică, deoarece ϕ^* este simetrică. Într-adevăr, fie ϕ_4 o soluţie a ecuaţiei $\mathtt{E}_k\phi_4 = \frac{1}{2}\phi^*$. Dacă luăm acum $\phi_3 := \phi_4 + \check{\phi}_4$, avem $\mathtt{E}_k\phi_3 = \frac{1}{2}\phi^* + \frac{1}{2}\phi^* = \phi^*$ şi ϕ_3 este simetrică.

Definim $\phi_5 := -\frac{\phi_3'(0)}{\phi_2'(0)}\phi_2 + \phi_3$. Avem că ϕ_5 satisface

$$\begin{cases} \mathtt{E}_k\phi_5 = \phi^*, \\ \phi_5 \text{ este simetrică}, \\ \phi_5'(0) = 0 \text{ şi, datorită simetriei, } \phi_5'(1) = 0. \end{cases} \tag{1.1.37}$$

Deci, putem lua $\phi = \phi_5$.

Pasul 3. După cum am anunţat deja, în acest ultim pas vom demonstra că următoarea problemă are cel puţin o soluţie

$$\begin{cases} \mathtt{E}_k\phi_1 = 0, y \in (0,1), \\ \phi_1'(0) - \phi_1'(1) \neq 0. \end{cases} \tag{1.1.38}$$

Vom raţiona prin reducere la absurd. Presupunem că, pentru orice soluţie ψ a ecuaţiei $\mathtt{E}_k\psi = 0$, avem $\psi'(0) - \psi'(1) = 0$. Să notăm cu $\mathcal{H}_1$ spaţiul liniar al soluţiilor ecuaţiei diferenţiale liniare si omogene $\mathtt{E}_k\psi = 0$, şi cu $\mathcal{E}_1$ subspaţiul liniar al lui $\mathcal{H}_1$, definit astfel

$$\mathcal{E}_1 := \{\psi \in \mathcal{H}_1 : \psi'''(0) - \psi'''(1) = 0\}.$$

Fie un $\psi \in \mathcal{E}_1$. Definim $\Psi := \psi + \check{\psi}$. Avem

$$\Psi'(0) = \psi'(0) - \psi'(1) = 0, \ \Psi'(1) = \psi'(1) - \psi'(0) = 0,$$

deoarece $\psi \in \mathcal{H}_1$. De asemenea,

$$\Psi'''(0) = \psi'''(0) - \psi'''(1) = 0, \ \Psi'''(1) = \psi'''(1) - \psi'''(0) = 0,$$

deoarece $\psi \in \mathcal{E}_1$. Notăm cu $\Phi := \Psi'' - k^2\Psi$. Avem $\mathtt{E}_k\Psi = 0$, ecuaţie care poate fi descompusă astfel

$$\nu\Phi'' - (\nu k^2 + \mathrm{i}kU^e + \lambda)\Phi + \mathrm{i}k(U^e)''\Psi = 0, \tag{1.1.39}$$

şi

$$\Psi'' - k^2\Psi = \Phi. \tag{1.1.40}$$

Observăm că, deoarece $\Psi'(0) = \Psi'(1) = 0$ şi $\Psi'''(0) = \Psi'''(1) = 0$, avem $\Phi'(0) = \Phi'(1) = 0$. Înmulţim scalar ecuaţia (1.1.39) cu Φ şi ecuaţia (1.1.40) cu Ψ. Obţinem

$$-\nu\int_0^1 |\Phi'|^2 dy - (\nu k^2 + \lambda)\int_0^1 |\Phi|^2 dy - \mathrm{i}k\int_0^1 U^e|\Phi|^2 dy + \mathrm{i}k(U^e)''\int_0^1 \Psi\overline{\Phi} dy = 0, \tag{1.1.41}$$

şi

$$-\int_0^1 |\Psi'|^2 dy - k^2\int_0^1 |\Psi|^2 dy = \int_0^1 \Phi\overline{\Psi} dy. \tag{1.1.42}$$

Din (1.1.42) vedem că $\int_0^1 \Psi\overline{\Phi} dy$ este un număr real. Folosind aceasta şi luând partea reala a lui (1.1.41), obţinem că

$$-\nu\int_0^1 |\Phi'|^2 dy - (\nu k^2 + \Re\lambda)\int_0^1 |\Phi|^2 dy = 0.$$

Deoarece λ este o autovaloare instabilă, avem că $\Re\lambda \geq 0$. Prin urmare, relaţia de mai sus conduce la

$$\Phi \equiv 0.$$

Deducem cu uşurinţă că $\Phi \equiv 0$ implică $\Psi \equiv 0$, care la rândul lui implică $\psi = -\check{\psi}$. Deci,

$$\psi \in \mathcal{E}_1 \text{ implică } \psi = -\check{\psi}. \tag{1.1.43}$$

Să considerăm acum următoarele subspaţii ale lui $\mathcal{H}_1$, definite mai jos

$$\mathcal{S} := \left\{\psi \in \mathcal{H}_1 : \psi = \check{\psi}\right\}, \ \mathcal{AS} := \left\{\psi \in \mathcal{H}_1 : \psi = -\check{\psi}\right\},$$

care reprezintă subspaţiul simetric, respectiv anti-simetric, al lui $\mathcal{H}_1$. Se verifică uşor că avem egalităţile

$$\mathcal{S} = \left\{\psi \in \mathcal{H}_1 : \psi'(\frac{1}{2}) = \psi'''(\frac{1}{2}) = 0\right\}$$

şi

$$\mathcal{AS} = \left\{\psi \in \mathcal{H}_1 : \psi(\frac{1}{2}) = \psi''(\frac{1}{2}) = 0\right\},$$

ceea ce implică $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{S} = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{AS} = 2$. Din relaţia (1.1.43) avem adevărată incluziunea $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{AS}$.

Mai departe, considerăm următorul subspaţiu al lui $\mathcal{H}_1$

$$\mathcal{F}_1 := \{\psi \in \mathcal{H}_1 : \psi'''(0) = 0\}.$$

Avem că $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{F}_1 = 3$. Din moment ce $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{S} = 2$, $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}_1 = 4$ şi $\mathcal{F}_1, \mathcal{S} \subset \mathcal{H}_1$, obţinem că

$$\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{S} \neq \{0\}.$$

Aşadar, există $0 \neq \psi \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{S}$. $\psi \in \mathcal{F}_1$ implică $\psi'''(0) = 0$, iar din simetrie (deoarece $\psi \in \mathcal{S}$) avem $\psi'''(1) = 0$. Aceasta conduce la relaţia $\psi'''(0) - \psi'''(1) = 0$, care împreună cu faptul că $\psi \in \mathcal{H}_1$, implică $\psi \in \mathcal{E}_1 \subset \mathcal{AS}$. În sfârşit, avem că $\psi \in \mathcal{S} \cap \mathcal{AS}$, deci, $\psi \equiv 0$, ceea ce este absurd. Prin urmare, presupunerea făcută nu este adevărată. Aceasta înseamnă că există o funcţie ϕ_1 pentru care

$$\begin{cases} \mathcal{L}_k \phi_1 = \phi^*, y \in (0,1), \\ \phi_1'(0) - \phi_1'(1) \neq 0. \end{cases} \tag{1.1.44}$$

Concluzionăm că dacă ϕ^* este autofuncţie, în sens clasic, atunci ea poate fi aleasă, astfel încât $(\phi^*)'''(1) > 0$.

În final, trebuie studiat cazul în care autofuncţiile duale sunt generalizate. Aşadar, să presupunem că există $\phi_0^*, \phi_1^*, ..., \phi_L^*$, $L \in \mathbb{N}$, astfel încât:

$$\left(\overline{\lambda} + \mathbf{A}_k^*\right) \phi_0^* = 0,\ \phi_0^* + \left(\overline{\lambda} + \mathbf{A}_k^*\right) \phi_1^* = 0, ..., \phi_{L-1}^* + \left(\overline{\lambda} + \mathbf{A}_k^*\right) \phi_L^* = 0.$$

Folosind rezultatele de mai sus, putem presupune că $(\phi_0^*)'''(1) > 0$. Mai departe, înlocuind eventual ϕ_l^* cu $\phi_l^* + \mu_l \phi_0^*$, $\mu_l \in \mathbb{R}_+$, suficient de mare, $l = 1, ..., L$, putem presupune, de asemenea, că

$$\Re(\phi_l^*)'''(1) > 0,\ l = 1, ..., L,$$

după cum doream. $\square$

În final, demonstrăm că operatorii liniari Dirichlet D_k, introduşi în (1.1.27), sunt continui de la $\mathbb{C}$ în H. Mai precis avem următorul rezultat.

Propoziţia 1.1.1 *Pentru toţi $0 < |k| \leq S$, D_k este operator liniar continuu de la $\mathbb{C}$ în H.*

Demonstraţie. Fie (ψ_n) un şir de numere complexe ce tinde la zero pentru n tinzând la infinit. Din definiţie $H^4(0,1) \ni D_k \psi_n := q_n$ este soluţia ecuaţiei

$$\begin{cases} \theta_k q_n + \mathcal{F}_k q_n = 0, \forall y \in (0,1), \\ q_n'(0) = q_n'(1) = 0,\ q_n(0) = 0,\ q_n(1) = \psi_n. \end{cases} \tag{1.1.45}$$

Sau, echivalent, din (1.1.13)

$$\begin{cases} \theta_k q_n + \nu q_n'''' - (2\nu k^2 + \mathrm{i}kU^e) q_n'' \\ \qquad + k(\nu k^3 + \mathrm{i}k^2 U^e + \mathrm{i}(U^e)'') q_n = 0,\ y \in (0,1), \\ q_n'(0) = q_n'(1) = 0,\ q_n(0) = 0,\ q_n(1) = \psi_n. \end{cases} \tag{1.1.46}$$

Înmulţind scalar ecuaţia (1.1.46) cu q_n, obţinem

$$\begin{aligned} \theta_k \|q_n\|^2 + q_n'''(1)\psi_n + \nu \|q_n''\|^2 + \int_0^1 (2\nu k^2 + \mathrm{i}kU^e(y)) |q_n'(y)|^2 dy \\ + \mathrm{i}k \int_0^1 (U^e)'(y) q_n'(y) \overline{q}_n(y) dy \\ + \nu k^4 \|q_n\|^2 + \mathrm{i} \left(\int_0^1 (k^3 U^e(y) + k(U^e)''(y)) |q_n(y)|^2 dy \right) = 0. \end{aligned} \tag{1.1.47}$$

Luând partea reală a relaţiei (1.1.47), obţinem

$$\theta_k\|q_n\|^2 + \Re\left(q_n'''(1)\psi_n\right) + \nu\|q_n''\|^2 + 2\nu k^2\|q_n'\|^2 + \nu k^4\|q_n\|^2 = \\ = -\Re\left(\mathrm{i}k\int_0^1 (U^e)'(y)q_n'(y)\overline{q}_n(y)dy\right). \tag{1.1.48}$$

Avem

$$\begin{aligned} -\Re\left(\mathrm{i}k\int_0^1 (U^e)'(y)q_n'(y)\overline{q}_n(y)dy\right) &\le \left|\mathrm{i}k\int_0^1 (U^e)'(y)q_n'(y)\overline{q}_n(y)dy\right| \\ &\le |k|\int_0^1 \left|(U^e)'(y)q_n'(y)q_n(y)\right| dy. \end{aligned} \tag{1.1.49}$$

Luând în inegalitatea aritmetico-geometrică

$$|\alpha\beta| \le \frac{1}{2}\left(\nu|k||\alpha|^2 + \frac{1}{\nu|k|}|\beta|^2\right),$$

$\alpha = q_n'(y)$ şi $\beta = (U^e)'(y)q_n(y)$, din (1.1.49), rezultă

$$\begin{aligned} &|k|\int_0^1 \left|(U^e)'(y)q_n'(y)q_n(y)\right| dy \\ &\quad\le \frac{1}{2}\nu k^2\int_0^1 |q_n'(y)|^2dy + \frac{1}{2\nu}\int_0^1 |(U^e)'(y)|^2|q_n(y)|^2dy \\ &\quad\le \frac{1}{2}\nu k^2\|q_n'\|^2 + \frac{a^2}{8\nu^3}\|q_n\|^2 \\ &\quad\le 2\nu k^2\|q_n'\|^2 + \frac{a^2}{8\nu^3}\|q_n\|^2. \end{aligned} \tag{1.1.50}$$

Deci, din (1.1.48), (1.1.49) şi (1.1.50), găsim că

$$\left(\theta_k - \frac{a^2}{8\nu^3}\right)\|q_n\|^2 + \Re\left(q_n'''(1)\psi_n\right) \le 0. \tag{1.1.51}$$

Trecem la limită după n în relaţia (1.1.51) şi obţinem

$$0 \le \left(\theta_k - \frac{a^2}{8\nu^3}\right)\lim_{n\to\infty}\|q_n\|^2 \le 0,$$

deoarece $\psi_n \to 0$ şi θ_k este suficient de mare, astfel încât $\theta_k - \frac{a^2}{8\nu^3} \ge 0$.

Prin urmare, $\lim\limits_{n\to\infty}\|q_n\| = 0$. Astfel, am obţinut că: dacă $\psi_n \to 0$ în $\mathbb{C}$ atunci $q_n = D_k\psi_n \to 0$ în H. Deoarece D_k este liniar, deducem că D_k este continuu de la $\mathbb{C}$ în H, astfel demonstraţia este completă. □

1.1.4 Stabilizare feedback pentru sistemul echivalent (1.1.29)

Vom demonstra că există un control care stabilizează asimptotic exponenţial sistemul (1.1.29), după care, vom arăta că acesta poate fi ales în formă feedback. Pentru simplitate, vom omite simbolul ˜ (deoarece nu este nici un pericol de confuzie), de asemenea vom face si următoarele notaţii

$$z_k := L_k v_k,\ \mathbf{B}_k := (\theta_k + \tilde{F}_k) D_k. \tag{1.1.52}$$

Cu aceste notaţii, ecuaţia (1.1.29) devine

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} z_k(t) + \mathbf{A}_k z_k(t) = \mathbf{B}_k \psi_k(t),\ t > 0, \\ z_k(0) = z_{0k}, \end{cases} \tag{1.1.53}$$

unde $z_{0k} = L_k v_k^0$.

Pentru început, vom demonstra următorul rezultat.

Teorema 1.1.1 *Pentru toţi* $0 < |k| \leq S$, *există un control* ψ_k, *astfel încât soluţia corespunzătoare* z_k *a sistemului* (1.1.53) *şi controlul au următoarea descreştere exponenţială*

$$\left|\frac{d}{dt}\psi_k(t)\right| + |\psi_k(t)| \leq C_{\alpha_1} e^{-\alpha_1 t}\|z_{0k}\|, \|z_k(t)\| \leq C_{\alpha_0} e^{-\alpha_0 t}\|z_{0k}\|, \forall t \geq 0,$$

unde α_0 *este dat de relaţia* (1.1.56) *de mai jos*

$$0 < \alpha_0 < \min_{0<|k|\leq S} \{|\Re \lambda_{N_k+1}|\},$$

$\alpha_1 > 0$ *este dat de Lema 1.1.3 de mai jos, iar* C_{α_0}, C_{α_1} *sunt nişte constante pozitive.*

În subsecţiunea anterioară, am notat autovalorile operatorului $-\mathbf{A}_k$ cu $\lambda_j^k, j = 1, 2, ...,$ şi autofuncţiile corespunzătoare cu $\phi_j^k, j = 1, 2, ...$ De asemenea, am notat autofuncţiile operatorului dual $-\mathbf{A}_k^*$, a lui $-\mathbf{A}_k$, cu $\phi_j^{*k}, j = 1, 2, ...$ Mai mult, am văzut că operatorul $-\mathbf{A}_k^*$ are un număr finit de autovalori instabile $(\overline{\lambda_j^k})_{j=1}^{N_k}$, pentru care, conform Lemei 1.1.2, putem alege autofuncţiile corespunzătoare, astfel încât

$$\Re(\phi_j^{k*})'''(1) > 0,\ \forall j = 1, ..., N_k,\ \forall\ 0 < |k| \leq S. \tag{1.1.54}$$

Notăm cu $X_{N_k}^u := linspan \left\{\phi_j^k\right\}_{j=1}^{N_k}$ şi cu $X_{N_k}^s := linspan \left\{\phi_j^k\right\}_{j=N_k+1}^{\infty}$. Introducem P_{N_k}, proiecţia pe spaţiul $X_{N_k}^u$, şi operatorul adjunct $P_{N_k}^*$ (vezi (4.1.2) din Apendix), definite astfel

$$P_{N_k} := -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\lambda I + \mathbf{A}_k)^{-1} d\lambda \text{ şi } P_{N_k}^* := -\frac{1}{2\pi i}\int_{\overline{\Gamma}} (\lambda I + \mathbf{A}_k^*)^{-1} d\lambda.$$

Notăm cu

$$-\mathbf{A}_{N_k}^u := P_{N_k}(-\mathbf{A}_k) \text{ şi } -\mathbf{A}_{N_k}^s := (I - P_{N_k})(-\mathbf{A}_k), \tag{1.1.55}$$

restricţiile lui $-\mathbf{A}_k$ la $X_{N_k}^u$, respectiv $X_{N_k}^s$. Avem că spectrul lui $-\mathbf{A}_k$ pe $X_{N_k}^u$ şi pe $X_{N_k}^s$ coincide cu $\left\{\lambda_j^k\right\}_{j=1}^{N_k}$, respectiv $\left\{\lambda_j^k\right\}_{j=N_k+1}^{\infty}$ (vezi Teorema 4.1.3 din Apendix). Mai departe, deoarece $-\mathbf{A}_k$ generează un C_0-semigrup analitic pe H, atunci restricţia sa $-\mathbf{A}_{N_k}^s$ la $X_{N_k}^s$

generează, de asemenea, un C_0-semigrup analitic pe $X^s_{N_k}$. Prin urmare, via Teorema 4.2.2 din Apendix, avem că $-\mathbf{A}^s_{N_k}$ satisface următoarea descreştere exponenţială pe $X^s_{N_k}$

$$\|e^{-t\mathbf{A}^s_{N_k}}\|_{L(H,H)} \leq C_{\alpha_0} e^{-\alpha_0 t},\ \forall t \geq 0, \tag{1.1.56}$$

pentru un $0 < \alpha_0 < |\Re \lambda_{N_k+1}|$.

În acord cu ce am introdus mai sus, sistemul (1.1.53) poate fi descompus astfel

$$z_k = z_{N_k} + \zeta_{N_k},\ \text{unde } z_{N_k} := P_{N_k} z_k \text{ şi } \zeta_{N_k} := (I - P_{N_k}) z_k,$$

aplicând proiectorii P_{N_k} şi $I - P_{N_k}$ sistemului (1.1.53), obţinem

$$\text{pe } X^u_{N_k} : \begin{cases} \frac{d}{dt} z_{N_k} + \mathbf{A}^u_{N_k} z_{N_k} = P_{N_k}(\mathbf{B}_k \psi_k), \\ \\ z_{N_k}(0) = P_{N_k} z_{0k}, \end{cases} \tag{1.1.57}$$

respectiv

$$\text{pe } X^s_{N_k} : \begin{cases} \frac{d}{dt} \zeta_{N_k} + \mathbf{A}^s_{N_k} \zeta_{N_k} = (I - P_{N_k})(\mathbf{B}_k \psi_k), \\ \\ \zeta_{N_k}(0) = (I - P_{N_k}) z_{0k}. \end{cases} \tag{1.1.58}$$

Datorită relaţiei (1.1.56), intuim că soluţia sistemului (1.1.58) (care este partea stabilă a sistemului (1.1.53)) descreşte exponenţial la infinit, prin urmare, pentru a stabiliza sistemul (1.1.53) trebuie să stabilizăm doar componenta instabilă (1.1.57). Sistemul (1.1.57) este însă un sistem controlat intern, finit-dimensional, iar stabilizabilitatea lui este garantată de rezultatul de tip "unică continuare" din Lema 1.1.2.

Lema 1.1.3 *Pentru toţi $0 < |k| \leq S$, există $\alpha_1, C_{\alpha_1} > 0$ şi un control ψ_k astfel încât, odată introdus în sistemul* (1.1.57)*, soluţia corespunzătoare satisface estimările*

$$\|z_{N_k}(t)\| \leq C_{\alpha_1} e^{-\alpha_1 t} \|z_{0k}\|,\ \forall t \geq 0.$$

Mai mult, controlul ψ_k poate fi ales de clasă C^1, astfel încât

$$\left| \frac{d}{dt} \psi_k(t) \right| + |\psi_k(t)| \leq C_{\alpha_1} e^{-\alpha_1 t} \|z_{0k}\|,\ \forall t \geq 0.$$

Demonstraţie. Descompunem z_{N_k}, astfel

$$z_{N_k}(t, y) = \sum_{j=1}^{M_k} z^k_j(t) \phi^k_j(y),$$

unde $z^k_j(t) \in \mathbb{C}, \forall t \geq 0, j = 1, ..., M_k$. Introducem acest z_{N_k} în ecuaţia (1.1.57), şi obţinem

$$\sum_{j=1}^{M_k} \left\{ \frac{d}{dt} z^k_j(t) \phi^k_j + z^k_j(t) \mathbf{A}^u_{N_k} \phi^k_j \right\} = P_{N_k}(\mathbf{B}_k \psi_k).$$

Putem alege autofuncţiile ϕ_j^k, astfel încât sistemul $\left\{\phi_i^k, \phi_j^{k*}\right\}_{i,j=1}^{N_k}$ să fie biortonormal în H. Înmulţim scalar ecuaţia de mai sus cu ϕ_l^{k*}. Obţinem

$$\frac{d}{dt} z_l^k + \sum_{j=1}^{M_k} \left\langle \mathbf{A}_{N_k}^u \phi_j^k, \phi_l^{k*} \right\rangle z_j^k = \left\langle P_{N_k} \mathbf{B}_k \psi_k, \phi_l^{k*} \right\rangle, \ l = 1, ..., M_k. \tag{1.1.59}$$

Fără a micşora generalitatea, putem presupune că $P_{N_k}^*(\phi_l^{k*}) = \phi_l^{k*}, \ l = 1, ..., M_k$ (aceasta este datorită idempotenţei proiectorului $P_{N_k}^*$). Avem

$$\left\langle P_{N_k} \mathbf{B}_k \psi_k, \phi_l^{k*} \right\rangle = \left\langle \mathbf{B}_k \psi_k, P_{N_k}^* \phi_l^{k*} \right\rangle = \psi_k \mathbf{B}_k^* \phi_l^{k*}$$

$$= \text{ din (1.1.28) } = \psi_k \nu (\phi_l^{k*})'''(1), \ l = 1, ..., M_k.$$

Notăm cu

$$b_l^k := \nu (\phi_l^{k*})'''(1), \ l = 1, ..., M_k. \tag{1.1.60}$$

De asemenea, notăm cu

$$\mathcal{Z}_k := \begin{pmatrix} z_1^k \\ z_2^k \\ ... \\ z_{M_k}^k \end{pmatrix}, B_k := \begin{pmatrix} b_1^k \\ b_2^k \\ ... \\ b_{M_k}^k \end{pmatrix}, \tag{1.1.61}$$

şi

$$\Lambda_k = \begin{pmatrix} \left\langle \mathbf{A}_{N_k}^u \phi_1^k, \phi_1^{k*} \right\rangle & \left\langle \mathbf{A}_{N_k}^u \phi_2^k, \phi_1^{k*} \right\rangle & ... & \left\langle \mathbf{A}_{N_k}^u \phi_{M_k}^k, \phi_1^{k*} \right\rangle \\ \left\langle \mathbf{A}_{N_k}^u \phi_1^k, \phi_2^{k*} \right\rangle & \left\langle \mathbf{A}_{N_k}^u \phi_2^k, \phi_2^{k*} \right\rangle & ... & \left\langle \mathbf{A}_{N_k}^u \phi_{M_k}^k, \phi_2^{k*} \right\rangle \\ ... & ... & ... & ... \\ \left\langle \mathbf{A}_{N_k}^u \phi_1^k, \phi_{M_k}^{k*} \right\rangle & ... & ... & \left\langle \mathbf{A}_{N_k}^u \phi_{M_k}^k, \phi_{M_k}^{k*} \right\rangle \end{pmatrix}. \tag{1.1.62}$$

Cu aceste notaţii, ecuaţia (1.1.59) devine

$$\frac{d}{dt} \mathcal{Z}_k + \Lambda_k \mathcal{Z}_k = B_k \psi_k. \tag{1.1.63}$$

Afirmăm că, pentru un $\mu > 0$, suficient de mare, controlul $\psi_k = -\mu \Re B_k^T \mathcal{Z}_k$ stabilizează exponenţial sistemul controlat (1.1.63). Unde $\Re B_k^T$ este componenta reală a transpusei lui B_k, adică,

$$\Re B_k^T := \begin{pmatrix} \Re b_1^k & \Re b_2^k & ... & \Re b_{M_k}^k \end{pmatrix}. \tag{1.1.64}$$

Deoarece, din Lema 1.1.2, avem $\Re b_l^k > 0, l = 1, ..., M_k$, putem alege $\mu > 0$ suficient de mare, astfel încât

$$\Re(\Lambda_k + \mu B_k \Re B_k^T) \in \mathcal{M}_{M_k}(\mathbb{R}_+).$$

Prin urmare, $-\left(\Lambda_k + \mu B_k \Re B_k^T\right)$ este o matrice hurwitziană. Ceea ce implică stabilitatea exponenţială a sistemului (1.1.63), odată introdus controlul $\psi_k = -\mu \Re B_k^T \mathcal{Z}_k$.

Acum, dacă ne întoarcem de la $\mathbb{C}^{N_k}$ la $X_{N_k}^u$, avem că există un vector Ξ_k în $X_{N_k}^u$, astfel încât $\psi_k = \langle z_{N_k}, \Xi_k \rangle$, pentru care sistemul buclă închisă corespunzător lui (1.1.57) este dat de

$$\frac{d}{dt} z_{N_k} + \mathbf{A}_{N_k}^u z_{N_k} = \langle z_{N_k}, \Xi_k \rangle, \tag{1.1.65}$$

rescris astfel

$$\frac{d}{dt}z_{N_k} = \hat{\mathbf{A}}^u z_{N_k}, z_{N_k} = e^{\hat{\mathbf{A}}^u t} z_{N_k}(0), \tag{1.1.66}$$

unde $\hat{\mathbf{A}}^u := -\mathbf{A}^u_{N_k} + \Xi_k$.

În concluzie, există $\alpha_1 > 0$ şi $\Xi_k \in X^u_{N_k}$ pentru care soluţia sistemului (1.1.57) corespunzătoare controlului $\psi_k = \langle z_{N_k}, \Xi_k \rangle$, satisface estimările

$$\begin{aligned}|\psi_k(t)| + \|z_{N_k}(t)\| &= \|q_k z_{N_k}(t)\| + \|z_{N_k}(t)\| \\ &\leq (|q_k| + 1)\|e^{\hat{\mathbf{A}}^u t} z_{N_k}(0)\| \\ &\leq C_{\alpha_1} e^{-\alpha_1 t}\|z_{N_k}(0)\|,\ t \geq 0.\end{aligned} \tag{1.1.67}$$

Mai mult, controlul ψ_k este de clasă C^1 şi satisface descreşterea exponenţială dorită, deoarece soluţia z_{N_k} este de clasă C^1 (în variabila t). □

Folosind rezultatul din Lema 1.1.3 şi observaţiile anterioare, demonstraţia Teoremei 1.1.1 este imediată.

Demonstraţia Teoremei 1.1.1. Din Lema 1.1.3 avem că, pentru toţi $0 < |k| \leq S$, există un control ψ_k care stabilizează exponenţial sistemul finit-dimensional (1.1.57), pe $X^u_{N_k}$. Reamintim sistemul infinit-dimensional (1.1.58) pe $X^s_{N_k}$:

$$\frac{d}{dt}\zeta_{N_k} + \mathbf{A}^s_{N_k}\zeta_{N_k} = (I - P_{N_k})(\mathbf{B}_k\psi_k), \zeta_{N_k}(0) = (I - P_{N_k})z_{0k}.$$

Estimăm în H formula variaţiei constantelor, corespunzătoare

$$\zeta_{N_k}(t) = e^{-\mathbf{A}^s_{N_k}t}\zeta_{N_k}(0) + \int_0^t e^{-\mathbf{A}^s_{N_k}(t-\tau)}(I - P_{N_k})(\mathbf{B}_k\psi_k)d\tau. \tag{1.1.68}$$

Reamintim că $\mathbf{B}_k = (\theta_k + F_k)D_k$. Deci, relaţia (1.1.68) devine

$$\begin{aligned}\zeta_{N_k}(t) = e^{-\mathbf{A}^s_{N_k}t}\zeta_{N_k}(0) &+ \int_0^t e^{-\mathbf{A}^s_{N_k}(t-\tau)}(I - P_{N_k})((\theta_k + F_k)D_k\psi_k)d\tau \\ = e^{-\mathbf{A}^s_{N_k}t}\zeta_{N_k}(0) &+ \int_0^t e^{-\mathbf{A}^s_{N_k}(t-\tau)}(I - P_{N_k})\theta_k D_k\psi_k d\tau \\ + \int_0^t & e^{-\mathbf{A}^s_{N_k}(t-\tau)}(I - P_{N_k})F_k D_k\psi_k d\tau.\end{aligned} \tag{1.1.69}$$

Din Propoziţia 1.1.1 ştim că $D_k : \mathbb{C} \to H$ este un operator liniar continuu. Prin urmare, în virtutea Lemei 1.1.3 şi a relaţiei (1.1.56), avem

$$\left|\int_0^t e^{-\mathbf{A}^s_{N_k}(t-\tau)}(I - P_{N_k})\theta_k D_k\psi_k d\tau\right| \leq \int_0^t C\|e^{-\mathbf{A}^s_{N_k}(t-\tau)}\||\psi_k|d\tau \tag{1.1.70}$$

$$\leq C\int_0^t e^{-\alpha_0(t-\tau)}e^{-\alpha_1\tau}\|z_{0k}\|d\tau \leq Ce^{-\alpha_0 t}\|z_{0k}\|,$$

pentru o constantă $C > 0$. Pentru cel de-al treilea termen al membrului drept al relaţiei (1.1.69), deoarece $-\mathbf{A}^s_{N_k} = -(I - P_{N_k})\mathbf{A}_k$ şi $\mathbf{A}_k = F_k L_k^{-1}$, avem că

$$\begin{aligned}\int_0^t e^{-\mathbf{A}^s_{N_k}(t-\tau)}(I - P_{N_k})F_k D_k \psi_k d\tau &= \int_0^t e^{-\mathbf{A}^s_{N_k}(t-\tau)}\mathbf{A}^s_{N_k} L_k D_k \psi_k d\tau \\ &= \int_0^t \frac{d}{d\tau}\left(e^{-\mathbf{A}^s_{N_k}(t-\tau)}\right) L_k D_k \psi_k d\tau \\ &= L_k D_k \psi_k(t) - e^{-\mathbf{A}^s_{N_k} t} L_k D_k \psi_k(0) \\ &\quad - \int_0^t e^{-\mathbf{A}^s_{N_k}(t-\tau)} L_k D_k \frac{d}{d\tau}\psi_k(\tau) d\tau.\end{aligned} \tag{1.1.71}$$

Relaţia (1.1.71), împreună cu (1.1.56) şi Lema 1.1.3, implică

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^t e^{-\mathbf{A}^s_{N_k}(t-\tau)}(I - P_{N_k})F_k D_k \psi_k d\tau\right| \\ &\leq Ce^{-\alpha_0 t}\|z_{0k}\| + Ce^{-\alpha_1 t}\|z_{0k}\| + C\int_0^t e^{-\alpha_0(t-\tau)}e^{-\alpha_1 \tau}\|z_{0k}\| d\tau \\ &\leq Ce^{-\alpha_0 t}\|z_{0k}\|.\end{aligned} \tag{1.1.72}$$

În final, din relaţiile (1.1.69), (1.1.70), (1.1.72) şi (1.1.56) combinate, rezultă

$$\|\zeta_{N_k}(t)\| \leq Ce^{-\alpha_0 t}\|z_{0k}\|, \forall t \geq 0. \tag{1.1.73}$$

Reamintind că $z_k = z_{N_k} + \zeta_{N_k}$, avem, în virtutea Lemei 1.1.3 şi a relaţiei (1.1.73), că

$$\|z_k(t)\| \leq C_{\alpha_0} e^{-\alpha_0 t}\|z_{0k}\|, \ \forall t \geq 0,$$

astfel demonstraţia este completă. □

Remarca 1.1.5 Teorema 1.1.1 spune că pentru toţi $0 < |k| \leq S$, există un control ψ_k astfel încât, odată introdus în ecuaţia (1.1.53), soluţia corepunzătoare satisface estimările

$$\|z_k(t)\| \leq C_{\alpha_0} e^{-\alpha_0 t}\|z_{0k}\|, \forall t \geq 0. \tag{1.1.74}$$

Ţinând cont de relaţia dintre norme

$$\|L_k^{-1} \cdot \| \leq C_k \| \cdot \|,$$

pentru nişte $C_k > 0$, deducem din (1.1.74) că

$$\|L_k^{-1} z_k(t)\| \leq C_k C_{\alpha_0} e^{-\alpha_0 t}\|z_{0k}\|, \ t \geq 0. \tag{1.1.75}$$

Putem presupune că atât $\|L_k^{-1} z_{0k}\|$ cât şi $\|z_{0k}\|$ sunt diferite de zero. În caz contrar, se poate arăta uşor că avem în mod necesar $v_k \equiv 0$. Prin urmare, (1.1.75) implică

$$\|L_k^{-1} z_k(t)\| \leq C_k C_{\alpha_0} \frac{\|z_{0k}\|}{\|L_k^{-1} z_{0k}\|} e^{-\alpha_0 t}\|L_k^{-1} z_{0k}\|, \forall t \geq 0. \tag{1.1.76}$$

Relaţia (1.1.76) spune că controlul ψ_k stabilizează sistemul (1.1.53) în topologia dată de dualul $X := (H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1))^*$. Ceea ce sugerează să considerăm sistemul (1.1.53) în spaţiul X şi să căutăm o reprezentare feedback a controlului ψ_k, folosind o tehnică standard, şi anume: minimizarea unei funcţionale de cost. Mai precis, avem următorul rezultat

Teorema 1.1.2 *Pentru toţi* $0 < |k| \leq S$*, există un control feedback de forma*

$$\psi_k = -\nu(L_k^{-2} R_k z_k)'''(1)$$

astfel încât, odată introdus în ecuaţia (1.1.53)*, soluţia corespunzătoare sistemului cu buclă închisă* (1.1.53) *satisface*

$$\|L_k^{-1} z_k(t)\| \leq Ce^{-\gamma t} \|L_k^{-1} z_{0k}\|, \ \forall t \geq 0,$$

pentru nişte constante $C_{\gamma_k}, \gamma_k > 0$*. Aici* $R_k \in L(X, X)$ *este un operator liniar auto-adjunct, astfel încât*

(i) $R_k : H \to H$*,*

(ii) R_k *satisface următoarea ecuaţie algebrică Riccati în* H

$$\left\langle L_k^{-1} R_k z_{0k}, L_k^{-1} \boldsymbol{A}_k z_{0k} \right\rangle + \frac{1}{2}\nu^2 |(L_k^{-2} R_k z_{0k})'''(1)|^2 = \frac{1}{2} \|L_k^{-1} z_{0k}\|^2, \forall z_{0k} \in H.$$

Remarca 1.1.6 Observăm că din (i) avem $R_k z_{0k} \in H$ pentru toţi $z_{0k} \in H$, deci, $L_k^{-2} R_k z_{0k} \in H^4(0,1)$. Prin urmare, are sens derivata de ordin trei $(L_k^{-2} R_k z_{0k})'''(1)$ în ecuaţia algebrică Riccati din (ii).

Demonstraţie. Căutăm o reprezentare feedback a controlului din Lema 1.1.3, via următoarea problemă liniară de control optimal

$$\phi(z_{0k}) := \min \frac{1}{2} \int_0^\infty (\|L_k^{-1} z_k(t)\|^2 + |\psi_k(t)|^2) dt, \tag{1.1.77}$$

supusă condiţiilor $\psi_k \in L^2(0, \infty; X)$ şi

$$\frac{d}{dt} z_k(t) + \mathbf{A}_k z_k(t) = \mathbf{B}_k \psi_k, z_k(0) = z_{0k}. \tag{1.1.78}$$

Să arătăm, pentru început, că problema de control optimal este bine-pusă în spaţiul stărilor X, adică $\phi(z_{0k}) < \infty, \forall z_{0k} \in X$. Trebuie demonstrat ca dacă $z_{0k} \in X$ arbitrar, există un control $\psi_k \in L^2(0, \infty; X)$, astfel încât soluţia corespunzătoare z_k pentru (1.1.78) satisface $z_k \in L^2(0, \infty; X)$. Într-adevăr, Remarca 1.1.5 ne asigură rezultatul dorit (vezi relaţia (1.1.76)). Din stabilitatea exponenţială deducem că există o constantă $a_2 > 0$ astfel încât

$$\phi(z_{0k}) \leq a_2 \|L_k^{-1} z_{0k}\|^2, \forall z_{0k} \in X. \tag{1.1.79}$$

Deoarece aplicaţia $\phi(z) \longmapsto z \in X$ este continuă, avem

$$\|L_k^{-1} z\| \leq c\phi(z),$$

pentru un $c > 0$. Aceasta, împreună cu relaţia (1.1.79), ne asigură că există constantele a_1 şi a_2 pozitive, pentru care

$$a_1\|z_{0k}\|_X^2 \leq \phi(z_{0k}) \leq a_2\|z_{0k}\|_X^2, \forall z_{0k} \in X. \tag{1.1.80}$$

Aşadar, via (1.1.80), există un operator liniar ne-negativ şi auto-adjunct $R_k : X \to X$ asociat cu forma simetrică liniară $\phi(\cdot)$, astfel încât

$$\phi(z_{0k}) = \frac{1}{2}\left\langle R_k z_{0k}, z_{0k}\right\rangle_X, \forall z_{0k} \in X,\ R_k \in L(X, X). \tag{1.1.81}$$

Din principiul programării dinamice, pentru toţi $0 < t < T$, soluţia optimală (ψ_k^*, z_k^*) pentru (1.1.77)-(1.1.78) este, de asemenea, optimală şi pentru următoarea problemă de optimizare

$$\begin{array}{c}\min\left\{\frac{1}{2}\int_t^T(\|L_k^{-1}z_k(s)\|^2 + |\psi_k(s)|^2)ds + \phi(z_k(T))\right\},\\ z_k \text{ satisface (1.1.78)},\ z_k(t) = z_k^*(t),\end{array} \tag{1.1.82}$$

$z_k^*(t) \in X$ drept condiţie iniţială, unde $z_k^*(T) \in X$ de asemenea. Din principiul de maxim, deducem că

$$\psi_k^*(t) = \mathbf{B}_k^* q_T = \nu q_T'''(1),\ \text{a.p.t. } t \in (0, T),$$

$$L_k^{-2}R_k z_k^*(t) = -q_T(t), \forall t \in [0, T], \tag{1.1.83}$$

$$\psi_k^*(t) = \mathbf{B}_k^*(L_k^{-2}R_k z_k^*(t)), \forall t \geq 0,$$

unde q_T este soluţia ecuaţiei duale

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}q_T - \mathbf{A}_k^* q_T = L_k^{-2}z_k^*, \forall t \in (0, T),\\ q_T(T) = -L_k^{-2}R_k z_k^*(T).\end{cases} \tag{1.1.84}$$

Să arătăm, în cele ce urmează, că $R_k : H \to H$. Mai precis, vom arăta că dacă z_k^* este soluţia optimală pentru (1.1.77)-(1.1.78) (care este optimală şi pentru (1.1.82)) cu $z_k^*(0) \in H$, atunci $R_k z_k^*(0) \in H$. Avem că $L_k^{-2}z_k^* \in L^2(0, T; H^4(0, 1))$. Din ecuaţia (1.1.84), din moment ce $-\mathbf{A}_k^*$ generează un C_0-semigrup analitic, ştim că

$$(T - t)^{\frac{1}{2}}q_T \in C([0, T); \mathcal{D}((-\mathbf{A}_k^*)^{\frac{3}{2}})).$$

Rezultă, $q_T(0) \in \mathcal{D}((-\mathbf{A}_k^*)^{\frac{3}{2}}) \subset H^6(0, 1)$, deoarece $\mathcal{D}(-\mathbf{A}_k^*) \subset H^4(0, 1)$. Astfel,

$$R_k z_k^*(0) = -L_k^2 q_T(0) \in H^2(0, 1) \subset H.$$

În final, demonstrăm că R_k este soluţie pentru o ecuaţie algebrică de tip Riccati. Pentru aceasta, din nou din principiul programării dinamice şi ecuaţia (1.1.81), avem

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left\langle Rz^*(t), z_k^*(t)\right\rangle_X &= \phi(z_k^*(t))\\ &= \frac{1}{2}\int_t^\infty(\|L_k^{-1}z_k^*(s)\|^2 + |\psi_k^*(s)|^2)ds,\ \forall t \geq 0.\end{aligned} \tag{1.1.85}$$

Diferenţiind (1.1.85) în t, uitilizând faptul că R_k este auto-adjunct pe X şi ecuaţia (1.1.78), rezultă

$$\left\langle L_k^{-1}\mathbf{A}_k z_k^*(t), L_k^{-1}R_k z_k^*(t)\right\rangle + \frac{1}{2}\nu^2|(L_k^{-2}R_k z_k^*(t))'''(1)|^2 = \frac{1}{2}\|L_k^{-1}z_k^*(t)\|^2, t \geq 0. \quad (1.1.86)$$

Ceea ce implică, pentru $t = 0$, că R_k satisface următoarea ecuaţie Riccati

$$\left\langle L_k^{-1}\mathbf{A}_k z_{0k}, L_k^{-1}R_k z_{0k}\right\rangle + \frac{1}{2}\nu^2|(L_k^{-2}R_k z_{0k})'''(1)|^2 = \frac{1}{2}\|L_k^{-1}z_{0k}\|^2,\ \forall z_{0k} \in H. \quad (1.1.87)$$

Utilizând teorema clasică a lui Datko, obţinem şi descreşterile exponenţiale enunţate. □

Remarca 1.1.7 Revenind la ecuaţia (1.1.29) şi având în vedere notaţiile (1.1.52), Teorema 1.1.2 spune că pentru toţi $0 < |k| \leq S$, există constantele $C_{\gamma_k}, \gamma_k > 0$ şi un control feedback ψ_k, de forma

$$\psi_k(t) = -\nu(L_k^{-2}R_k L_k^{-1}v_k(t))'''(1)$$

astfel încât, odată introdus în ecuaţia (1.1.29), soluţia corespunzătoare sistemului cu buclă închisă (1.1.29) satisface descreşterea exponenţială

$$\|v_k(t)\|^2 \leq C_{\gamma_k}e^{-\gamma_k t}\|v_k^0\|^2, \forall t \geq 0. \quad (1.1.88)$$

În cele ce urmează, ne propunem să arătăm că şi soluţia u_k a ecuaţiei (1.1.5) satisface o descreştere exponenţială de tipul celei de mai sus. Pentru aceasta, vom demonstra de fapt că v_k' descreşte asimptotic exponenţial în norma H, după care, folosind relaţia dată de divergenţa zero, obţinem descreşterea dorită, pentru u_k. Mai întâi, observăm că ψ_k satisface următoarea estimare

$$\left|\frac{d}{dt}\psi_k(t)\right|^2 + |\psi_k(t)|^2 \leq C_\mu e^{-\mu t}\|v_k^0\|^2,\ t \geq 0, \quad (1.1.89)$$

pentru nişte $C_\mu, \mu > 0$, datorită formei sale feedback şi a relaţiei (1.1.88). Notăm cu $V_k = V_k(t, y)$, următoarea funcţie

$$V_k(t, y) = v_k(t, y) + (2y^3 - 3y^2)\psi_k(t),\ t \geq 0, y \in (0, 1).$$

Din (1.1.11), observăm imediat că V_k verifică sistemul

$$\begin{cases} (-V_k'' + k^2V_k)_t + \nu V_k'''' - (2\nu k^2 + \mathrm{i}kU^e)V_k'' + k(\nu k^3 + \mathrm{i}k^2U^e + \mathrm{i}(U^e)'')V_k \\ = (2k^2y^3 - 3k^2y^2 - 12y + 6)\frac{d}{dt}\psi_k - (2\nu k^2 + \mathrm{i}kU^e)(12y - 6)\psi_k \\ + k(\nu k^3 + \mathrm{i}k^2U^e + \mathrm{i}(U^e)'')(2y^3 - 3y^2)\psi_k,\ \forall t \geq 0,\ \forall y \in (0, 1), \\ \\ V_k'(t, 0) = V_k'(t, 1) = 0, V_k(t, 0) = 0, V_k(t, 1) = 0,\ \forall t \geq 0. \end{cases} \quad (1.1.90)$$

Înmulţim scalar ecuaţia (1.1.90) cu V_k, luăm partea reală a rezultatului, şi obţinem

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|V_k'\|^2 + k^2\|V_k\|^2) + \nu\|V_k''\|^2 + 2\nu k^2\|V_k'\|^2 + \nu k^4\|V_k\|^2 \\
&= -\Re\left(\mathrm{i}k\int_0^1 (U^e)'V_k'\overline{V_k}dy\right) \\
&+ \Re\left(\int_0^1 (2k^2y^3 - 3k^2y^2 - 12y + 6)\frac{d}{dt}\psi_k\overline{V_k}dy\right) \\
&- \Re\left(\int_0^1 (2\nu k^2 + \mathrm{i}kU^e)(12y-6)\psi_k\overline{V_k}dy\right) \\
&+ \Re\left(\int_0^1 k(\nu k^3 + \mathrm{i}k^2U^e + \mathrm{i}(U^e)'')(2y^3-3y^2)\psi_k\overline{V_k}dy\right).
\end{aligned} \tag{1.1.91}$$

De unde deducem că

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|V_k'\|^2 + k^2\|V_k\|^2) + \nu k^2(\|V_k'\|^2 + k^2\|V_k\|^2) \\
&\leq C_k^1\|V_k\|^2 + C_k^2|\frac{d}{dt}\psi_k|^2 + C_k^3|\psi_k|^2 + C_k^4\|V_k\|^2,\ t \geq 0,
\end{aligned} \tag{1.1.92}$$

pentru nişte $C_k^1, C_k^2, C_k^3, C_k^4 > 0$. Din (1.1.88), (1.1.89) şi forma lui V_k, avem că

$$\|V_k(t)\|^2 \leq C_k^5 e^{-\min(\mu,\gamma_k)t}\|v_k^0\|^2,\ t \geq 0, \tag{1.1.93}$$

pentru un $C_k^5 > 0$. Urmează imediat din (1.1.92), împreună cu (1.1.93) şi (1.1.89), că

$$\|V_k'(t)\|^2 + k^2\|V_k\|^2 \leq C_k^7 e^{-\min(\mu,\gamma_k)t}\|v_k^0\|^2,\ t \geq 0,$$

pentru un $C_k^7 > 0$. Prin urmare, folosind din nou (1.1.89), obţinem într-un final că

$$\|v_k'(t)\|^2 \leq C_k^8 e^{-\min(\mu,\gamma_k)t}\|v_k^0\|^2,\ t \geq 0,$$

sau, ţinând cont de divergenţa zero

$$\|u_k(t)\|^2 \leq C_k^8 e^{-\min(\mu,\gamma_k)t}\|v_k^0\|^2,\ t \geq 0, \tag{1.1.94}$$

pentru un $C_k^8 > 0$. Renotând $C_{\gamma_k} := C_k^8 + C_{\gamma_k}$ şi $\gamma_k := \min(\gamma_k, \mu)$, conchidem din (1.1.88) şi (1.1.94)

$$\|u_k(t)\|^2 + \|v_k(t)\|^2 \leq C_{\gamma_k}e^{-\gamma_k t}\left(\|u_k^0\|^2 + \|v_k^0\|^2\right),\ t \geq 0, 0 < |k| \leq S. \tag{1.1.95}$$

1.1.5 Stabilizare feedback pentru sistemul liniar (1.1.4)

Vom demonstra următoarea teoremă de stabilizare feedback pentru sistemul liniarizat (1.1.4), care este de fapt si rezultatul principal al acestei secţiuni.

Teorema 1.1.3 *Există un control feedback finit-dimensional* Ψ *de forma*

$$\Psi(t,x) = -\nu \sum_{0<|k|\leq S} (L_k^{-2} R_k L_k v_k(t))'''(1) e^{\mathrm{i}kx}, \tag{1.1.96}$$

unde

$$v_k(t,y) = \int_0^{2\pi} v(t,x,y) e^{-\mathrm{i}kx} dx,\ 0<|k|\leq S$$

astfel încât, odată introdus în ecuaţia (1.1.4)*, soluţia corespunzătoare sistemului cu buclă închisă* (1.1.4) *satisface*

$$\|(u(t),v(t))\|^2 \leq C_\alpha e^{-\alpha t}\|(u^0,v^0)\|^2,\ t\geq 0,$$

pentru nişte constante $C_\alpha, \alpha > 0$*. Aici* $R_k : X \to X$ *sunt operatorii liniari auto-adjuncţi introduşi în Teorema 1.1.2, care verifică*

- $R_k : H \to H$,
- R_k *satisfac ecuaţii algebrice Riccati în* H

$$\left\langle L_k^{-1} R_k z_{0k}, L_k^{-1} \boldsymbol{A}_k z_{0k}\right\rangle + \frac{1}{2}\nu^2 |(L_k^{-2} R_k z_{0k})'''(1)|^2 = \frac{1}{2}\|L_k^{-1} z_{0k}\|^2, \forall z_{0k}\in H,$$

pentru toţi $0<|k|\leq S$*,* S *dat de* (1.1.19)*.* $\boldsymbol{A}_k = F_k L_k^{-1}$*, unde* F_k *este dat de* (1.1.13) *şi* L_k *este dat de* (1.1.12)*.* $X = (H^2(0,1)\cap H_0^1(0,1))^*$*.*

Demonstraţie. Definim următorul control feedback (vezi Remarca 1.1.7)

$$\Psi(t,x) := -\nu \sum_{0<|k|\leq S} (L_k^{-2} R_k L_k v_k(t))'''(1) e^{ikx}. \tag{1.1.97}$$

Aici, R_k este dat de Teorema 1.1.2.

Dacă introducem acest control în sistemul (1.1.4), avem din relaţia (1.1.8) că modurile Fourier u_0 şi v_0 satisfac

$$\|u_0(t)\|^2 \leq e^{-2C_0\nu t}\|u_0^0\|^2 \text{ şi } v_0(t) = 0,\ \forall t\geq 0. \tag{1.1.98}$$

Mai departe, din Remarca 1.1.7, avem că modurile Fourier u_k şi v_k, pentru toţi $0<|k|\leq S$, satisfac

$$\|u_k(t)\|^2 + \|v_k(t)\|^2 \leq C_{\gamma_k} e^{-\gamma_k t}\left(\|u_k^0\|^2 + \|v_k^0\|^2\right), \forall t\geq 0, \tag{1.1.99}$$

(vezi (1.1.95)). În sfârşit, din Remarca 1.1.1, avem că modurile Fourier u_k şi v_k, pentru toţi $|k|>S$, satisfac

$$\|u_k(t)\|^2 + \|v_k(t)\|^2 \leq e^{-\nu S^2 t}\left(\|u_k^0\|^2 + \|v_k^0\|^2\right), \forall t\geq 0, \tag{1.1.100}$$

(vezi (1.1.24)). Deci, din (1.1.98)-(1.1.100), rezultă

$$\sum_k 2\pi\left(|u_k(t)|^2 + |v_k(t)|^2\right) \leq C_\alpha e^{-\alpha t}\sum_k\left(\|u_k^0\|^2 + \|v_k^0\|^2\right), \tag{1.1.101}$$

unde $C_\alpha := 2\pi \max\{C_{\gamma_k} : 0<|k|\leq S, 1\}$ şi $\alpha := \min\{\gamma_k : 0<|k|\leq S, 2C_0\nu, \nu S^2\}$.

Din definiţia normei din $(L_{2\pi}^2(Q))^2$ şi relaţia (1.1.101) obţinem, într-un final, că

$$\|(u(t),v(t))\|^2 \leq C_\alpha e^{-\alpha t}\|(u^0,v^0)\|^2, t\geq 0, \tag{1.1.102}$$

adică, descreşterea exponenţială anunţată. $\square$

1.2 Stabilizare feedback tangenţială a fluidelor periodice într-un canal doi-dimensional

Considerăm din nou un fluid incompresibil ce evoluează într-un canal dreptunghiular semi-infinit

$$(x, y) \in (-\infty, +\infty) \times (0, 1).$$

De data aceasta, însă, vom obţine stabilitatea profilului Poiseuille prin controale ce acţionează doar tangenţial la frontieră, pe peretele superior. Mai mult, condiţiile tangenţiale la frontieră ne perimt să arătăm că acelaşi control feedback ce stabilizează sistemul liniarizat, stabilizează local şi ecuaţiile Navier-Stokes neliniare, doi-dimensionale, într-un canal. Conţinutul acestei secţiuni este în totalitate format din rezultatele originale obţinute de către autor în lucrarea [65].

1.2.1 Asemănări şi deosebiri faţă de cazul controlului normal

Ecuaţiile ce guvernează mişcarea sunt aceleaşi ecuaţii Navier-Stokes, în $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} u_t - \nu\Delta u + uu_x + vv_y = p_x, \ x \in \mathbb{R}, \ y \in (0, 1), \\ v_t - \nu\Delta v + uv_x + vv_y = p_y, x \in \mathbb{R}, \ y \in (0, 1), \\ u_x + v_y = 0, \end{cases} \tag{1.2.1}$$

cu următoarele condiţii la frontieră

$$\begin{cases} u(t, x, 0) = 0, \ u(t, x, 1) = \Psi(t, x), \ v(t, x, 0) = v(t, x, 1) = 0, \\ u(t, x + 2\pi, y) = u(t, x, y), \ v(t, x + 2\pi, y) = v(t, x, y), \\ p(t, x + 2\pi, y) = p(t, x, y), \ \forall t \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in (0, 1), \end{cases} \tag{1.2.2}$$

şi datele iniţiale

$$u(0, x, y) = u_o(x, y), v(0, x, y) = v_o(x, y), \ x \in \mathbb{R}, y \in (0, 1).$$

După cum se vede, de această dată, controlul Ψ acţionează asupra componentei tangenţiale a câmpului vitezelor, pe peretele superior. Starea de echilibru ce urmează a fi stabilizată este acelaşi profil parabolic Poiseuille, din cazul controlului normal, şi anume

$$(U^e(y), 0) = (-\frac{a}{2\nu}(y^2 - y), 0), \ y \in (0, 1),$$

unde $a \in \mathbb{R}_+$. Problema (1.2.1)-(1.2.2) se reduce la nula stabilizare a următorului sistem

$$\begin{cases} u_t - \nu\Delta u + u_x U^e + vU^e_y + uu_x + vu_y = p_x, \ x \in \mathbb{R}, y \in (0, 1), \\ v_t - \nu\Delta v + v_x U^e + uv_x + vv_y = p_y, \ x \in \mathbb{R}, y \in (0, 1), \\ u_x + v_y = 0, \\ u(t, x, 0) = 0, \ u(t, x, 1) = \Psi(t, x), \ v(t, x, 0) = v(t, x, 1) = 0, \\ u(t, x + 2\pi, y) = u(t, x, y), \ v(t, x + 2\pi, y) = v(t, x, y), \\ p(t, x + 2\pi, y) = p(t, x, y), \ \forall t \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in (0, 1), \end{cases} \tag{1.2.3}$$

cu datele iniţiale

$$u(0,x,y)=u^0(x,y):=u_o(x,y)-U^e(y),\ v(0,x,y)=v^0(x,y):=v_o(x,y),x\in\mathbb{R},y\in(0,1).$$

Liniarizatul acestui sistem este

$$\begin{cases} u_t-\nu\Delta u+u_xU^e+vU^e_y=p_x, \\ v_t-\nu\Delta v+v_xU^e=p_y, \\ u_x+v_y=0, \\ u(t,x,0)=0,\ u(t,x,1)=\Psi(t,x),\ v(t,x,0)=v(t,x,1)=0, \\ u(t,x+2\pi,y)=u(t,x,y),\ v(t,x+2\pi,y)=v(t,x,y), \\ p(t,x+2\pi,y)=p(t,x,y),\ \forall t\geq 0,\forall x\in\mathbb{R},\forall y\in(0,1), \end{cases} \tag{1.2.4}$$

care, via descompunerii în serii Fourier, se transformă în următorul sistem parabolic infinit

$$\begin{cases} (-v_k''+k^2v_k)_t+\nu v_k''''-(2\nu k^2+\mathrm{i}kU^e)v_k'' \\ \qquad\qquad +k(\nu k^3+\mathrm{i}k^2U^e+\mathrm{i}(U^e)'')v_k=0,\ t\geq 0,y\in(0,1), \\ v_k(0)=v_k(1)=0,v_k'(0)=0,v_k'(1)=\psi_k(t). \end{cases} \tag{1.2.5}$$

Aici

$$u=\sum_{k\in\mathbb{Z}}u_k(t,y)e^{\mathrm{i}kx},v=\sum_{k\in\mathbb{Z}}v_k(t,y)e^{\mathrm{i}kx}$$

$$p=\sum_{k\in\mathbb{Z}}p_k(t,y)e^{\mathrm{i}kx},\Psi=\sum_{k\in\mathbb{Z}}-\frac{1}{\mathrm{i}k}\psi_k(t)e^{\mathrm{i}kx},$$

(am considerat coeficienţii Fourier ai lui Ψ în forma $-\frac{1}{\mathrm{i}k}\psi_k$ pentru a facilita calculele, dar mai ales pentru a obţine aceeaşi formă a operatorilor implicaţi ca în cazul controlului normal, din secţiunea anterioară).

Argumentând ca în cazul controlului normal, problema (1.2.5) poate fi rescrisă echivalent sub forma

$$(L_kv_k)_t+\tilde{\mathbf{A}}_kL_kv_k=(\theta_k+\tilde{F}_k)D_k\psi_k,t>0, \tag{1.2.6}$$

cu data iniţială v_k^0. Operatorii care apar mai sus, $L_k,\tilde{F}_k,\tilde{\mathbf{A}}_k$, sunt extinderile la întreg spaţiul H ai operatorilor L_k,F_k, respectiv $\mathbf{A}_k$, introduşi în secţiunea precedentă (vezi (1.1.12),(1.1.13), respectiv (1.1.18), iar pentru definiţia extinderilor vezi (4.1.6) din Apendix). Operatorii Dirichlet D_k sunt definiţi în acest caz, astfel: pentru toţi $\psi\in\mathbb{C}$ notăm cu $D_k\psi:=w\in H^4(0,1)$ soluţia ecuaţiei

$$\begin{cases} \theta_kw+\mathcal{F}_kw=0,\forall y\in(0,1), \\ w(0)=w(1)=0,w'(0)=0,w'(1)=\psi. \end{cases} \tag{1.2.7}$$

De această dată, dualul $((\theta_k+\tilde{F}_k)D_k)^*$ este dat de

$$((\theta_k+\tilde{F}_k)D_k)^*\phi=-\nu\phi''(1), \tag{1.2.8}$$

pentru toţi $\phi\in H^4(0,1),\phi(0)=\phi(1)=0,\phi'(0)=\phi'(1)=0$.

Datorită similitudinii cu cazul controlului normal, obţinem următorul rezultat de stabilizare tangenţială feedback pentru liniarizatul (1.2.4), în mod asemănător cu cel din Teorema 1.1.3. Mai exact, avem

Teorema 1.2.1 *Există un control feedback finit-dimensional* Ψ *de forma*

$$\Psi(t,x) = -\nu \sum_{0<|k|\leq S} \frac{1}{\mathrm{i}k}(L_k^{-2}\mathcal{R}_k L_k v_k(t))''(1)e^{\mathrm{i}kx}, \tag{1.2.9}$$

unde

$$v_k(t,y) = \int_0^{2\pi} v(t,x,y)e^{-\mathrm{i}kx}dx, 0 < |k| \leq S$$

astfel încât, odată introdus în ecuaţia (1.2.4)*, soluţia corespunzătoare sistemului cu buclă închisă* (1.2.4) *satisface*

$$\|(u(t),v(t))\|^2 \leq C_\beta e^{-\beta t}\|(u^0,v^0)\|^2, \ t \geq 0,$$

pentru nişte constante $C_\beta, \beta > 0$*. Aici* $\mathcal{R}_k : X \to X$ *sunt operatori liniari, auto-adjuncţi, care satisfac ecuaţii Riccati algebrice în* H

$$\left\langle L_k^{-1}\mathcal{R}_k z_0, L_k^{-1}\boldsymbol{A}_k z_0\right\rangle + \frac{1}{2}\nu^2|(L_k^{-2}\mathcal{R}_k z_0)''(1)|^2 = \frac{1}{2}\|L_k^{-1}z_0\|^2, \forall z_0 \in H,$$

pentru toţi $0 < |k| \leq S$*,* S *dat de* (1.1.19)*.* $\boldsymbol{A}_k = F_k L_k^{-1}$*, unde* F_k *este dat de* (1.1.13) *şi* L_k *este dat de* (1.1.12)*.* $X = (H^2(0,1)\cap H_0^1(0,1))^*$*.*

1.2.2 Stabilizarea feedback locală a sistemului neliniar Navier-Stokes (1.2.3)

În continuare, ne propunem să arătăm că acelaşi control feedback (1.2.9), care stabilizează sistemul liniarizat (1.2.4), stabilizează şi sistemul neliniar (1.2.3). Pentru aceasta, vom rescrie sistemul (1.2.3) într-o formă mai compactă. Introducem notaţiile:

$$\mathbf{v} := (u,v) \in (L^2(\mathcal{O}))^2, \ \mathrm{x} := (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ \Omega = \mathcal{O}\times(0,\infty),$$

unde $\mathcal{O} = (0,2\pi)\times(0,1)$. $\partial\mathcal{O} = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, unde Σ_1 reprezintă peretele $y = 1$ şi $\Sigma_2 = \partial\mathcal{O}\setminus\Sigma_1$. Introducem operatorul liniar $\mathcal{G} : L^2(0,2\pi) \to \left(L^2(\partial\mathcal{O})\right)^2$, definit astfel

$$\mathcal{G}(\Psi) = \begin{cases} (\Psi(x),0) & \text{dacă } (x,y)\in\Sigma_1, \\ (0,0) & \text{dacă } (x,y)\in\Sigma_2, \end{cases} \tag{1.2.10}$$

pentru toţi $\Psi \in L^2(0,2\pi)$. Cu aceste notaţii, sistemul neliniar (1.2.3) poate fi rescris astfel

$$\begin{cases} \mathbf{v}_t(t,\mathrm{x}) - \nu\Delta\mathbf{v}(t,\mathrm{x}) + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}(t,\mathrm{x}) = \nabla p(t,\mathrm{x}) \text{ în } \mathcal{O}, \\ \nabla\cdot\mathbf{v} = 0 \text{ în } \mathcal{O}, \\ \mathbf{v} = \mathcal{G}(\Psi(t)) \text{ pe } \partial\mathcal{O}, t\geq 0, \\ \mathbf{v}(0,\mathrm{x}) = \mathbf{v}_0(\mathrm{x}) := (u_o(\mathrm{x}), v_o(\mathrm{x})) \text{ în } \mathcal{O}. \end{cases} \tag{1.2.11}$$

Soluţia staţionară $(U^e, 0)$ o vom nota cu $\mathbf{v}^e$. Din (1.1.2) ştim că aceasta satisface

$$\begin{cases} -\nu\Delta\mathbf{v}^e + (\mathbf{v}^e\cdot\nabla)\mathbf{v}^e = \nabla p^e \text{ în } \mathcal{O}, \\ \\ \nabla\cdot\mathbf{v}^e = 0 \text{ în } \mathcal{O}, \\ \\ \mathbf{v}^e = 0 \text{ pe } \partial\mathcal{O}. \end{cases} \tag{1.2.12}$$

Este arătat în [13, Secţiunea 3.1] că ecuaţia translatată a lui (1.2.11) (adică, $\mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{v} - \mathbf{v}^e$, $p \Rightarrow p - p^e$), proiectată pe spaţiul H_π, este

$$\mathbf{v}_t - \mathcal{A}\mathbf{v} + B\mathbf{v} = -\mathcal{A}D\mathcal{G}\Psi \in [\mathcal{D}(\mathcal{A}^*)]^*,\ \mathbf{v}_0 \in H_\pi,\ \mathcal{G}(\Psi)\cdot\mathbf{n} \equiv 0 \text{ pe } \partial\mathcal{O},\ t \geq 0, \tag{1.2.13}$$

unde spaţiul H_π (vezi (4.3.2) din Apendix) este definit astfel

$$H_\pi := \left\{\mathbf{v} \in (L^2(\mathcal{O}))^2 : \nabla\cdot\mathbf{v} = 0, \mathbf{v}\cdot\mathbf{n} = 0 \text{ pe } \partial\mathcal{O}\right\}, \tag{1.2.14}$$

operatorul $\mathcal{A} : H_\pi \to [\mathcal{D}(\mathcal{A}^*)]^*$ este extensia prin transpoziţie, dualitate în raport cu spaţiul H_π ca spaţiu pivot, a operatorului diferenţial Oseen-Stokes

$$\mathcal{A} := -(\nu A + A_0), \mathcal{D}(\mathcal{A}) = \mathcal{D}(A) = (H^2(\mathcal{O}))^2 \cap H_\pi, \tag{1.2.15}$$

$$\begin{gathered} A\mathbf{v} := -P(\Delta\mathbf{v}),\ \forall\mathbf{v} \in \mathcal{D}(A);\ A_0\mathbf{v} := P((\mathbf{v}^e\cdot\nabla)\mathbf{v} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}^e), \\ \mathcal{D}(A_0) = \mathcal{D}(A^{\frac{1}{2}}), \end{gathered} \tag{1.2.16}$$

şi

$$B\mathbf{v} := P((\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}), \forall\mathbf{v} \in \mathcal{D}(A^{\frac{1}{2}}), \tag{1.2.17}$$

unde $P : (L^2(\mathcal{O}))^2 \to H_\pi$ este proiectorul Leray (vezi Apendix). Operatorul Dirichlet D din (1.2.13) este definit în felul următor (vezi Secţiunea 3.1, completată de anexa A.2 din [13]): introducem pentru început următoarea expresie diferenţială

$$\mathbb{A}\mathbf{v} := -\nu\Delta\mathbf{v} + (\mathbf{v}^e\cdot\nabla)\mathbf{v} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}^e. \tag{1.2.18}$$

Operatorul Dirichlet D este soluţia următoarei probleme staţionare Oseen-Stokes

$$\begin{cases} \mathcal{Z} = Dg \Leftrightarrow (k + \mathbb{A})\mathcal{Z} = \nabla p \text{ în } \mathcal{O}, \\ \nabla\cdot\mathcal{Z} = 0 \text{ în } \mathcal{O}, \\ \mathcal{Z} = \begin{cases} (g(x), 0), \text{ dacă } (x, y) \in \Sigma_1, \\ (0, 0), \text{ dacă } (x, y) \in \Sigma_2. \end{cases} \end{cases} \tag{1.2.19}$$

Sistemul liniar, corespunzător lui (1.2.6), este

$$\mathbf{v}_t - \mathcal{A}\mathbf{v} = -\mathcal{A}D\mathcal{G}\Psi \in [\mathcal{D}(\mathcal{A}^*)]^*,\ \mathbf{v}_0 \in H_\pi,\ \mathcal{G}(\Psi)\cdot\mathbf{n} \equiv 0 \text{ pe } \partial\mathcal{O},\ t \geq 0. \tag{1.2.20}$$

În sfârşit, rezultatul principal de stabilizare este dat de următoarea teoremă.

Teorema 1.2.2 *Fie* $W := \mathcal{D}(A^{\frac{1}{4}})$ *şi vecinătatea lui zero*

$$\mathcal{U}_\rho := \left\{(u^0, v^0) \in W; \|(u^0, v^0)\|_W \le \rho\right\}.$$

Cu referire la Teorema 1.2.1, controlul feedback

$$\psi(t,x) = -\nu \sum_{0<|k|\le S} \frac{1}{\mathrm{i}k}(L_k^{-2}R_kL_kv_k(t))''(1)e^{\mathrm{i}kx},$$

odată introdus în sistemul neliniar (1.2.3)*, impune existenţa unui* $\rho > 0$ *suficient de mic, astfel încât pentru orice dată iniţială* $(u^0, v^0) \in U_\rho$ *există o soluţie unică*

$$(u, v) \in C([0, \infty); W) \cap L^2(0, \infty; Z),$$

a sistemului cu buclă închisă (1.2.3)*, care satisface*

$$\|(u(t), v(t))\|_W \le Me^{-\omega t}\|(u^0, v^0)\|_W, \forall t > 0,$$

pentru nişte constante $M, \omega > 0$*. Aici* $Z := \mathcal{D}(A^{\frac{3}{4}})$*. A dat de relaţia* (1.2.16)*.*

Remarca 1.2.1 Dacă sistemul (1.2.13) (echivalent (1.2.11)) este feedback stabilizabil, atunci urmează că şi sistemul (1.2.3) este feedback stabilizabil. Prin urmare, este suficient să demonstrăm stabilizabilitatea sistemului (1.2.13), pentru a demonstra Teorema 1.2.2.

Din Teorema 1.2.1, avem că controlul feedback

$$F\mathbf{v} := \Psi = -\nu \sum_{|k|\le S} \frac{1}{\mathrm{i}k}(L_k^{-2}R_kL_kv_k(t))''(1)e^{\mathrm{i}kx},$$

stabilizează exponenţial sistemul (1.2.20), mai precis avem

$$\|e^{\mathcal{A}_F t}\mathbf{v}_0\| \le C_\beta e^{-\beta t}\|\mathbf{v}_0\|, t \ge 0, \mathbf{v}_0 \in H_\pi, \tag{1.2.21}$$

unde $\mathcal{A}_F\mathbf{v} := \mathcal{A}\mathbf{v} - \mathcal{A}D\mathcal{G}F\mathbf{v}$. Introducem acest control în sistemul (1.2.13), şi obţinem

$$\mathbf{v}_t + B\mathbf{v} = \mathcal{A}_F\mathbf{v}. \tag{1.2.22}$$

Formula variaţiei constantelor corespunzătoare sistemului (1.2.22) este

$$\mathbf{v}(t) = e^{\mathcal{A}_F t}\mathbf{v}_0 - (N\mathbf{v})(t);\ (N\mathbf{v})(t) = \int_0^t e^{\mathcal{A}_F(t-\tau)}(B\mathbf{v})(\tau)d\tau. \tag{1.2.23}$$

Avem

Teorema 1.2.3 *Dacă* $\rho > 0$ *este suficient de mic, atunci pentru toţi* $\mathbf{v}_0 \in W$ *cu* $\|\mathbf{v}_0\|_W \le \rho$*, problema* (1.2.23) *este bine-pusă în* W *cu soluţie unică*

$$\mathbf{v} \in C([0, \infty]; W) \cap L^2(0, \infty; Z).$$

Mai mult, aceste soluţii locale satisfac următoarea descreştere exponenţială: există constantele $M \ge 1, \omega > 0$*, independente de* $\rho > 0$*, astfel încât*

$$\|\mathbf{v}(t)\| \le Me^{-\omega t}\|\mathbf{v}_0\|,\ t \ge 0.$$

Aici, W *şi* Z *sunt spaţiile introduse în Teorema 1.2.2.*

Demonstraţie. Vom aplica [12, Theorem 5.1]. Pentru aceasta, trebuie, mai întâi, să demonstrăm că ipotezele $(H.1), (H.1i), (H.1ii)$ şi $(H.1iii)$ din [12] sunt adevărate pentru cazul nostru. Mai precis, trebuie arătat că, cu notaţiile de mai sus, avem

(i) $\mathcal{A}_F$ generează un semigrup analitic $e^{\mathcal{A}_F t}$ pe W, care este uniform exponenţial stabil pe W, adică,

$$\|e^{\mathcal{A}_F t}\|_{L(W,W)} \leq C_\beta e^{-\beta t}, t \geq 0;$$

(ii) pentru toţi $\mathbf{v}_0 \in W$, avem $e^{\mathcal{A}_F t}\mathbf{v}_0 \in L^2(0,\infty; Z)$; deci, pentru o constantă pozitivă c, avem

$$\int_0^\infty \|e^{\mathcal{A}_F t}\mathbf{v}_0\|_Z^2 dt \leq c\|\mathbf{v}_0\|_W^2, \forall \mathbf{v}_0 \in W.$$

Lema de mai jos ne asigură de valabilitatea lor.

Lema 1.2.1 *Avem*

$$\int_0^\infty \|e^{(\mathcal{A}_F+\beta)t}\mathbf{v}_0\|_Z^2 dt \leq c\|\mathbf{v}_0\|_W, \forall \mathbf{v}_0 \in W, \tag{1.2.24}$$

$$\|e^{\mathcal{A}_F t}\mathbf{v}_0\|_W \leq Ce^{-\beta t}\|\mathbf{v}_0\|_W, \forall t \geq 0. \tag{1.2.25}$$

Demonstraţie. Funcţia $V(t) := e^{(\mathcal{A}_F+\beta)t}\mathbf{v}_0$ este soluţia ecuaţiei

$$\frac{dV}{dt} + \nu AV + A_0V + \mathcal{A}DFV = \beta V,$$

$$V(0) = \mathbf{v}_0.$$

Dacă o înmulţim scalar cu $A^{\frac{1}{2}}V$, obţinem că

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|V(t)\|_W^2 + \nu\|A^{\frac{3}{4}}V(t)\|^2 \leq C\left(\|A^{\frac{1}{2}}V(t)\|^2 + \|A^{\frac{1}{2}}V(t)\|\|V(t)\|\right), t > 0.$$

Inegalităţile de interpolare ne asigură, atunci, că

$$\|A^{\frac{1}{2}}V\|^2 \leq \|A^{\frac{3}{4}}V\|^{\frac{2}{3}}\|V\|^{\frac{4}{3}} \leq \frac{\nu}{2}\|A^{\frac{3}{4}}V\|^2 + C\|V\|^2,$$

ceea ce implică

$$\frac{d}{dt}\|V(t)\|_W^2 + \frac{\nu}{2}\|A^{\frac{3}{4}}V(t)\|^2 \leq C_1\|V(t)\|^2, \forall t > 0.$$

Luând aceasta în considerare, avem din relaţia (1.2.21) că

$$\|V(t)\| \leq Ce^{-\beta t}\|\mathbf{v}_0\|, \forall t \geq 0,$$

estimările urmează imediat. □

Demonstraţia Teoremei 1.2.3 (continuare). După cum am spus mai sus, pentru a demonstra Teorema 1.2.3 vom aplica [12, Theorem 5.1]. Demonstraţia este exact la fel, din acest motiv doar vom schiţa ideile.

Pentru început, pentru $r > 0$, introducem bila de rază r, centrată în origine, a spaţiului $L^2(0, \infty; Z)$:

$$S(0, r) := \left\{ f \in L^2(0, \infty; Z) : \|f\|_{L^2(0,\infty;Z)} = \left\{ \int_0^\infty \|f(t)\|_Z dt \right\}^{\frac{1}{2}} \le r \right\}.$$

Mai departe, pentru orice $\mathbf{v}_0 \in W$ şi $z \in L^2(0, \infty; Z)$, introducem aplicaţia

$$(\Lambda z)(t) := e^{\mathcal{A}_F t}\mathbf{v}_0 - (Nz)(t);\ (Nz)(t) := \int_0^t e^{\mathcal{A}_F(t-\tau)}(Bz)(\tau)d\tau.$$

În legătură cu termenul neliniar B, avem din [12, Lemma 5.4], următoarea estimare cheie

$$\|Bz\|_W \le h\|z\|_Z^2, \forall z \in Z, \tag{1.2.26}$$

pentru un $h > 0$. Folosind (1.2.26), găsim următoarea estimare pentru Λ.

Lema 1.2.2 *Pentru toţi $\mathbf{v}_0 \in W$şi $z \in L^2(0, \infty; Z)$, aplicaţia Λ satisface următoarea estimare*

$$|\Lambda z|^2_{L^2(0,\infty;Z)} \le 2c\|\mathbf{v}_0\|_W^2 + 2ch^2 \left[\int_0^\infty \|z(t)\|_Z^2 dt \right]^2, \tag{1.2.27}$$

unde $c > 0$ este constanta din (1.2.24), *şi $h > 0$ este constanta care se regăseşte în relaţia* (1.2.26).

Mai departe, impunând nişte restricţii constantelor c, h şi r, şi folosind Lema 1.2.2, obţinem următorul rezultat.

Lema 1.2.3 *Fie $z \in S(0, r)$, unde $r > 0$ este ales astfel încât să satisfacă constrângerile*

$$2c\|\mathbf{v}_0\|_W^2 \le \frac{1}{2}r^2; 2ch^2 \le \frac{1}{2}r^2 \text{ ori } r \le \frac{1}{2\sqrt{ch}}. \tag{1.2.28}$$

Atunci,

$$|\Lambda z|^2_{L^2(0,\infty;Z)} \le r^2.$$

Lema 1.2.3 spune că Λ duce bila $S(0, r)$ în ea însăşi. Pentru a obţine existenţa soluţiilor, vom aplica teorema de punct fix a aplicaţiilor contractive. Pentru aceasta, trebuie să arătăm că Λ este o contracţie. Avem

Propoziţia 1.2.1 *Fie $\mathbf{v}_0 \in W$şi $z_1, z_2 \in S(0, r)$. Atunci operatori Λ şi N satisfac*

$$\begin{aligned} |\Lambda z_1 - \Lambda z_2|_{L^2(0,\infty;Z)} &= |Nz_1 - Nz_2|_{L^2(0,\infty;Z)} \\ &\le 2\sqrt{c}\ hr|z_1 - z_2|_{L^1(0,\infty;Z)}, \end{aligned} \tag{1.2.29}$$

unde $c > 0$ este constanta din relaţia (1.2.24) *şi $h > 0$ din relaţia* (1.2.26).

Rezultatul principal, via Propoziţia 1.2.1, este stipulat de următoarele două propoziţii.

Propoziţia 1.2.2 *Fie* $r < \frac{1}{2\sqrt{ch}}$, *c din* (1.2.24) *şi h din* (1.2.26). *Avem*

(i) operatorul Λ *este o contracţie pe* $S(0,r)$*;*

(ii) pentru orice $\mathbf{v}_0 \in W$, $\|\mathbf{v}_0\|_W \leq r/2\sqrt{c}$, *există o soluţie unică* $\mathbf{v} \in S(0,r) \subset L^2(0,\infty;Z)$ *pentru*

$$\Lambda\mathbf{v} = \mathbf{v};\ \text{aceasta este } \mathbf{v}(\mathrm{t}) = \mathrm{e}^{\mathcal{A}_{\mathrm{F}}\mathrm{t}}\mathbf{v}_0 - \int_0^{\mathrm{t}} \mathrm{e}^{\mathcal{A}_{\mathrm{F}}(\mathrm{t}-\tau)}(\mathrm{B}\mathbf{v})(\tau)\mathrm{d}\tau; \tag{1.2.30}$$

(iii) mai precis, problema (1.2.23) *(echivalent,* (1.2.22)) *are soluţie unică* $\mathbf{v}$ *pentru toţi* $\mathbf{v}_0$ *ca în* (*ii*), *şi r specificat acolo, sastisfăcând*

$$\mathbf{v} \in C([0,\infty); B(0,b)) \cap L^2(0,\infty;Z);$$

unde $B(0,b)$ *este bila din* W *definită astfel*

$$B(0,b) := \{f \in W : \|f\|_W \leq b\}, b = \frac{C}{2ch},$$

C *din* (1.2.25), *c din* (1.2.24), *h din* (1.2.26), *continuu în* $\mathbf{v}_0 \in W$:

$$\int_0^{\infty} \|\mathbf{v}(t)\|_Z^2 dt \leq c_{1r}\|\mathbf{v}_0\|_W^2; c_{1r} = \frac{2c}{1-2ch^2r^2} > 0. \tag{1.2.31}$$

Propoziţia 1.2.3 *Fie* $\mathbf{v}_0 \in W, \|\mathbf{v}_0\| < r/2\sqrt{c}$, *pentru* $r < 1/(2\sqrt{c}h)$, *c ca în* (1.2.24), *h ca în* (1.2.26). *Atunci, cu referire la soluţia unică* $\mathbf{v}(t)$, *a sistemului* (1.2.23), *dată de Propoziţia 1.2.2, avem: există constantele* $M \geq 1$ *şi* $\omega > 0$, *pentru care*

$$\|\mathbf{v}(t)\|_W \leq Me^{-\omega t}\|\mathbf{v}_0\|_W, t \geq 0. \tag{1.2.32}$$

□

Demonstraţia Teoremei 1.2.2 urmează imediat din Remarca 1.2.1 şi Teorema 1.2.3.

1.3 Stabilizare feedback normală a fluidelor periodice într-un canal trei-dimensional

Cele două rezultate de stabilizare, normală şi tangenţială, pentru canalul dreptunghiular, prezentate în secţiuniile anterioare, pot fi extinse la cazul canalului trei-dimensional, în mod direct. Deşi spaţiul devine trei-dimensional, vom vedea că, pentru a stabiliza profilul parabolic, este suficient să aplicăm tot doar un control la frontieră, pe peretele superior. Metoda de abordare este similară cu cea prezentată mai sus. Există, însă, câteva rezultate ce trebuie reconsiderate în noul cadru 3-D. Această secţiune este alcătuită integral din rezultatele originale obţinute de către autor în lucrarea [67].

1.3.1 Prezentarea problemei

Considerăm un flux trei-dimensional printr-un canal de forma

$$(x, y, z) \in (-\infty, \infty) \times [0, 1] \times (-\infty, \infty).$$

Dinamica este modelată de ecuaţiile Navier-Stokes 3-D, incompresibile

$$\begin{cases} u_t - \nu\Delta u + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \\ v_t - \nu\Delta v + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y}, \\ w_t - \nu\Delta w + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \ x, z \in \mathbb{R}, y \in (0, 1), t \geq 0. \end{cases} \tag{1.3.1}$$

Similar cu cazul doi-dimensional, pentru a nu avea de-a face cu domenii infinte, vom presupune că atât câmpul vitezelor cât şi presiunea sunt $2\pi-$periodice în variabilele x şi z, mai precis avem următoarele condiţii la frontieră

$$\begin{cases} u(t, x + 2\pi, y, z + 2\pi) = u(t, x, y, z), \\ v(t, x + 2\pi, y, z + 2\pi) = v(t, x, y, z), \\ w(t, x + 2\pi, y, z + 2\pi) = w(t, x, y, z), \\ p(t, x + 2\pi, y, z + 2\pi) = p(t, x, y, z), \\ u(t, x, 0, z) = u(t, x, 1, z) = 0, \\ v(t, x, 0, z) = 0, v(t, x, 1, z) = \Psi(t, x, z), \\ w(t, x, 0, z) = w(t, x, 1, z) = 0, \\ \forall x, z \in \mathbb{R}, \ y \in (0, 1), \ t \geq 0. \end{cases} \tag{1.3.2}$$

Şi datele iniţiale

$$u(0,x,y,z) = u_o(x,y,z), v(0,x,y,z) = v_o(x,y,z), w(0,x,y,z) = w_o(x,y,z),$$

pentru $x, z \in \mathbb{R},\ y \in [0,1]$.

Soluţia de echilibru a sistemului (1.3.1), ce urmează a fi stabilizată, este profilul parabolic Poiseuille trei-dimensional, ce se obţine în mod asemănător cu cazul doi-dimensional, şi anume

$$U^e = -\frac{a}{2\nu}(y^2 - y),\ V^e \equiv 0,\ W^e \equiv 0,\ y \in [0,1], \tag{1.3.3}$$

unde $a \in \mathbb{R}_+$.

Liniarizatul sistemului (1.3.1)-(1.3.2), în jurul soluţiei de echilibru (1.3.3), este următorul

$$\begin{cases} u_t - \nu\Delta u + U^e \frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial U^e}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \\ v_t - \nu\Delta v + U^e \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial y}, \\ w_t - \nu\Delta w + U^e \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial z}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,\ x, z \in \mathbb{R}, y \in (0,1), t \geq 0, \end{cases} \tag{1.3.4}$$

completat de condiţiile la frontieră

$$\begin{cases} u(t, x + 2\pi, y, z + 2\pi) = u(t,x,y,z), \\ v(t, x + 2\pi, y, z + 2\pi) = v(t,x,y,z), \\ w(t, x + 2\pi, y, z + 2\pi) = w(t,x,y,z), \\ p(t, x + 2\pi, y, z + 2\pi) = p(t,x,y,z), \\ u(t,x,0,z) = u(t,x,1,z) = 0, \\ v(t,x,0,z) = 0, v(t,x,1,z) = \Psi(t,x,z), \\ w(t,x,0,z) = w(t,x,1,z) = 0, \forall x, z \in \mathbb{R}, y \in (0,1), t \geq 0. \end{cases} \tag{1.3.5}$$

Şi datele iniţiale

$$u(0,x,y,z) = u^0 := u_o(x,y,z) - U^e(y), v(0,x,y,z) = v^0 := v_o(x,y,z),$$

$$w(0,x,y,z) = w^0 := w_o(x,y,z).$$

1.3.2 Preliminarii

De această dată, $L^2_{2\pi}(Q),\ Q := (0,2\pi) \times (0,1) \times (0,2\pi)$, este spaţiul tuturor funcţiilor $u \in L^2_{loc}(\mathbb{R} \times (0,1) \times \mathbb{R})$ care sunt $2\pi-$periodice în x şi z. Aceste funcţii sunt caracterizate de seriile lor Fourier

$$u(x,y,z)=\sum_{k,l\in\mathbb{Z}}u_{kl}(y)e^{\mathrm{i}kx}e^{\mathrm{i}lz},\ u_{kl}=\overline{u_{-k-l}},$$

astfel încât

$$\sum_{k,l\in\mathbb{Z}}\int_0^1|u_{kl}(y)|^2dy<\infty.$$

Norma în $L^2_{2\pi}(Q)$ este definită astfel

$$\|u\|_{L^2_{2\pi}(Q)}:=\left(\sum_{k,l\in\mathbb{Z}}2\pi\|u_{kl}\|^2_{L^2(0,1)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Similar cu cazul doi-dimensional, vom nota cu $\|\cdot\|$ norma în $L^2_{2\pi}(Q)$ şi în $L^2(0,1)$. Definim

$$(L^2_{2\pi}(Q))^3:=\left\{(u,v,w):u,v,w\in L^2_{2\pi}(Q)\right\}.$$

$\|(\cdot,\cdot,\cdot)\|$ va nota norma în $(L^2_{2\pi}(Q))^3$, definită astfel

$$\|(u,v,w)\|:=\left(\|u\|^2+\|v\|^2+\|w\|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ne întoarcem la sistemul (1.3.4) şi îl rescriem în funcţie de coeficienţii Fourier $(u_{kl})_{k,l\in\mathbb{Z}}$, $(v_{kl})_{k,l\in\mathbb{Z}}$, $(w_{kl})_{k,l\in\mathbb{Z}}$, $(p_{kl})_{k,l\in\mathbb{Z}}$, $(\psi_{kl})_{k,l\in\mathbb{Z}}$, ai câmpului vitezelor, presiunii, respectiv controlului. Avem

$$\begin{cases}(u_{kl})_t-\nu[-(k^2+l^2)u_{kl}+u''_{kl}]+\mathrm{i}kU^eu_{kl}+(U^e)'v_{kl}=-\mathrm{i}kp_{kl},\\ \qquad\text{a.p.t. în }(0,1),\\ (v_{kl})_t-\nu[-(k^2+l^2)v_{kl}+v''_{kl}]+\mathrm{i}kU^ev_{kl}=-p'_{kl},\ \text{a.p.t. în }(0,1),\\ (w_{kl})_t-\nu[-(k^2+l^2)w_{kl}+w''_{kl}]+\mathrm{i}kU^ew_{kl}=-\mathrm{i}lp_{kl},\ \text{a.p.t. în }(0,1),\\ \mathrm{i}ku_{kl}+v'_{kl}+\mathrm{i}lw_{kl}=0,\ \text{a.p.t. în }(0,1),\\ u_{kl}(0)=u_{kl}(1)=0,\ v_{kl}(0)=0,\ v_{kl}(1)=\psi_{kl},\\ w_{kl}(0)=w_{kl}(1)=0,\end{cases}\tag{1.3.6}$$

cu datele iniţiale $u^0_{kl},v^0_{kl},w^0_{kl}$ (la fel ca în secţiunile anterioare, am notat cu $'$ derivata parţială $\frac{\partial}{\partial y}$). Reamintim că H reprezintă spaţiul complexificat al lui $L^2(0,1)$, iar $\|\cdot\|$ norma sa, şi $\langle\cdot,\cdot\rangle$ produsul scalar. Ideea este să eliminăm presiunea din sistemul (1.3.6), în aceeaşi manieră ca în cazul doi-dimensional. Pentru a realiza acest lucru, trebuie în mod necesar să avem $k,l\neq 0$. Acesta este motivul pentru care vom studia, mai întâi, cazurile pentru care k sau l, sau amândoi sunt egali cu zero.

Dacă $k = l = 0$, sistemul (1.3.6) devine

$$\begin{cases} (u_{00})_t - \nu u''_{00} + (U^e)' v_{00} = 0, \text{ a.p.t. în } (0,1), \\ (v_{00})_t - \nu v''_{00} = -p'_{00}, \text{ a.p.t. în } (0,1), \\ (w_{00})_t - \nu w''_{00} = 0, \text{ a.p.t. în } (0,1), \\ v'_{00} = 0, \text{ a.p.t. în } (0,1), \\ u_{00}(0) = u_{00}(1) = 0, \ v_{00}(0) = 0, \ v_{00}(1) = \psi_{00}, \\ w_{00}(0) = w_{00}(1) = 0. \end{cases} \tag{1.3.7}$$

Din condiţia de divergenţă zero, $v'_{00} = 0, \ \forall t \geq 0$, şi condiţiile la frontieră, $v_{00}(0) = 0, \ \forall t \geq 0$, deducem că $v_{00} \equiv 0$. Ceea ce implică, de asemenea, că $\psi_{00} \equiv 0$. Deci, u_{00} şi w_{00} satisfac ecuaţiile

$$\begin{cases} (u_{00})_t - \nu u''_{00} = 0, t \geq 0, y \in (0,1), \\ u_{00}(0) = u_{00}(1) = 0, \end{cases} \tag{1.3.8}$$

şi

$$\begin{cases} (w_{00})_t - \nu w''_{00} = 0, t \geq 0, y \in (0,1), \\ w_{00}(0) = w_{00}(1) = 0. \end{cases} \tag{1.3.9}$$

Înmulţind scalar ecuaţia (1.3.8) cu u_{00} şi ecuaţia (1.3.9) cu w_{00}, şi folosind inegalitatea lui Poincaré, obţinem, în urma unor calcule, că pentru o constantă $C_0 > 0$, avem

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_{00}(t)\|^2 + C_0 \nu \|u_{00}\|^2 \leq 0, \ t \geq 0,$$

şi

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w_{00}(t)\|^2 + C_0 \nu \|w_{00}\|^2 \leq 0, \ t \geq 0.$$

Aceasta implică

$$\|u_{00}(t)\|^2 \leq e^{-2C_0 \nu t} \|u^0_{00}\|^2, \ \forall t \geq 0, \tag{1.3.10}$$

şi

$$\|w_{00}(t)\|^2 \leq e^{-2C_0 \nu t} \|w^0_{00}\|^2, \ \forall t \geq 0. \tag{1.3.11}$$

Ceea ce înseamnă că, pentru coeficienţii Fourier u_{00}, v_{00}, w_{00}, stabilitatea exponenţială are loc fără a aplica vreun control la frontieră.

Dacă $k \neq 0$ şi $l = 0$, sistemul (1.3.6) capătă următoarea formă

$$\begin{cases} (u_{k0})_t - \nu[-k^2 u_{k0} + u''_{k0}] + \mathrm{i}kU^e u_{k0} + (U^e)' v_{k0} = -\mathrm{i}kp_{k0}, \text{ a.p.t. în } (0,1), \\ (v_{k0})_t - \nu[-k^2 v_{k0} + v''_{k0}] + \mathrm{i}kU^e v_{k0} = -p'_{k0}, \text{ a.p.t. în } (0,1), \\ (w_{k0})_t - \nu[-k^2 w_{k0} + w''_{k0}] + \mathrm{i}kU^e w_{k0} = 0, \text{ a.p.t. în } (0,1), \\ \mathrm{i}ku_{k0} + v'_{k0} = 0, \text{ a.p.t. în } (0,1), \\ u_{k0}(0) = u_{k0}(1) = 0, \ v_{k0}(0) = 0, \ v_{k0}(1) = \psi_{k0}, \\ w_{k0}(0) = w_{k0}(1) = 0, \ \forall t \geq 0. \end{cases} \tag{1.3.12}$$

Considerăm separat doar ecuaţiile corespunzătoare modurilor u_{k0} şi v_{k0}, adică,

$$\begin{cases} (u_{k0})_t - \nu[-k^2 u_{k0} + u''_{k0}] + \mathrm{i}kU^e u_{k0} + (U^e)' v_{k0} = -\mathrm{i}kp_{k0}, \text{ a.p.t. în } (0,1), \\ (v_{k0})_t - \nu[-k^2 v_{k0} + v''_{k0}] + \mathrm{i}kU^e v_{k0} = -p'_{k0}, \text{ a.p.t. în } (0,1), \\ \mathrm{i}ku_{k0} + v'_{k0} = 0, \text{ a.p.t. în } (0,1), \\ u_{k0}(0) = u_{k0}(1) = 0, \; v_{k0}(0) = 0, \; v_{k0}(1) = \psi_{k0}, \; \forall t \geq 0. \end{cases} \tag{1.3.13}$$

Observăm imediat că u_{k0}, v_{k0} şi p_{k0} verifică aceeaşi problemă de control la frontieră (1.1.5) ca şi u_k, v_k, respectiv p_k. Prin urmare, putem obţine un rezultat asemănător cu cel din Teorema 1.1.2 şi Remarca 1.1.1, şi anume: există $\alpha_1, C_1 > 0$ astfel încât, pentru toţi $0 < |k| \leq S$, controlul feedback

$$\psi_{k0} := -\nu(L_k^{-2} R_k L_k v_{k0}(t))'''(1), \tag{1.3.14}$$

odată introdus în sistemul (1.3.13), soluţia corespunzătoare sistemului buclă închisă (1.3.13) satisface estimarea

$$\|u_{k0}\|^2 + \|v_{k0}\|^2 \leq C_1 e^{-\alpha_1 t}(\|u_{k0}^0\|^2 + \|v_{k0}^0\|^2), \; \forall t \geq 0, \tag{1.3.15}$$

unde L_k este definit în (1.1.12), iar operatorii R_k sunt introduşi în Teorema 1.1.2. Pentru $|k| > S$, avem

$$\|u_{k0}(t)\|^2 + \|v_{k0}(t)\|^2 \leq e^{-\nu S^2 t}\left(\|u_{k0}^0\|^2 + \|v_{k0}^0\|^2\right), \; \forall t \geq 0. \tag{1.3.16}$$

Multiplicând scalar a treia ecuaţie a sistemului (1.3.12) cu w_{k0} şi luând partea reală a rezultatului, obţinem că

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w_{k0}\|^2 + \nu k^2 \|w_{k0}\|^2 + \nu\|w'_{k0}\|^2 = 0, \; \forall t \geq 0. \tag{1.3.17}$$

De unde găsim că, pentru toţi $k \in \mathbb{Z}^*$, avem

$$\|w_{k0}(t)\|^2 \leq e^{-\nu t}\|w_{k0}^0\|^2, \forall t \geq 0. \tag{1.3.18}$$

Deci, punând împreună relaţiile (1.3.15) şi (1.3.18), vedem că există $\alpha_2, C_2 > 0$, astfel încât pentru toţi $0 < |k| \leq S$, controlul feedback

$$\psi_{k0} = -\nu(L_k^{-2} R_k L_k v_{k0}(t))'''(1), \tag{1.3.19}$$

odată introdus în sistemul (1.3.12), soluţia corespunzătoare sistemului cu buclă închisă (1.3.12) satisface estimările

$$\|u_{k0}(t)\|^2 + \|v_{k0}(t)\|^2 + \|w_{k0}(t)\|^2 \leq C_2 e^{-\alpha_2 t}(\|u_{k0}^0\|^2 + \|v_{k0}^0\|^2 + \|w_{k0}^0\|^2), \forall t \geq 0. \tag{1.3.20}$$

Mai mult, din (1.3.16) şi (1.3.18), avem că

$$\|u_{k0}(t)\|^2 + \|v_{k0}(t)\|^2 + \|w_{k0}(t)\|^2 \leq e^{-\nu S^2 t}(\|u_{k0}^0\|^2 + \|v_{k0}^0\|^2 + \|w_{k0}^0\|^2), \forall t \geq 0, \tag{1.3.21}$$

pentru toţi $|k| > S$.

Când $k = 0$ şi $l \neq 0$, sistemul (1.3.6) are forma

$$\begin{cases} (u_{0l})_t - \nu[-l^2 u_{0l} + u''_{0l}] + (U^e)' v_{0l} = 0, \text{ a.p.t. în } (0,1), \\ (v_{0l})_t - \nu[-l^2 v_{0l} + v''_{0l}] = -p'_{0l}, \text{ a.p.t. în } (0,1), \\ (w_{0l})_t - \nu[-l^2 w_{0l} + w''_{0l}] = -\mathrm{i} l p_{0l}, \text{ a.p.t. în } (0,1), \\ v'_{0l} + \mathrm{i} l w_{0l} = 0, \text{ a.p.t. în } (0,1), \\ u_{0l}(0) = u_{0l}(1) = 0, \ v_{0l}(0) = 0, \ v_{0l}(1) = \psi_{0l}, \\ w_{0l}(0) = w_{0l}(1) = 0, \ \forall t \geq 0. \end{cases} \tag{1.3.22}$$

Reducem presiunea din a doua şi a treia ecuaţie a sistemului (1.3.22), luăm în considerare divergenţa zero, şi obţinem că

$$\begin{cases} (-v''_{0l} + l^2 v_{0l})_t + \nu(v''''_{0l} - 2l^2 v''_{0l} + l^4 v_{0l}) = 0, \text{ a.p.t. în } (0,1), \\ v_{0l}(0) = 0, \ v_{0l}(1) = \psi_{0l}, \ v'_{0l}(0) = v'_{0l}(1) = 0. \end{cases} \tag{1.3.23}$$

Punem $\psi_{0l} \equiv 0$, înmulţim scalar ecuaţia (1.3.23) cu v_{0l}, şi luăm partea reală a rezultatului. Obţinem astfel

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(l^2\|v_{0l}\|^2 + \|v'_{0l}\|^2) + \nu\|v''_{0l}\|^2 + 2l^2\nu\|v'_{0l}\|^2 + \nu l^4\|v_{0l}\|^2 = 0, \ \forall t \geq 0.$$

De unde

$$\frac{d}{dt}(l^2\|v_{0l}\|^2 + \|v'_{0l}\|^2) + \nu(l^2\|v_{0l}\|^2 + \|v'_{0l}\|^2) \leq 0, \ \forall t \geq 0.$$

Folosind aceasta, şi luând din nou în considerare divergenţa zero, deducem că

$$\|v_{0l}(t)\|^2 + \|w_{0l}(t)\|^2 \leq e^{-\nu t}(\|v^0_{0l}\|^2 + \|w^0_{0l}\|^2), \ \forall t \geq 0, \tag{1.3.24}$$

pentru toţi $l \in \mathbb{Z}^*$.

Multiplicăm scalar prima ecuaţie a sistemului (1.3.22) cu u_{0l} şi obţinem, făcând câteva calcule şi utilizând relaţia (1.3.24), că

$$\|u_{0l}(t)\|^2 \leq Ce^{-\nu t}(\|u^0_{0l}\|^2 + \|v^0_{0l}\|^2 + \|w^0_{0l}\|^2), \ \forall t \geq 0,$$

pentru un $C > 0$.

Deci, când $k = 0$ şi $l \neq 0$, putem considera control nul la frontieră, adică $\psi_{0l} \equiv 0$, pentru a obţine că soluţia sistemului (1.3.22) satisface

$$\|u_{0l}(t)\|^2 + \|v_{0l}(t)\|^2 + \|w_{0l}(t)\|^2 \leq C_3 e^{-\nu t}(\|u^0_{0l}\|^2 + \|v^0_{0l}\|^2 + \|w^0_{0l}\|^2), \forall t \geq 0, \tag{1.3.25}$$

pentru un $C_3 > 0$.

De acum înainte, vom considera doar cazul în care $k \neq 0$ şi $l \neq 0$. Întorcându-ne la sistemul (1.3.6), eliminăm presiunea astfel: adunăm la cea de-a doua ecuaţie a sistemului

(1.3.6), înmulţită cu k^2+l^2, derivata primei ecuaţii a sistemului (1.3.6), înmulţită cu $\mathrm{i}k$, şi derivata celei de-a treia ecuaţii a sistemului (1.3.6), înmulţită cu $\mathrm{i}l$. Obţinem că

$$\begin{cases} [v''_{kl}-(k^2+l^2)v_{kl}]_t-\nu v''''_{kl}+[2\nu(k^2+l^2)+\mathrm{i}kU^e]v''_{kl} \\ \qquad -[\nu(k^2+l^2)^2+\mathrm{i}k(k^2+l^2)U^e+\mathrm{i}k(U^e)'']v_{kl}=0, \\ t\geq 0, y\in(0,1), \\ v'_{kl}(0)=v'_{kl}(1)=0, v_{kl}(0)=0, v_{kl}(1)=\psi_{kl}(t), \end{cases} \tag{1.3.26}$$

folosind şi relaţia dată de divergenţa zero, adică, $\mathrm{i}ku_{kl}+v'_{kl}+\mathrm{i}lw_{kl}=0$.

Pentru toţi $k,l\in\mathbb{Z}^*$ notăm cu $L_{kl}:\mathcal{D}(L_{kl})\subset H\to H$ şi $F_{kl}:\mathcal{D}(F_{kl})\subset H\to H$ operatorii liniari, definiţi astfel

$$L_{kl}v:=-v''+(k^2+l^2)v, \mathcal{D}(L_{kl})=H_0^1(0,1)\cap H^2(0,1), \tag{1.3.27}$$

$$F_{kl}v:=\nu v''''-(2\nu(k^2+l^2)+\mathrm{i}kU^e)v''+(\nu(k^2+l^2)^2+\mathrm{i}k(k^2+l^2)U^e+\mathrm{i}k(U^e)'')v, \tag{1.3.28}$$
$$\mathcal{D}(F_{kl})=H^4(0,1)\cap H_0^2(0,1).$$

De asemena, introducem următoarele expresii diferenţiale

$$\mathcal{L}_{kl}v:=-v''+(k^2+l^2)v,$$

şi

$$\mathcal{F}_{kl}v:=\nu v''''-(2\nu(k^2+l^2)+\mathrm{i}kU^e)v''+(\nu(k^2+l^2)^2+\mathrm{i}k(k^2+l^2)U^e+\mathrm{i}k(U^e)'')v.$$

Cu aceste notaţii, ecuaţia (1.3.26) devine

$$(\mathcal{L}_{kl}v_{kl})_t+\mathcal{F}_{kl}v_{kl}=0, t\geq 0, y\in(0,1), \tag{1.3.29}$$

$$v'_{kl}(0)=v'_{kl}(1)=0,\ v_{kl}(0)=0,\ v_{kl}(1)=\psi_{kl}(t).$$

Urmăm aceeaşi paşi ca în cazul doi-dimensional şi obţinem că sistemul (1.3.29) se rescrie echivalent, astfel

$$(L_{kl}v_{kl})_t+\tilde{\mathbf{A}}_{kl}L_{kl}v_{kl}=(\theta+\tilde{F}_{kl})D_{kl}\psi_{kl},\ t>0, \tag{1.3.30}$$

cu data iniţială v^0_{kl}. În cele ce urmează, vom detalia operatorii ce apar în sistemul (1.3.30). Aşadar, $\tilde{\mathbf{A}}_{kl}$ este extinderea la întreg spaţiul H al operatorului $\mathbf{A}_{kl}:\mathcal{D}(\mathbf{A}_{kl})\subset H\to H$, definit astfel

$$\mathbf{A}_{kl}:=F_{kl}L_{kl}^{-1},\ \mathcal{D}(\mathbf{A}_{kl})=\left\{v\in H: L_{kl}^{-1}v\in\mathcal{D}(F_{kl})\right\}, \tag{1.3.31}$$

pentru care avem adevărat următorul rezultat ce corespunde Lemei 1.1.1, din cazul doi-dimensional.

Lema 1.3.1 *Operatorul $-\boldsymbol{A}_{kl}$ generează un C_0-semigrup analitic pe H, şi pentru orice $\lambda\in\rho(-\boldsymbol{A}_{kl})$, $(\lambda I+\boldsymbol{A}_{kl})^{-1}$ este compact. Mai mult, avem că*

$$\sigma(-\boldsymbol{A}_{kl})\subset\{\lambda\in\mathbb{C}:\Re\lambda\leq 0\}, \forall k,l \text{ astfel încât } \sqrt{k^2+l^2}>S,$$

unde S este dat de relaţia (1.1.19).

Demonstraţie Se poate adapta uşor demonstraţia din [17, Lemma 1], pentru acest caz. $\square$

Remarca 1.3.1 O primă consecinţă a Lemei 1.3.1 este următorul rezultat, similar cu cel din Remarca 1.1.1.

Pentru $\sqrt{k^2+l^2} > S$, să considerăm sistemul (1.3.6) (care este echivalent cu (1.3.26)) necontrolat la frontieră, adică

$$\begin{cases} (u_{kl})_t - \nu[-(k^2+l^2)u_{kl} + u''_{kl}] + \mathrm{i}kU^e u_{kl} + (U^e)'v_{kl} = -\mathrm{i}kp_{kl}, y \in (0,1), \\ (v_{kl})_t - \nu[-(k^2+l^2)v_{kl} + v''_{kl}] + \mathrm{i}kU^e v_{kl} = -p'_{kl}, y \in (0,1), \\ (w_{kl})_t - \nu[-(k^2+l^2)w_{kl} + w''_{kl}] + \mathrm{i}kU^e w_{kl} = -\mathrm{i}lp_{kl}, y \in (0,1), \\ \mathrm{i}ku_{kl} + v'_{kl} + \mathrm{i}lw_{kl} = 0, y \in (0,1), \\ u_{kl}(0) = u_{kl}(1) = 0, v_{kl}(0) = 0, v_{kl}(1) = 0, \\ w_{kl}(0) = w_{kl}(1) = 0. \end{cases} \tag{1.3.32}$$

Înmulţind scalar prima ecuaţie cu u_{kl}, a doua cu v_{kl} şi a treia cu w_{kl}, făcând câteva calcule în care ţinem cont de faptul că $\sqrt{k^2+l^2} > S$, obţinem

$$\|u_{kl}(t)\|^2 + \|v_{kl}(t)\|^2 + \|w_{kl}(t)\|^2 \le e^{-\nu S^2 t}\left(\|u_k^0\|^2 + \|v_k^0\|^2 + \|w_k^0\|^2\right), \tag{1.3.33}$$

$$t \ge 0,\ \ k, l \ne 0, \sqrt{k^2+l^2} > S.$$

Relaţia (1.3.33) implică faptul că pentru $\sqrt{k^2+l^2} > S$, stabilitatea exponenţială a sistemului (1.3.6) (echivalent, (1.3.26), (1.3.29) sau (1.3.30)) are loc fără a aplica vreun control la frontieră. Deci, vom controla sistemul (1.3.30), doar pentru $\sqrt{k^2+l^2} \le S$.

Continuăm cu descrierea operatorilor ce apar în (1.3.30). Operatorii $\tilde{F}_{kl}$ şi $\tilde{L}_{kl}$ sunt extinderile operatorilor F_{kl}, respectiv L_{kl}, la întreg spaţiul H, iar operatorul Dirichlet D_{kl} este introdus, în acest caz, astfel: pentru toţi $\psi \in \mathbb{C}$, notăm cu $D_{kl}\psi := V \in H^4(0,1)$ soluţia ecuaţiei

$$\begin{aligned} &\theta V + \mathcal{F}_{kl}V = 0, \forall y \in (0,1), \\ &V'(0) = V'(1) = 0, V(0) = 0, V(1) = \psi. \end{aligned} \tag{1.3.34}$$

Similar cu cazul doi-dimensional, dualul $((\theta + \tilde{F}_{kl})D_{kl})^*$ este dat de

$$((\theta + \tilde{F}_{kl})D_{kl})^*\phi = \nu\phi'''(1), \tag{1.3.35}$$

pentru toţi $\phi \in H^4(0,1), \phi(0) = \phi(1) = 0, \phi'(0) = \phi'(1) = 0$.

Pentru toţi $k, l \in \mathbb{Z}^*$, notăm cu $\left\{\lambda_j^{kl}\right\}_{j=1}^{\infty}$, autovalorile operatorului $-\mathbf{A}_{kl}$. Deci, $\left\{\overline{\lambda_j^{kl}}\right\}_{j=1}^{\infty}$ sunt autovalorile operatorului dual $-\mathbf{A}_{kl}^*$, al lui $-\mathbf{A}_{kl}$. De asemenea, notăm cu $\left\{\phi_j^{kl}\right\}_{j=1}^{\infty}$ şi $\left\{\phi_j^{*kl}\right\}_{j=1}^{\infty}$ autofuncţiile corespunzătoare lui $-\mathbf{A}_{kl}$, respectiv $-\mathbf{A}_{kl}^*$.

După cum am văzut în Remarca 1.3.1, trebuie să stabilizăm sistemul (1.3.30) doar pentru $\sqrt{k^2+l^2} \leq S$. Aşadar, să considerăm $k, l \in \mathbb{Z}$ astfel încât $\sqrt{k^2+l^2} \leq S$. Lema 1.3.1 spune că $-\mathbf{A}_{kl}$ generează un C_0-semigrup analitic cu rezolventă compactă în H, prin urmare are doar un număr finit N_{kl} de autovalori λ_j^{kl} cu $\Re\lambda_j^{kl} \geq 0$, numite autovalori instabile. Ca şi în cazul doi-dimensional, avem următorul rezultat cheie referitor la semnul derivatei a treia, calculate în $y = 1$, al autofuncţiilor duale, corespunzătoare autovalorilor instabile.

Lema 1.3.2 *Fie $\overline{\lambda_j^{kl}}$, pentru o pereche (k, l) astfel încât $\sqrt{k^2+l^2} \leq S$ şi un $j \in \{1, ..., N_{kl}\}$, o autovaloare instabilă a lui $-\boldsymbol{A}_{kl}^*$. Atunci, putem alege autofuncţia duală ϕ_j^{kl*}, corespunzătoare acesteia, astfel încât $\Re(\phi_j^{kl*})'''(1) > 0$.*

Demonstraţie. Demonstraţia este similară cu cea din Lema 1.1.2, de aceea va fi omisă.□

Urmând ideile din cazul doi-dimensional, se poate arăta cu uşurinţă că operatorii liniari Dirichlet D_{kl} sunt continui de la $\mathbb{C}$ în H.

1.3.3 Stabilizare feedback pentru sistemul liniarizat (1.3.4)-(1.3.5)

Ne propunem să obţinem un rezultat de stabilizare exponenţială asemănător cu cel din cazul doi-dimensional. Mai precis, vom demonstra următoarea teoremă.

Teorema 1.3.1 *Există un control feedback, finit-dimensional Ψ, de forma*

$$\Psi(t, x, z) = \sum_{k,l\in\mathbb{Z}} \psi_{kl}(t)e^{\mathrm{i}kx}e^{\mathrm{i}lz}, \tag{1.3.36}$$

unde

$$\psi_{kl}(t) = \begin{cases} -\nu(L_k^{-2}R_kL_kv_{k0}(t))'''(1) & \text{pentru } 0 < |k| \leq S,\ l = 0, \\ 0 & \text{pentru } |k| > S,\ l = 0, \\ 0 & \text{pentru } k = 0,\ l \in \mathbb{Z}, \\ -\nu(L_{kl}^{-2}R_{kl}L_{kl}v_{kl}(t))'''(1) & \text{pentru } k, l \in \mathbb{Z}^* \text{ şi } \sqrt{k^2+l^2} \leq S, \\ 0 & \text{pentru } k, l \in \mathbb{Z}^* \text{ şi } \sqrt{k^2+l^2} > S, \end{cases} \tag{1.3.37}$$

astfel încât, odată introdus în ecuaţia (1.3.4) $-$ (1.3.5)*, soluţia corespunzătoare sistemului cu buclă închisă* (1.3.4) $-$ (1.3.5) *satisface*

$$\|(u(t), v(t), w(t))\|^2 \leq C_\gamma e^{-\gamma t}\|(u^0, v^0, w^0)\|^2,\ t \geq 0,$$

pentru nişte constante $C_\gamma, \gamma > 0$. Aici

$$v_{kl}(t, y) = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} v(t, x, y, z)e^{-\mathrm{i}kx}e^{-\mathrm{i}lz}dxdz,$$

$R_{kl} : X \to X$ sunt operatori liniari, auto-adjuncţi ce satisfac ecuaţii algebrice Riccati în H

$$\left\langle L_{kl}^{-1}R_{kl}z_0, L_{kl}^{-1}\boldsymbol{A}_{kl}z_0\right\rangle + \frac{1}{2}\nu^2|(L_{kl}^{-2}R_{kl}z_0)'''(1)|^2 = \frac{1}{2}\|L_{kl}^{-1}z_0\|^2, \forall z_0 \in H,$$

pentru toţi $k, l \neq 0, \sqrt{k^2+l^2} \leq S$, S dat de (1.1.19). *$\boldsymbol{A}_{kl} = F_{kl}L_{kl}^{-1}$, unde F_{kl} este definit în* (1.3.28) *şi L_{kl} definit în* (1.3.27). *Operatorii L_k şi F_k sunt introduşi în (1.1.12), respectiv, (1.1.13), iar operatorii R_k sunt introduşi în Teorema 1.1.2. $X = (H^2(0, 1) \cap H_0^1(0, 1))^*$.*

Demonstraţie. Aplicând acelaşi procedeu ca în cazul doi-dimensional, se poate obţine un rezultat de stabilizare feedback pentru sistemul (1.3.30), similar cu cel din Teorema 1.1.2. Mai precis, via metodei controlului optimal, găsim operatorii liniari, auto-adjuncţi $R_{kl} : X \to X$ ce satisfac ecuatii Riccati în H

$$\left\langle L_{kl}^{-1}R_{kl}z_0, L_{kl}^{-1}\mathbf{A}_{kl}z_0\right\rangle + \frac{1}{2}\nu^2|(L_{kl}^{-2}R_{kl}z_0)'''(1)|^2 = \frac{1}{2}\|L_{kl}^{-1}z_0\|^2, \forall z_0 \in H.$$

Cu ajutorul acestora, demonstrăm apoi că există constantele $C_{\gamma_{kl}}, \gamma_{kl} > 0$ astfel încât, odată introdus controlul feedback

$$\psi_{kl}(t) := -\nu(L_{kl}^{-2}R_{kl}L_{kl}^{-1}v_{kl}(t))'''(1),$$

în ecuaţia (1.3.30), soluţia corespunzătoare sistemului cu buclă închisă (1.3.30) satisface următoarea descreştere exponenţială

$$\|v_{kl}(t)\|^2 \leq C_{\gamma_{kl}}e^{-\gamma_{kl}t}\|v_{kl}^0\|^2, \forall t \geq 0,\ k,l \neq 0,\ \sqrt{k^2+l^2} \leq S. \tag{1.3.38}$$

Apoi, folosind acelaşi artificiu ca în Remarca 1.1.7, obţinem şi o descreştere exponenţială pentru derivata v_{kl}' în norma L^2. Mai precis, avem

$$\|v_{kl}'(t)\|^2 \leq C_{kl}e^{-\alpha_{kl}t}\|v_{kl}^0\|^2,\ t \geq 0,\ k,l \neq 0,\ \sqrt{k^2+l^2} \leq S, \tag{1.3.39}$$

pentru nişte $C_{kl}, \alpha_{kl} > 0$. Din relaţia dată de divergenţa zero, avem $\mathrm{i}ku_{kl} + \mathrm{i}lw_{kl} = -v_{kl}'$. Prin urmare, relaţia (1.3.39) implică

$$\|ku_{kl}(t) + lw_{kl}(t)\|^2 \leq C_{kl}e^{-\alpha_{kl}t}\|v_{kl}^0\|^2,\ t \geq 0,\ k,l \neq 0,\ \sqrt{k^2+l^2} \leq S. \tag{1.3.40}$$

Înmulţim prima ecuaţie a sistemului (1.3.6) cu $\mathrm{i}l$, a treia cu $-\mathrm{i}k$, şi le sumăm, pentru a obţine că

$$\begin{aligned}(\mathrm{i}lu_{kl} - \mathrm{i}kw_{kl})_t - \nu[-(k^2+l^2)(\mathrm{i}lu_{kl} - \mathrm{i}kw_{kl}) + (\mathrm{i}lu_{kl} - \mathrm{i}kw_{kl})'']\\ + \mathrm{i}kU^e(\mathrm{i}lu_{kl} - \mathrm{i}kw_{kl}) + \mathrm{i}l(U^e)'v_{kl} = 0.\end{aligned} \tag{1.3.41}$$

Apoi, înmulţind scalar ecuaţia (1.3.41) cu $(\mathrm{i}lu_{kl} - \mathrm{i}kw_{kl})$ şi luând partea reală a rezultatului, deducem că

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathrm{i}lu_{kl} - \mathrm{i}kw_{kl}\|^2 + \nu(k^2+l^2)\|\mathrm{i}lu_{kl} - \mathrm{i}kw_{kl}\|^2 + \nu\|(\mathrm{i}lu_{kl} - \mathrm{i}kw_{kl})'\|^2$$

$$= -\mathrm{i}l\int_0^1 (U^e)'v_{kl}\overline{\mathrm{i}lu_{kl} - \mathrm{i}kw_{kl}}dy.$$

Deci,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathrm{i}lu_{kl} - \mathrm{i}kw_{kl}\|^2 + \nu(k^2+l^2)\|\mathrm{i}lu_{kl} - \mathrm{i}kw_{kl}\|^2 \leq |l|\left|\int_0^1 (U^e)'v_{kl}\overline{\mathrm{i}lu_{kl} - \mathrm{i}kw_{kl}}dy\right|$$

$$\leq |l|\frac{1}{2}\left(\frac{\nu(k^2+l^2)}{|l|}\|\mathrm{i}lu_{kl} - \mathrm{i}kw_{kl}\|^2 + \frac{|l|}{\nu(k^2+l^2)}\mathcal{C}_1\|v_{kl}\|^2\right).$$

Ceea ce implică

$$\frac{d}{dt}\|\mathrm{i}lu_{kl}-\mathrm{i}kw_{kl}\|^2+\nu(k^2+l^2)\|\mathrm{i}lu_{kl}-\mathrm{i}kw_{kl}\|^2\leq \mathcal{C}_1\|v_{kl}\|^2.$$

Din estimările de mai sus şi relaţia (1.3.38), deducem uşor că

$$\|lu_{kl}(t)-kw_{kl}(t)\|^2\leq C^1_{kl}e^{-\nu t}(\|u^0_{kl}\|^2+\|v^0_{kl}\|^2+\|w^0_{kl}\|^2), \tag{1.3.42}$$

$t\geq 0,\ k,l\neq 0,\ \sqrt{k^2+l^2}\leq S$, pentru un $C^1_{kl}>0$. Luând în considerare că

$$\|ku_{kl}+lw_{kl}\|^2+\|lu_{kl}-kw_{kl}\|^2=(k^2+l^2)(\|u_{kl}\|^2+\|w_{kl}\|^2),$$

relaţiile (1.3.40) şi (1.3.42) implică

$$\|u_{kl}\|^2+\|w_{kl}\|^2\leq C^2_{kl}e^{-\beta_{kl}t}(\|u^0_{kl}\|^2+\|v^0_{kl}\|^2+\|w^0_{kl}\|^2), \tag{1.3.43}$$

$t\geq 0,\ k,l\neq 0,\ \sqrt{k^2+l^2}\leq S$, pentru nişte $C^2_{kl},\beta_{kl}>0$. În sfârşit, relaţiile (1.3.38) şi (1.3.43) implică

$$\|u_{kl}(t)\|^2+\|v_{kl}(t)\|^2+\|w_{kl}(t)\|^2\leq C^3_{kl}e^{-\mu_{kl}t}\left(\|u^0_{kl}\|^2+\|v^0_{kl}\|^2+\|w^0_{kl}\|^2\right), \tag{1.3.44}$$

$t\geq 0,\ k,l\neq 0,\ \sqrt{k^2+l^2}\leq S$, pentru nişte $C^3_{kl},\mu_{kl}>0$.

Concluzionăm că relaţiile (1.3.10), (1.3.11), (1.3.20), (1.3.21), (1.3.25), (1.3.33) şi (1.3.44) implică faptul că, odată introdus controlul feedback

$$\Psi(t,x,z)=\sum_{k,l\in\mathbb{Z}}\psi_{kl}(t)e^{ikx}e^{ilz}, \tag{1.3.45}$$

unde

$$\psi_{kl}(t)=\begin{cases}-\nu(L_k^{-2}R_kL_kv_{k0}(t))'''(1) & \text{pentru } 0<|k|\leq S,\ l=0,\\ 0 & \text{pentru } |k|>S,\ l=0,\\ 0 & \text{pentru } k=0,\ l\in\mathbb{Z},\\ -\nu(L_{kl}^{-2}R_{kl}L_{kl}v_{kl}(t))'''(1) & \text{pentru } k,l\neq 0 \text{ şi } \sqrt{k^2+l^2}\leq S,\\ 0 & \text{pentru } \sqrt{k^2+l^2}>S,\end{cases} \tag{1.3.46}$$

în ecuaţia (1.3.4) − (1.3.5), soluţia corespunzătoare sistemului cu buclă închisă (1.3.4) − (1.3.5) satisface

$$\|(u(t),v(t),w(t))\|^2\leq C_\gamma e^{-\gamma t}\|(u^0,v^0,w^0)\|^2,\ t\geq 0,$$

pentru nişte constante $C_\gamma,\gamma>0$. □

Remarca 1.3.2 Se poate considera şi cazul controlului ce acţionează tangenţial, similar cu cel din cazul canalului doi-dimensional. Astfel, în mod similar, se poate obţine un rezultat de stabilizare locală pentru sistemul neliniar (1.3.1)-(1.3.2).

1.4 Stabilizare feedback normală a fluidelor periodice într-un canal magnetohidrodinamic doi şi trei dimensional

În această secţiune, vom continua studiul curgerii unui fluid printr-un canal (doi-dimensional sau trei-dimensional), însă, de această dată, vom presupune în plus că fluidul este conductibil electric şi că asupra sa se exercită un câmp magnetic exterior, perpendicular pe axa canalului. Fluidul este presupus cu valoarea numărului Reynolds magnetic mică, ceea ce va reduce semnificativ complexitatea problemei. Ca şi în cazul tipului de fluid considerat în prima parte a capitolului, vom obţine un rezultat de stabilizare feedback cu comenzi normale pe peretele superior, cu stabilitatea garantată indiferent de valoarea numărului Reynolds. Conţinutul acestei secţiuni este alcătuit în totalitate din rezultatele originale obţinute de către autor în lucrarea [70].

1.4.1 Prezentarea problemei şi principalele rezultate de stabilizare

Considerăm curgerea unui fluid conductibil electric, incompresibil, printr-un canal doi-dimensional, respectiv trei-dimensional, de forma

$$(x, y) \in (-\infty, \infty) \times (0, 1),$$

respectiv

$$(x, y, z) \in (-\infty, \infty) \times (0, 1) \times (-\infty, \infty),$$

asupra căruia se exercită un câmp magnetic exterior $B_0 = constant$, perpendicular pe axa canalului. Ecuaţiile ce guvernează mişcarea (numite ecuaţiile magnetohidrodinamice, prescurtat MHD) sunt o combinaţie între ecuaţiile Navier-Stokes şi ecuaţiile lui Maxwell. Mai exact, avem ecuaţiile de transport a momentului

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} - \mathcal{N}(\mathbf{j} \times \mathbf{B}) = -\nabla p, \tag{1.4.1}$$

şi ecuaţiile de transport a inducţiei magnetice

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{Rm}\Delta \mathbf{B}, \tag{1.4.2}$$

unde $\mathbf{v}$ reprezintă câmpul vitezelor fluidului, $\mathbf{B}$ reprezintă câmpul magnetic, $\mathbf{j}$ reprezintă densitatea de curent, şi p este presiunea. ν, Rm şi $\mathcal{N}$ reprezintă coeficientul de vâscozitate, numărul Reynolds magnetic, respectiv numărul Stuart. Densitatea de curent este dată de legea lui Ampere

$$\mathbf{j} = \frac{1}{Rm}\nabla \times \mathbf{B}. \tag{1.4.3}$$

Ambele, $\mathbf{B}$ şi $\mathbf{v}$, sunt solenoidale, adică

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0,\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \tag{1.4.4}$$

Vom presupune că valoarea numărului Reynolds magnetic Rm, a fluidului, este mică. Când $Rm << 1$, câmpul magnetic indus este foarte mic în comparaţie cu câmpul magnetic aplicat. Vom raţiona la fel ca în lucrarea [92], pentru cazul doi-dimensional, respectiv ca în lucrarea [87], pentru cazul trei-dimensional. Astfel, în cazul fluidelor cu valori mici ale numerelor Reynolds magnetice, ecuaţiile MHD (1.4.1)-(1.4.2) se transformă în aşa numitele ecuaţii magnetohidrodinamice simplificate (prescurtat SMHD):

$$\begin{cases} u_t - \nu\Delta u + \mathcal{N}u + uu_x + vu_y = -p_x, \\ v_t - \nu\Delta v + uv_x + vv_y = -p_y, \\ u_x + v_y = 0, \\ t \geq 0, x \in \mathbb{R}, y \in (0,1), \end{cases} \tag{1.4.5}$$

în două dimensiuni, respectiv

$$\begin{cases} U_t - \nu\Delta U + UU_x + VU_y + WU_z - \mathcal{N}\phi_z + \mathcal{N}U = -P_x, \\ V_t - \nu\Delta V + UV_x + VV_y + WV_z = -P_y \\ W_t - \nu\Delta W + UW_x + VW_y + WW_z + \mathcal{N}\phi_x + \mathcal{N}W = -P_z, \\ \Delta\phi = W_x - U_z, \\ U_x + V_y + W_z = 0, \\ t \geq 0, x, z \in \mathbb{R}, y \in (0,1), \end{cases} \tag{1.4.6}$$

în trei dimensiuni. Se observă imediat că sistemul (1.4.5) este de fapt (1.1.3), în care prima ecuaţie este perturbată cu termenul $\mathcal{N}u$. Însă, ecuaţiile (1.4.6) diferă substanţial de cele din sistemul (1.3.1), datorită prezenţei termenului ϕ, potenţialul electric al fluidului. Oricum, în cele ce urmează, vom vedea că se poate aplica, pentru acest caz, acelaşi algoritm de stabilizare, prezentat în secţiunile anterioare.

Profilurile staţionare, ce urmează a fi stabilizate, sunt profilurile Hartmann-Poiseuille

$$U^e = \frac{\sinh\left(\sqrt{\frac{1}{\nu}\mathcal{N}}(1-y)\right) - \sinh\sqrt{\frac{1}{\nu}\mathcal{N}} + \sinh\left(\sqrt{\frac{1}{\nu}\mathcal{N}}y\right)}{2\sinh\left(\sqrt{\frac{1}{\nu}\mathcal{N}}/2\right) - \sinh\sqrt{\frac{1}{\nu}\mathcal{N}}},\ V^e \equiv 0, \tag{1.4.7}$$

în două dimensiuni, respectiv

$$U^e = \frac{\sinh\left(\sqrt{\frac{1}{\nu}\mathcal{N}}(1-y)\right) - \sinh\sqrt{\frac{1}{\nu}\mathcal{N}} + \sinh\left(\sqrt{\frac{1}{\nu}\mathcal{N}}y\right)}{2\sinh\left(\sqrt{\frac{1}{\nu}\mathcal{N}}/2\right) - \sinh\sqrt{\frac{1}{\nu}\mathcal{N}}},\ V^e \equiv 0,\ W^e \equiv 0, \tag{1.4.8}$$

în trei dimensiuni. În sfârşit, liniarizatele sistemelor (1.4.5) şi (1.4.6) în jurul soluţiilor staţionare (1.4.7), respectiv (1.4.8), completate de condiţiile periodice la frontieră, sunt

$$\begin{cases} u_t - \nu\Delta u + u_x U^e + vU^e_y + \mathcal{N}u = -p_x, \\ v_t - \nu\Delta v + v_x U^e = -p_y, \\ u_x + v_y = 0,\ t \geq 0, x \in \mathbb{R}, y \in (0,1), \\ u(t,x,0) = u(t,x,1) = 0, v(t,x,0) = 0, v(t,x,1) = \Psi(t,x) \\ u(t,x+2\pi,y) = u(t,x,y), v(t,x+2\pi,y) = v(t,x,y), \\ p(t,x+2\pi,y) = p(t,x,y), \forall t \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in (0,1), \end{cases} \tag{1.4.9}$$

şi datele iniţiale u^0, v^0; respectiv

$$\begin{cases} U_t - \nu\Delta U + U^e U_x + V U^e_y - \mathcal{N}\phi_z + \mathcal{N}U = -P_x, \\ V_t - \nu\Delta V + U^e V_x = -P_y, \\ W_t - \nu\Delta W + U^e W_x + \mathcal{N}\phi_x + \mathcal{N}W = -P_z, \\ \Delta\phi = W_x - U_z, \\ U_x + V_y + W_z = 0,\ t \geq 0, x, z \in \mathbb{R}, y \in (0,1), \\ U(t, x+2\pi, y, z+2\pi) = U(t,x,y,z), \\ V(t, x+2\pi, y, z+2\pi) = V(t,x,y,z), \\ W(t, x+2\pi, y, z+2\pi) = W(t,x,y,z), \\ P(t, x+2\pi, y, z+2\pi) = P(t,x,y,z), \\ \phi(t, x+2\pi, y, z+2\pi) = \phi(t,x,y,z),\ t \geq 0, x, z \in \mathbb{R}, y \in (0,1), \\ U(t,x,0,z) = V(t,x,0,z) = W(t,x,0,z) = \phi(t,x,0,z) = 0, \\ U(t,x,1,z) = 0,\ V(t,x,1,z) = \Xi(t,x,z), \\ W(t,x,1,z) = \phi(t,x,1,z) = 0,\ t \geq 0, x, z \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{1.4.10}$$

şi datele iniţiale $U^0,\ V^0,\ W^0,\ \phi^0$. Folosim acelaşi cadru funcţional Fourier, ca în secţiuniile anterioare. Rescriem ecuaţiile liniare (1.4.9) şi (1.4.10) ca sisteme parbolice infinite

$$\begin{cases} (u_k)_t - \nu u_k'' + (\nu k^2 + \mathrm{i}kU^e)u_k + (U^e)'v_k + \mathcal{N}u_k = -\mathrm{i}kp_k, y \in (0,1), \\ (v_k)_t - \nu v_k'' + (\nu k^2 + \mathrm{i}kU^e)v_k = -p_k', y \in (0,1), \\ \mathrm{i}ku_k + v_k' = 0, y \in (0,1), \\ u_k(0) = u_k(1) = 0, v_k(0) = 0, v_k(1) = \psi_k, \end{cases} \tag{1.4.11}$$

$k \in \mathbb{Z}$, respectiv

$$\begin{cases} (u_{kl})_t - \nu(-(k^2+l^2)u_{kl} + u_{kl}'') + \mathrm{i}kU^e u_{kl} + (U^e)'v_{kl} - \mathrm{i}l\mathcal{N}\phi_{kl} + \mathcal{N}u_{kl} = -\mathrm{i}kp_{kl}, \\ (v_{kl})_t - \nu(-(k^2+l^2)v_{kl} + v_{kl}'') + \mathrm{i}kU^e v_{kl} = -p_{kl}', \\ (w_{kl})_t - \nu(-(k^2+l^2)w_{kl} + w_{kl}'') + \mathrm{i}kU^e w_{kl} + \mathrm{i}k\mathcal{N}\phi_{kl} + \mathcal{N}w_{kl} = -\mathrm{i}lp_{kl}, \\ -(k^2+l^2)\phi_{kl} + \phi_{kl}'' = \mathrm{i}kw_{kl} - \mathrm{i}lu_{kl}, \\ \mathrm{i}ku_{kl} + v_{kl}' + \mathrm{i}lw_{kl} = 0,\ t \geq 0, y \in (0,1), \\ u_{kl}(0) = u_{kl}(1) = w_{kl}(0) = w_{kl}(1) = 0, \\ v_{kl}(0) = 0, v_{kl}(1) = \xi_{kl}(t), \phi_{kl}(0) = \phi_{kl}(1) = 0, \end{cases} \tag{1.4.12}$$

$k, l \in \mathbb{Z}$.

Pentru început, construim un control feedback stabilizant pentru (1.4.11). Pentru aceasta, urmărim îndeaproape ideile din prima secţiune. Astfel, asemănător cu relaţiile (1.1.6)-(1.1.8) obţinem, pentru $k = 0$, că $v_0 \equiv 0$, $\psi_0 \equiv 0$ şi u_0 satisface descreşterea exponenţială

$$\|u_0(t)\|^2 \leq e^{-2C_0\nu t}\|u_0^0\|^2,\ t \geq 0. \tag{1.4.13}$$

Considerăm $k \neq 0$ şi reducem presiunea din (1.4.11). Avem

$$\begin{cases} (-v_k'' + k^2 v_k)_t + \nu v_k'''' - (2\nu k^2 + \mathrm{i}kU^e + \mathcal{N})v_k'' \\ \qquad\qquad + k(\nu k^3 + \mathrm{i}k^2 U^e + \mathrm{i}(U^e)'')v_k = 0,\ t \geq 0, y \in (0,1), \\ v_k'(0) = v_k'(1) = 0, v_k(0) = 0, v_k(1) = \psi_k(t), \end{cases} \tag{1.4.14}$$

luând în considerare şi relaţia dată de divergenţa zero. Definim operatorii liniari

$$L_k^{MHD} : \mathcal{D}(L_k^{MHD}) \subset H \to H, \; F_k^{MHD} : \mathcal{D}(F_k^{MHD}) \subset H \to H$$

şi $\mathbf{A}_k^{MHD} : \mathcal{D}(\mathbf{A}_k^{MHD}) \subset H \to H$, astfel

$$L_k^{MHD} v := -v'' + k^2 v, \; \mathcal{D}(L_k^{MHD}) = H_0^1 \cap H^2(0,1), \tag{1.4.15}$$

$$F_k^{MHD} v := \nu v'''' - (2\nu k^2 + \mathrm{i}kU^e + \mathcal{N})v'' + k(\nu k^3 + \mathrm{i}k^2 U^e + \mathrm{i}(U^e)'')v, \tag{1.4.16}$$
$$\mathcal{D}(F_k^{MHD}) = H^4(0,1) \cap H_0^2(0,1),$$

respectiv

$$\mathbf{A}_k^{MHD} := F_k^{MHD}(L_k^{MHD})^{-1}, \; \mathcal{D}(\mathbf{A}_k^{MHD}) = \left\{v \in H : (L_k^{MHD})^{-1} v \in \mathcal{D}(F_k^{MHD})\right\}. \tag{1.4.17}$$

Urmărind îndeaproape ideile din prima secţiune, obţinem un rezultat similar de stabilizare normală ca în Teorema 1.1.3. Înainte de a-l prezenta, însă, trebuie precizat că demonstraţia rezultatului cheie din Lema 1.1.2 prezintă unele diferenţe majore, în cazul canalului MHD (mai precis în **Pasul 3.** al demonstraţiei). Acestea nu se datorează neapărat prezenţei perturbaţiei $\mathcal{N}u$, ci mai ales diferenţei între profilurile de echilibru considerate (dacă în prima secţiune, profilul U^e satisfăcea $(U^e)'' = cst$, în cazul de faţă U^e nu mai are această proprietate). Din acest motiv îl vom prezenta mai jos, pe larg.

Lema 1.4.1 *Fie $\overline{\lambda_j^k}$, pentru un $0 < |k| \le S_1$ şi un $j \in \{1, ..., N_k\}$, o autovaloare instabilă pentru operatorul dual $(-\boldsymbol{A}_k^{MHD})^*$, al lui $-\boldsymbol{A}_K^{MHD}$. Atunci, putem alege o bază pentru spaţiul autofuncţiilor, corespunzător autovalorii $\overline{\lambda_j^k}$, alcătuită din funcţii ϕ^*, pentru care $\Re(\phi^*)'''(1) > 0$. Cu alte cuvinte, putem presupune că autofuncţia ϕ_j^{k*}, corespunzătoare autovalorii instabile $\overline{\lambda_j^k}$, satisface $\Re(\phi_j^{k*})'''(1) > 0$.*

Demonstraţie. La fel ca în demonstraţia Lemei 1.1.2 vom arăta că putem alege autofuncţia ϕ_j^{k*}, astfel încât

$$(\phi_j^{k*})'''(1) \neq 0,$$

dacă aceasta este negeneralizată. Atunci, înlocuind eventual ϕ_j^{k*} cu $\overline{(\phi_j^{k*})'''(1)}\phi_j^{k*}$, obţinem că $(\phi_j^{k*})'''(1) > 0$, după cum dorim. Demonstraţia este alcătuită din trei paşi şi, în mare, urmăreşte demonstraţia din Lema 1.1.2.

Pasul 1. Pentru o funcţie $f : [0,1] \to \mathbb{C}$, notăm cu $\check{f} : [0,1] \to \mathbb{C}$, următoarea funcţie

$$\check{f}(y) := f(1-y), \forall y \in [0,1].$$

Spunem că funcţia $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ este simetrică dacă şi numai dacă $f(y) = \check{f}(y), \; \forall y \in [0,1]$ şi anti-simetrică dacă şi numai dacă $f(y) = -\check{f}(y), \; \forall y \in [0,1]$.

În acest pas, vom arăta că putem presupune că autofuncţia ϕ_j^{k*} este simetrică sau anti-simetrică. Notăm cu $\lambda = \lambda_j^k$, autovaloarea instabilă. Dacă $\phi^* = \phi_j^{k*}$ este o autofuncţie corespunzătoare lui $\overline{\lambda}$, atunci ϕ^* satisface următoarea problemă cu valori la frontieră, pe intervalul $(0,1)$

$$\begin{cases} \nu(\phi^*)'''' - (2\nu k^2 - \mathrm{i}kU^e + \overline{\lambda} + \mathcal{N})(\phi^*)'' \\ \qquad\qquad + 2\mathrm{i}k(U^e)'(\phi^*)' + (k^2\overline{\lambda} + \nu k^4 - \mathrm{i}k^3 U^e)\phi^* = 0, \\ \phi^*(0) = \phi^*(1) = 0, (\phi^*)'(0) = (\phi^*)'(1) = 0. \end{cases} \tag{1.4.18}$$

Observvăm că şi $\check{\phi}^*$ este soluţie pentru (1.4.18), datorită formei simetrice a ecuaţiei (avem $U^e(1-y) = U^e(y), \forall y \in (0,1)$, vezi (1.4.7), derivate de ordin par, iar derivata de ordin impar este compensată de faptul că $(U^e)'(1-y) = -U^e(y), \forall y \in (0,1)$). Notăm cu $\mathcal{H}$ spaţiul liniar de dimensiune patru, peste corpul numerelor complexe, al soluţiilor ecuaţiei diferenţiale liniare şi omogene de ordin patru, pe intervalul $(0,1)$

$$\begin{aligned}\nu(\phi^*)'''' - (2\nu k^2 - \mathrm{i}kU^e + \overline{\lambda} + \mathcal{N})(\phi^*)'' + 2\mathrm{i}k(U^e)'(\phi^*)' \\ + (k^2\overline{\lambda} + \nu k^4 - \mathrm{i}k^3U^e)\phi^* = 0.\end{aligned} \tag{1.4.19}$$

Atunci, spaţiul autofuncţiilor poate fi reprezentat ca un subspaţiu liniar $\mathcal{E}$ al lui $\mathcal{H}$, definit astfel

$$\mathcal{E} := \{\phi \in \mathcal{H} : \phi(0) = \phi(1) = 0,\ \phi'(0) = \phi'(1) = 0\}$$

Aşadar, este clar că dimensiunea lui $\mathcal{E}$ este ≤ 2. Putem găsi o bază a acestui spaţiu liniar, alcătuită din funcţii simetrice sau anti-simetrice. Într-adevăr, să presupunem că există un $\phi \in \mathcal{E}$ care nu este nici simetrică nici anti-simetrică. Atunci următoarele două funcţii $\phi_1 = \phi + \check{\phi}$, $\phi_2 = \phi - \check{\phi}$ aparţin amândouă spaţiului $\mathcal{E}$. Mai mult, $\phi_1 \neq 0, \phi_2 \neq 0$ şi sistemul $\{\phi_1, \phi_2\}$ este liniar independent, deoarece ϕ_1 este simetrică iar ϕ_2 este anti-simetrică. Aceasta, împreună cu faptul că dimensiunea lui $\mathcal{E}$ este ≤ 2, susţine afirmaţia făcută anterior.

Prin urmare, putem presupune că autofuncţia corespunzătoare ϕ^* este simetrică sau anti-simetrică. Pentru a fixa ideile, să presupunem, de exemplu, că ϕ^* este simetrică. Celălalt caz poate fi tratat asemănător. Vrem să arătăm că avem $(\phi^*)'''(1) \neq 0$. Să presupunem, prin reducere la absurd, că avem $(\phi^*)'''(1) = 0$. Din simetrie rezultă imediat şi că $(\phi^*)'''(0) = 0$. Notăm cu $\mathtt{E}_k$ şi cu $\mathtt{E}_k^*$ următoarele forme diferenţiale

$$\mathtt{E}_k\phi := \nu\phi'''' - (2\nu k^2 + \mathrm{i}kU^e + \lambda + \mathcal{N})\phi'' + k(\nu k^3 + \mathrm{i}k^2U^e + \mathrm{i}(U^e)'' + k\lambda)\phi,$$

respectiv

$$\mathtt{E}_k^*\phi := \nu\phi'''' - (2\nu k^2 - \mathrm{i}kU^e + \overline{\lambda} + \mathcal{N})\phi'' + 2\mathrm{i}k(U^e)'\phi' + (k^2\overline{\lambda} + \nu k^4 - \mathrm{i}k^3U^e)\phi.$$

Este uşor de văzut că ϕ^* satisface $\mathtt{E}_k^*\phi^* = 0$. Avem

$$\begin{aligned}0 &= \int_0^1 \mathtt{E}_k^*\phi^*\overline{\phi}dy \\ &= \int_0^1 \phi^*\overline{\mathtt{E}_k\phi}dy + \nu((\phi^*)''(1)\overline{\phi'(1)} - (\phi^*)''(0)\overline{\phi'(0)}),\ \forall\phi \in H^4(0,1),\end{aligned} \tag{1.4.20}$$

datorită condiţiilor la frontieră pentru ϕ^*, adică,

$$\phi^*(0) = \phi^*(1) = 0, (\phi^*)'(0) = (\phi^*)'(1) = 0, (\phi^*)'''(0) = (\phi^*)'''(1) = 0.$$

Din (1.4.20) deducem că

$$\int_0^1 |\phi^*|^2 dy = 0, \tag{1.4.21}$$

dacă ϕ satisface

$$\begin{cases} \mathtt{E}_k\phi = \phi^*, \\ \phi'(0) = \phi'(1) = 0. \end{cases} \tag{1.4.22}$$

Relaţia (1.4.21) implică $\phi^* \equiv 0$, ceea ce este în contradicţie cu faptul că ϕ^* este o autofuncţie. Prin urmare, presupunerea făcută este falsă, ceea ce conduce la rezultatul dorit. Aşadar, pentru a termina demonstraţia, mai rămâne de arătat că există o soluţie ϕ pentru ecuaţia (1.4.22).

Pasul 2. Afirmăm că există o funcţie ϕ_1, astfel încât

$$\begin{cases} \mathtt{E}_k\phi_1 = 0, y \in (0,1), \\ \phi_1'(0) - \phi_1'(1) \neq 0. \end{cases} \tag{1.4.23}$$

Demonstraţia acestui fapt va fi prezentată in pasul al treilea. În acest pas vom arăta că, dacă afirmaţia de mai sus este adevărată, atunci există o soluţie pentru ecuaţia (1.4.22).

Construim următoarea funcţie $\phi_2 := \phi_1 + \check{\phi}_1$. Ca şi mai înainte, ecuaţia $\mathtt{E}_k\phi_1 = 0$ este simetrică, aceasta implicând faptul că ϕ_1, fiind soluţie, atunci şi $\check{\phi}_1$ este soluţie. Deci, avem

$$\begin{cases} \mathtt{E}_k\phi_2 = 0, \\ \phi_2'(0) = \phi_1'(0) - \phi_1'(1) \neq 0, \\ \phi_2 \text{ este simetrică }. \end{cases} \tag{1.4.24}$$

Fie ϕ_3 o soluţie pentru ecuaţia $\mathtt{E}_k\phi_3 = \phi^*$, astfel încât ϕ_3 să fie simetrică. Există o soluţie simetrică, deoarece ϕ^* este simetrică. Într-adevăr, fie ϕ_4 o soluţie a ecuaţiei $\mathtt{E}_k\phi_4 = \frac{1}{2}\phi^*$. Dacă luăm acum $\phi_3 := \phi_4 + \check{\phi}_4$, avem $\mathtt{E}_k\phi_3 = \frac{1}{2}\phi^* + \frac{1}{2}\phi^* = \phi^*$ şi ϕ_3 este simetrică.

Definim $\phi_5 := -\frac{\phi_3'(0)}{\phi_2'(0)}\phi_2 + \phi_3$. Avem că ϕ_5 satisface

$$\begin{cases} \mathtt{E}_k\phi_5 = \phi^*, \\ \phi_5 \text{ este simetrică}, \\ \phi_5'(0) = 0 \text{ şi, datorită simetriei, } \phi_5'(1) = 0. \end{cases} \tag{1.4.25}$$

Deci, putem lua $\phi = \phi_5$.

Pasul 3. După cum am anunţat şi în pasul anterior, în acest ultim pas vom demonstra că următoarea problemă are cel puţin o soluţie

$$\begin{cases} \mathtt{E}_k\phi_1 = 0, y \in (0,1), \\ \phi_1'(0) - \phi_1'(1) \neq 0. \end{cases} \tag{1.4.26}$$

Vom raţiona prin reducere la absurd. Presupunem că pentru orice soluţie ψ a ecuaţiei $\mathtt{E}_k\psi = 0$, avem $\psi'(0) - \psi'(1) = 0$. Să notăm cu $\mathcal{H}_1$ spaţiul liniar al soluţiilor ecuaţiei diferenţiale liniare si omogene $\mathtt{E}_k\psi = 0$ şi cu $\mathcal{E}_1$ subspaţiul liniar al lui $\mathcal{H}_1$, definit astfel

$$\mathcal{E}_1 := \{\psi \in \mathcal{H}_1 : \psi'''(0) - \psi'''(1) = 0\}.$$

Fie un oarecare $\psi \in \mathcal{E}_1$. Definim $\Psi := \psi + \check{\psi}$. Avem

$$\Psi'(0) = \psi'(0) - \psi'(1) = 0, \ \Psi'(1) = \psi'(1) - \psi'(0) = 0,$$

deoarece $\psi \in \mathcal{H}_1$. De asemenea,

$$\Psi'''(0) = \psi'''(0) - \psi'''(1) = 0, \ \Psi'''(1) = \psi'''(1) - \psi'''(0) = 0,$$

deoarece $\psi \in \mathcal{E}_1$. Notăm cu $\Phi := \nu\Psi'' - (\nu k^2 + \mathcal{N})\Psi$. Avem $\mathtt{E}_k\Psi = 0$, ecuaţie care poate fi rescrisă astfel

$$\Phi'' - \left(k^2 + \frac{\mathrm{i}k}{\nu}U^e + \frac{\lambda}{\nu}\right)\Phi - \mathcal{N}\left(k^2 + \frac{\mathrm{i}k}{\nu}U^e + \frac{\lambda}{\nu}\right)\Psi + \mathrm{i}k(U^e)''\Psi = 0. \tag{1.4.27}$$

Deoarece $(U^e, 0)$ este o soluţie staţionară pentru (1.4.5), avem

$$-\nu(U^e)'' + \mathcal{N}U^e = \mathcal{C},$$

unde $\mathcal{C} \in \mathbb{R}$. Prin urmare,

$$\mathrm{i}k(U^e)''\Psi = \frac{\mathrm{i}k\mathcal{N}}{\nu}U^e\Psi - \frac{\mathrm{i}k\mathcal{C}}{\nu}\Psi. \tag{1.4.28}$$

Deci, ecuaţia (1.4.27) devine

$$\Phi'' - \left(k^2 + \frac{\mathrm{i}k}{\nu}U^e + \frac{\lambda}{\nu}\right)\Phi - \mathcal{N}\left(k^2 + \frac{\lambda}{\nu}\right)\Psi - \frac{\mathrm{i}k\mathcal{C}}{\nu}\Psi = 0,\ y \in (0,1). \tag{1.4.29}$$

Faptul că $\Psi'(0) = \Psi'(1) = 0$ şi $\Psi'''(0) = \Psi'''(1) = 0$, implică

$$\Phi'(0) = \Phi'(1) = 0.$$

Deci, multiplicând scalar ecuaţia (1.4.29) cu Φ şi luând partea reală a rezultatului, avem

$$-\|\Phi'\|^2 - \left(k^2 + \frac{\Re\lambda}{\nu}\right)\|\Phi\|^2 - \Re\left[\mathcal{N}\left(k^2 + \frac{\lambda}{\nu}\right)\int_0^1 \Psi\overline{\Phi}dy + \frac{\mathrm{i}k\mathcal{C}}{\nu}\int_0^1 \Psi\overline{\Phi}dy\right] = 0. \tag{1.4.30}$$

Deoarece,

$$\overline{\Phi} = -\nu\overline{\Psi}'' - (\nu k^2 + \mathcal{N})\overline{\Psi},$$

deducem imediat că

$$\int_0^1 \Psi\overline{\Phi}dy = -\nu\|\Psi'\|^2 - (\nu k^2 + \mathcal{N})\|\Psi\|^2. \tag{1.4.31}$$

Astfel,

$$\int_0^1 \Psi\overline{\Phi}dy \in \mathbb{R},$$

şi ecuaţia (1.4.30) capătă forma

$$-\|\Phi'\|^2 - \left(k^2 + \frac{\Re\lambda}{\nu}\right)\|\Phi\|^2 + \mathcal{N}\left(k^2 + \frac{\Re\lambda}{\nu}\right)\left(\nu\|\Psi'\|^2 + (\nu k^2 + \mathcal{N})\|\Psi\|^2\right) = 0. \tag{1.4.32}$$

Un calcul simplu arată că

$$\|\Phi\|^2 = \nu^2\|\Psi''\|^2 + 2\nu(\nu k^2 + \mathcal{N})\|\Psi'\|^2 + (\nu k^2 + \mathcal{N})^2\|\Psi\|^2.$$

Deci, din (1.4.32) rezultă

$$-\|\Phi'\|^2 - \left(k^2 + \frac{\Re\lambda}{\nu}\right)(\nu^2\|\Psi''\|^2 + (2\nu^2k^2 + \nu\mathcal{N})\|\Psi'\|^2 + \nu k^2(\nu k^2 + \mathcal{N})\|\Psi\|^2) = 0. \tag{1.4.33}$$

Pentru că λ este o autovaloare instabilă, avem $\Re\lambda > 0$. Aşadar, relaţia de mai sus implică

$$\|\Phi'\| = \|\Psi''\| = \|\Psi'\| = \|\Psi\| = 0,$$

de unde $\Psi \equiv 0$, ceea ce înseamnă că $\psi = -\check{\psi}$. Conchidem că

$$\psi \in \mathcal{E}_1 \text{ implică } \psi = -\check{\psi}. \tag{1.4.34}$$

Să considerăm acum următoarele subspaţii ale lui $\mathcal{H}_1$, definite mai jos

$$\mathcal{S} := \left\{\psi \in \mathcal{H}_1 : \psi = \check{\psi}\right\}, \ \mathcal{AS} := \left\{\psi \in \mathcal{H}_1 : \psi = -\check{\psi}\right\},$$

care reprezintă subspaţiul simetric, respectiv anti-simetric al lui $\mathcal{H}_1$. Se verifică uşor că avem egalităţile

$$\mathcal{S} = \left\{\psi \in \mathcal{H}_1 : \psi'(\frac{1}{2}) = \psi'''(\frac{1}{2}) = 0\right\}$$

şi

$$\mathcal{AS} = \left\{\psi \in \mathcal{H}_1 : \psi(\frac{1}{2}) = \psi''(\frac{1}{2}) = 0\right\},$$

ceea ce implică $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{S} = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{AS} = 2$. Relaţia (1.4.34) implică $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{AS}$.

Considerăm următorul subspaţiu al lui $\mathcal{H}_1$

$$\mathcal{F}_1 := \{\psi \in \mathcal{H}_1 : \psi'''(0) = 0\}.$$

Avem că $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{F}_1 = 3$. Deoarece $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{S} = 2$, $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}_1 = 4$ şi $\mathcal{F}_1, \mathcal{S} \subset \mathcal{H}_1$, obţinem că

$$\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{S} \neq \{0\}.$$

Aşadar, există $0 \neq \psi \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{S}$. $\psi \in \mathcal{F}_1$ implică $\psi'''(0) = 0$, iar din simetrie (deoarece $\psi \in \mathcal{S}$) avem $\psi'''(1) = 0$. Aceasta conduce la relaţia $\psi'''(0) - \psi'''(1) = 0$, care împreună cu faptul că $\psi \in \mathcal{H}_1$, conduce la $\psi \in \mathcal{E}_1 \subset \mathcal{AS}$. În sfârşit, avem că $\psi \in \mathcal{S} \cap \mathcal{AS}$, ce implică $\psi \equiv 0$, ceea ce este absurd. Prin urmare, presupunerea făcută nu este adevărată. Aceasta înseamnă că există o funcţie ϕ_1 pentru care

$$\begin{cases} \mathtt{E}_k \phi_1 = \phi^*, y \in (0,1), \\ \phi_1'(0) - \phi_1'(1) \neq 0. \end{cases} \tag{1.4.35}$$

Cazul în care autofuncţiile duale sunt generalizate se tratează asemănător ca în Lema 1.1.2. $\square$

În sfârşit, putem enunţa rezultatul de stabilizare normală pentru cazul curgerii unui fluid conductibil electric printr-un canal doi-dimensional, asupra căruia acţionează un câmp magnetic transversal.

Teorema 1.4.1 *Există un control feedback, finit-dimensional Ψ de forma*

$$\Psi(t,x) = -\nu \sum_{0<|k|\leq S_1} ((L_k^{MHD})^{-2} R_k^{MHD} L_k^{MHD} v_k(t))'''(1) e^{\mathrm{i}kx}, \tag{1.4.36}$$

unde

$$v_k(t,y)=\int_0^{2\pi} v(t,x,y)e^{-\mathrm{i}kx}dx, 0<|k|\le S_1,$$

astfel încât, odată introdus în sistemul (1.4.9)*, soluţia corespunzătoare sistemului cu buclă închisă* (1.4.9) *satisface*

$$\|(u(t),v(t))\|^2 \le C_\alpha e^{-\alpha t}\|(u^0,v^0)\|^2, t\ge 0,$$

pentru nişte constante $C_\alpha,\alpha>0$*. Aici* $R_k^{MHD}: X\to X$ *sunt operatori liniari, auto-adjuncţi, ce satisfac ecuaţii algebrice Riccati în* H

$$\left\langle (L_k^{MHD})^{-1}R_k^{MHD}z_0, (L_k^{MHD})^{-1}\boldsymbol{A}_k^{MHD}z_0\right\rangle + \frac{1}{2}\nu^2|((L_k^{MHD})^{-2}R_k^{MHD}z_0)'''(1)|^2 = \frac{1}{2}\|(L_k^{MHD})^{-1}z_0\|^2, \tag{1.4.37}$$

$\forall z_0\in H$*, pentru toţi* $0<|k|\le S_1$*, unde* $S_1>0$ *este omologul lui* S *dat de relaţia* (1.1.19) *din Lema 1.1.1.* $\boldsymbol{A}_k^{MHD}$ *dat de* (1.4.17)*,* F_k^{MHD} *dat de* (1.4.16) *şi* L_k^{MHD} *dat de* (1.4.15)*.* $X=(H^2(0,1)\cap H_0^1(0,1))^*$.

Construcţia controlului stabilizant pentru (1.4.12) urmează, cu unele ajustări, la fel ca în cazul fluidului trei-dimensional considerat în cea de-a treia secţiune a acestui capitol. Vom studia, mai întâi, cazurile în care k sau l sunt nule.

Pentru $k=l=0$, luăm $\xi_{00}\equiv 0$, prin urmare sistemul (1.4.12) devine

$$\begin{cases} (u_{00})_t-\nu u_{00}''+(U^e)'v_{00}+\mathcal{N}u_{00}=0,\\ (v_{00})_t-\nu v_{00}''=p_{00}',\\ (w_{00})_t-\nu w_{00}''+\mathcal{N}w_{00}=0,\\ \phi_{00}''=0,\\ v_{00}'=0,\ t\ge 0, y\in(0,1),\end{cases} \tag{1.4.38}$$

şi

$$u_{00}(0)=u_{00}(1)=w_{00}(0)=w_{00}(1)=0,$$
$$v_{00}(0)=v_{00}(1)=0, \phi_{00}(0)=0, \phi_{00}(1)=0.$$

De unde deducem că $v_{00}\equiv 0$, $\phi_{00}\equiv 0$ şi

$$\|u_{00}(t)\|^2+\|w_{00}(t)\|^2\le e^{-\mathcal{N}t}(\|u_{00}^0\|^2+\|w_{00}\|^2),\ t\ge 0. \tag{1.4.39}$$

Pentru $k=0$ şi $l\ne 0$, luăm $\xi_{0l}\equiv 0$. Atunci, sistemul (1.4.12) devine

$$\begin{cases} (u_{0l})_t-\nu(-l^2u_{0l}+u_{0l}'')+(U^e)'v_{0l}-\mathrm{i}l\mathcal{N}\phi_{0l}+\mathcal{N}u_{0l}=0,\\ (v_{0l})_t-\nu(-l^2v_{0l}+v_{0l}'')=-p_{0l}',\\ (w_{0l})_t-\nu(-l^2w_{0l}+w_{0l}'')+\mathcal{N}w_{0l}=-\mathrm{i}lp_{0l},\\ -l^2\phi_{0l}+\phi_{0l}''=-\mathrm{i}lu_{0l},\\ v_{0l}'+\mathrm{i}lw_{0l}=0,\ t\ge 0, y\in(0,1),\end{cases} \tag{1.4.40}$$

şi

$$u_{0l}(0)=u_{0l}(1)=w_{0l}(0)=w_{0l}(1)=0,$$

$$v_{0l}(0)=0, v_{0l}(1)=0, \phi_{0l}(0)=\phi_{0l}(1)=0.$$

Reducem presiunea din cele două ecuaţii corespunzătoare modurilor v_{0l} şi w_{0l} şi folosim divergenţa zero. Obţinem

$$(l^2 v_{0l}-v''_{0l})_t+\nu v''''_{0l}-(2\nu l^2+\mathcal{N})v''_{0l}+\nu l^4 v_{0l}=0,\ y\in(0,1),$$

care, înmulţită scalar cu v_{0l}, implică, după câteva calcule,

$$\|v_{0l}(t)\|^2+\|w_{0l}(t)\|^2\leq e^{-\nu t}(\|v^0_{0l}\|^2+\|w^0_{0l}\|^2),\ t\geq 0. \tag{1.4.41}$$

Scriem acum prima ecuaţie din (1.4.40) în funcţie de ϕ_{0l}, utilizând cea de-a patra relaţie din (1.4.40). Avem

$$(l^2\phi_{0l}-\phi''_{0l})_t+\nu\phi''''_{0l}-(2\nu+\mathcal{N})\phi''_{0l}+\nu l^4\phi_{0l}-\mathrm{i}l(U^e)'v_{0l}=0,\ y\in(0,1),$$

care, înmulţită scalar cu ϕ_{0l}, implică, după câteva calcule,

$$\|(u_{0l}(t),v_{0l}(t),w_{0l}(t),\phi_{0l}(t))\|^2\leq C_3e^{-\alpha_3 t}\|(u^0_{0l},v^0_{0l},w^0_{0l},\phi^0_{0l})\|^2, \tag{1.4.42}$$

$t\geq 0, l\in\mathbb{Z}^*$, pentru nişte $C_3,\alpha_3>0$.

Pentru $k\neq 0$ şi $l=0$, sistemul (1.4.40) devine

$$\begin{cases} (u_{k0})_t-\nu(-k^2u_{k0}+u''_{k0})+\mathrm{i}kU^eu_{k0}+(U^e)'v_{k0}+\mathcal{N}u_{k0}=-\mathrm{i}kp_{k0},\\ (v_{k0})_t-\nu(-k^2v_{k0}+v''_{k0})+\mathrm{i}kU^ev_{k0}=-p'_{k0},\\ (w_{k0})_t-\nu(-k^2w_{k0}+w''_{k0})+\ \mathrm{i}kU^ew_{k0}+ik\mathcal{N}\phi_{k0}+\mathcal{N}w_{k0}=0,\\ -k^2\phi_{k0}+\phi''_{k0}=\mathrm{i}kw_{k0},\\ \mathrm{i}ku_{k0}+v'_{k0}=0,\ t\geq 0, y\in(0,1), \end{cases} \tag{1.4.43}$$

şi

$$u_{k0}(0)=u_{k0}(1)=w_{k0}(0)=w_{k0}(1)=0,$$
$$v_{k0}(0)=0, v_{k0}(1)=\xi_{k0}(t), \phi_{k0}(0)=\phi_{k0}(1)=0.$$

Luăm separat ecuaţiile pentru u_{k0} şi v_{k0}, adică,

$$\begin{cases} (u_{k0})_t-\nu(-k^2u_{k0}+u''_{k0})+\mathrm{i}kU^eu_{k0}+(U^e)'v_{k0}+\mathcal{N}u_{k0}=-\mathrm{i}kp_{k0},\\ (v_{k0})_t-\nu(-k^2v_{k0}+v''_{k0})+\mathrm{i}kU^ev_{k0}=-p'_{k0},\\ \mathrm{i}ku_{k0}+v'_{k0}=0,\\ u_{k0}(0)=u_{k0}(1)=v_{k0}(0)=0, v_{k0}(1)=\xi_{k0}. \end{cases} \tag{1.4.44}$$

Observăm că u_{k0},v_{k0},p_{k0} satisfac aceeaşi problemă de control (1.4.11) ca u_k,v_k, respectiv p_k. Prin urmare, aplicând Teorema 1.4.1, deducem: controlul feedback

$$\xi_{k0}:=-((L_k^{MHD})^{-2}R_k^{MHD}L_k^{MHD}v_{k0}(t))'''(1), 0<|k|\leq S_1 \text{ şi } \xi_{k0}\equiv 0,\ |k|>S_1, \tag{1.4.45}$$

odată introdus în sistemul (1.4.44), impune următoarea descreştere exponenţială a soluţiei sistemului cu buclă închisă (1.4.44)

$$\|u_{k0}(t)\|^2+\|v_{k0}(t)\|^2\leq C_4e^{-\alpha_4 t}(\|(u^0_{k0}\|^2+\|v^0_{k0})\|^2), t\geq 0, k\in\mathbb{Z}^*, \tag{1.4.46}$$

pentru nişte $C_4, \alpha_4 > 0$. În sfârşit, înmulţim scalar a treia ecuaţie din (1.4.43) cu w_{k0}, şi luăm partea reală a rezultatului. Avem

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w_{k0}\|^2 + \nu\|w'_{k0}\|^2 + (\nu k^2 + \mathcal{N})\|w_{k0}\|^2 + \Re\left(\mathrm{i}k\mathcal{N}\int_0^1 \phi_{k0}\overline{w_{k0}}dy\right) = 0. \tag{1.4.47}$$

Înmulţim conjugata celei de-a patra ecuaţii din (1.4.43) cu ϕ_{k0} şi integrăm pe $(0,1)$. Deducem

$$k^2\|\phi_{k0}\|^2 + \|\phi'_{k0}\|^2 = \mathrm{i}k\int_0^1 \phi_{k0}\overline{w_{k0}}dy. \tag{1.4.48}$$

Urmează, din (1.4.47) şi (1.4.48), că

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w_{k0}\|^2 + \nu\|w'_{k0}\|^2 + (\nu k^2 + \mathcal{N})\|w_{k0}\|^2 \leq 0, t \geq 0. \tag{1.4.49}$$

De unde deducem

$$\|w_{k0}(t)\|^2 \leq e^{-\mathcal{N}t}\|w^0_{k0}\|^2,\ t \geq 0, \tag{1.4.50}$$

şi

$$\|\phi_{k0}(t)\|^2 \leq e^{-\mathcal{N}t}\|\phi^0_{k0}\|^2,\ t \geq 0. \tag{1.4.51}$$

Conchidem din (1.4.46), (1.4.50) şi (1.4.51) că avem

$$\|(u_{k0}(t), v_{k0}(t), w_{k0}(t), \phi_{k0}(t))\|^2 \leq C_6 e^{-\alpha_6 t}\|(u^0_{k0}, v^0_{k0}, w^0_{k0}, \phi^0_{k0})\|^2, \tag{1.4.52}$$

$t \geq 0, k \in \mathbb{Z}^*$, pentru nişte $C_6, \alpha_6 > 0$.

Presupunem acum $k, l \neq 0$. Datorită faptului că, reducând presiunea din (1.4.12), se reduce şi potenţialul electric, putem construi controlul feedback stabilizant prin acelaşi procedeu prezentat în cea de-a treia secţiune a acestui capitol. Şi anume, sistemul parabolic infinit în v_{kl} este următorul

$$\begin{cases} (v''_{kl} - (k^2+l^2)v_{kl})_t - \nu v''''_{kl} + [2\nu(k^2+l^2) + \mathrm{i}kU^e + \mathcal{N}]v''_{kl} \\ \qquad\qquad - [\nu(k^2+l^2)^2 + \mathrm{i}k(k^2+l^2)U^e + \mathrm{i}k(U^e)'']v_{kl} = 0, \\ v'_{kl}(0) = v'_{kl}(1) = 0, v_{kl}(0) = 0, v_{kl}(1) = \xi_{kl}(t). \end{cases} \tag{1.4.53}$$

Definim operatorii

$$L^{MHD}_{kl}v := -v'' + (k^2+l^2)v, \mathcal{D}(L^{MHD}_{kl}) = H^1_0(0,1) \cap H^2(0,1), \tag{1.4.54}$$

$$\begin{aligned} F^{MHD}_{kl}v &:= \nu v'''' - [2\nu(k^2+l^2) + \mathrm{i}kU^e + \mathcal{N}]v'' + [\nu(k^2+l^2)^2 \\ &\quad + \mathrm{i}k(k^2+l^2)U^e + \mathrm{i}k(U^e)'']v,\ \forall v \in \mathcal{D}(F^{MHD}_{kl}) = H^4(0,1) \cap H^2_0(0,1). \end{aligned} \tag{1.4.55}$$

Obţinem un rezultat similar cu cel din Remarca 1.3.1 şi Teorema 1.3.1. Mai precis, controlul feedback

$$\xi_{kl} := ((L^{MHD}_{kl})^{-2}R^{MHD}_{kl}L^{MHD}_{kl}v_{kl}(t))'''(1), k, l \neq 0 \text{ şi } \sqrt{k^2+l^2} \leq S_1,$$

şi

$$\xi_{kl} \equiv 0, k, l \neq 0 \text{ şi } \sqrt{k^2+l^2} > S_1,$$

odată introdus în sistemul (1.4.12), soluţia sistemului cu buclă închisă (1.4.12) satisface descreşterea exponenţială

$$\|u_{kl}(t)\|^2 + \|v_{kl}(t)\|^2 + \|w_{kl}(t)\|^2 \le C_7 e^{-\alpha_7 t}(\|u^0_{kl}\|^2 + \|v^0_{kl}\|^2 + \|w^0_{kl}\|^2), \tag{1.4.56}$$

$t \ge 0$, pentru nişte $C_7, \alpha_7 > 0$. Aici $R^{MHD}_{kl} : H \to H$ sunt operatori liniari, auto-adjuncţi ce satisfac ecuaţii Riccati

$$\left\langle (L^{MHD}_{kl})^{-1} R^{MHD}_{kl} z_0, (L^{MHD}_{kl})^{-1} \mathbf{A}^{MHD}_{kl} z_0 \right\rangle + \frac{1}{2}\nu^2 |((L^{MHD}_{kl})^{-2} R^{MHD}_{kl} z_0)'''(1)|^2 = \frac{1}{2}\|(L^{MHD}_{kl})^{-1} z_0\|^2, \tag{1.4.57}$$

$\forall z_0 \in H$, defniţi în mod similar ca în Teorema 1.1.2. $\mathbf{A}^{MHD}_{kl} = F^{MHD}_{kl}(L^{MHD}_{kl})^{-1}$.

În final, însumând rezultatele de mai sus, mai exact relaţiile (1.4.39),(1.4.42),(1.4.52) şi (1.4.56), deducem următorul rezultat de stabilizare feedback normală pentru curgerea unui fluid conductibil electric, trei-dimensional, aflat sub acţiunea unui câmp magnetic exterior, transversal.

Teorema 1.4.2 *Există un control feedback, finit-dimensional Ξ, de forma*

$$\Xi = \sum_{k,l \in \mathbb{Z}} \xi_{kl} e^{\mathrm{i}kx} e^{\mathrm{i}lz}, \tag{1.4.58}$$

unde

$$\xi_{kl} := \begin{cases} 0 & \text{pentru } k = 0, l \in \mathbb{Z}, \\ -\nu((L^{MHD})^{-2}_k R^{MHD}_k L^{MHD}_k v_{k0}(t))'''(1) & \text{pentru } 0 < |k| \le S_1 \text{ şi } l = 0, \\ 0 & \text{pentru } |k| > S_1 \text{ şi } l = 0, \\ -\nu((L^{MHD}_{kl})^{-2} R^{MHD}_{kl} L^{MHD}_{kl} v_{kl}(t))'''(1) & \text{pentru } k, l \ne 0 \text{ şi } \sqrt{k^2+l^2} \le S_1, \\ 0 & \text{pentru } k, l \ne 0 \text{ şi } \sqrt{k^2+l^2} > S_1, \end{cases} \tag{1.4.59}$$

astfel încât, odată introdus în sistemul (1.4.10)*, soluţia corespunzătoare a sistemului cu buclă închisă* (1.4.10) *satisface descreşterea exponenţială*

$$\|(U(t), V(t), W(t), \phi(t))\|^2 \le C_\beta e^{-\beta t}\|(U^0, V^0, W^0, \phi^0)\|^2, \ t \ge 0,$$

pentru nişte $C_\beta, \beta > 0$. Aici

$$v_{kl}(t, y) = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} v(t, x, y, z) e^{-\mathrm{i}kx} e^{-\mathrm{i}kz} dx dz.$$

Operatorii L^{MHD}_k sunt definiţi în relaţia (1.4.15) *iar operatorii L^{MHD}_{kl} sunt definiţi în relaţia* (1.4.54)*. Operatorii R^{MHD}_k şi R^{MHD}_{kl} sunt liniari, auto-adjunţi şi satisfac ecuaţiile Riccati* (1.4.37)*, respectiv* (1.4.57)*.*

1.4.2 Construcţia unui Observator pentru ecuaţiile SMHD liniarizate (1.4.9)

În această secţiune, vom construi un Observator pentru ecuaţiile SMHD liniarizate, în două dimensiuni. Observatorul utilizează semnalele input şi output ale sistemului pentru a genera o estimare a stării sistemului, care este apoi utilizată pentru a închide bucla controlului. Observatorii sunt utilizaţi pentru a creşte sau înlocui senzorii din sistemul controlat. De fapt, Observatorul este sistemul folosit în simulările numerice şi în aplicaţiile practice. Prin urmare, construcţia sa este de o importanţă majoră.

Să observăm mai întâi că, dacă în sistemul (1.4.9) aplicăm controlul frontieră Ψ, de forma

$$\Psi(t,x)=\nu\sum_{0<|k|\le S_1}((L_k^{MHD})^{-2}\mathcal{R}_k^{MHD}L_k^{MHD}v_k(t))'''(0)e^{\mathrm{i}kx}, \tag{1.4.60}$$

asupra componentei normale v, pe peretele $y=0$, şi argumentăm ca mai sus, obţinem că acesta stabilizează sistemul (1.4.9). Aici $\mathcal{R}_k^{MHD}$ sunt operatori liniari, auto-adjuncţi ce satisfac ecuaţii Riccati, omologi operatoriilor R_k^{MHD}.

Din demonstraţia Lemei 1.1.3, aplicată în acest caz, obţinem că soluţia $\mathcal{Z}$ a următorului sistem

$$\frac{d}{dt}\mathcal{Z}_k+\Lambda_k\mathcal{Z}_k=B_k\psi_k,\ t\ge 0, \tag{1.4.61}$$

satisface $\mathcal{Z}(t)\to 0$ pentru $t\to 0$. Aici

$$\Lambda_k:=\begin{pmatrix}\left\langle P_{N_k}\mathbf{A}_k^{MHD}\phi_1^k,\phi_1^{k*}\right\rangle & \left\langle P_{N_k}\mathbf{A}_k^{MHD}\phi_2^k,\phi_1^{k*}\right\rangle & ... & \left\langle P_{N_k}\mathbf{A}_k^{MHD}\phi_{M_k}^k,\phi_1^{k*}\right\rangle\\ \left\langle P_{N_k}\mathbf{A}_k^{MHD}\phi_1^k,\phi_2^{k*}\right\rangle & \left\langle P_{N_k}\mathbf{A}_k^{MHD}\phi_2^k,\phi_2^{k*}\right\rangle & ... & \left\langle P_{N_k}\mathbf{A}_k^{MHD}\phi_{M_k}^k,\phi_2^{k*}\right\rangle\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \left\langle P_{N_k}\mathbf{A}_k^{MHD}\phi_1^k,\phi_{M_k}^{k*}\right\rangle & ... & ... & \left\langle P_{N_k}\mathbf{A}_k^{MHD}\phi_{M_k}^k,\phi_{M_k}^{k*}\right\rangle\end{pmatrix}, \tag{1.4.62}$$

şi

$$B_k:=\begin{pmatrix}-\nu(\phi_1^{k*})'''(0)\\ -\nu(\phi_2^{k*})'''(0)\\ ...\\ -\nu(\phi_{M_k}^{k*})'''(0)\end{pmatrix}\ \text{şi}\ \mathcal{Z}_k:=\begin{pmatrix}z_1^k\\ z_2^k\\ ...\\ z_{M_k}^k\end{pmatrix}, \tag{1.4.63}$$

unde

$$P_{N_k}L_kv_k(t,y):=\sum_{j=1}^{M_k}z_j^k(t)\phi_j^k(y).$$

P_{N_k} sunt proiectorii, corespunzători operatorilor $-\mathbf{A}_k^{MHD}$, definiţi ca în relaţia (4.1.2) din Apendix, în timp ce $\left\{\phi_j^k\right\}_{j=1}^{\infty}$, $\left\{\phi_j^{k*}\right\}_{j=1}^{\infty}$ sunt autofuncţiile operatorului $-\mathbf{A}_k^{MHD}$ definit în (1.4.17), respectiv dualului $\left(-\mathbf{A}_k^{MHD}\right)^*$.

Considerăm Observatorul asociat ecuaţiilor (1.4.9), dat de

$$\begin{cases}\hat{u}_t-\nu\Delta\hat{u}+\hat{u}_xU^e+\hat{v}(U^e)'+\mathcal{N}\hat{u}=-\hat{p}_x,\\ \hat{v}_t-\nu\Delta\hat{v}+\hat{v}_xU^e=-\hat{p}_y-\displaystyle\sum_{0<|k|\le S_1}G_k(v-\hat{v})(y)e^{ikx},\\ \hat{u}_x+\hat{v}_y=0,\ t\ge 0,x\in\mathbb{R},y\in(0,1),\end{cases} \tag{1.4.64}$$

cu următoarele condiţii la frontieră

$$\begin{aligned}&\hat{u}(t,x,0)=\hat{u}(t,x,1)=\hat{v}(t,x,0)=0\\ &\hat{v}(t,x,1)=\hat{\Psi}(t,x).\end{aligned} \tag{1.4.65}$$

Aici

$$G_k(v-\hat{v})(y) = -\frac{\nu^2((L_k^{MHD})^{-2}\mathcal{R}_k^{MHD}L_k^{MHD}(v_k-\hat{v}_k))'''(0)}{\mathrm{i}k}\sum_{j=1}^{M_k}(\phi_j^{k*})'''(0)\phi_j^k(y),\ 0<|k|\leq S_1,$$

şi

$$\hat{\Psi} = -\nu\sum_{0<|k|\leq S_1}((L_k^{MHD})^{-2}R_k^{MHD}L_k^{MHD}\hat{v}_k(t))'''(1)e^{\mathrm{i}kx}.$$

Făcând diferenţa între ecuaţiile Obervatorului (1.4.64)-(1.4.65) şi ecuaţiile (1.4.9), obţinem ecuaţiile erorii, cu stările $\tilde{u} := u-\hat{u},\ \tilde{v} := v-\hat{v},\ \tilde{p} := p-\hat{p}$, care poate fi scris în coeficienţi Fourier astfel

$$\begin{cases} (\tilde{u}_k)_t - \nu\tilde{u}_k'' + (\nu k^2 + \mathrm{i}kU^e)\tilde{u}_k + (U^e)'\tilde{v}_k + \mathcal{N}\tilde{u}_k = -\mathrm{i}k\tilde{p}_k, y\in(0,1), \\ (\tilde{v}_k)_t - \nu\tilde{v}_k'' + (\nu k^2 + \mathrm{i}kU^e)\tilde{v}_k = -\tilde{p}_k' - G_k, y\in(0,1), \\ \mathrm{i}k\tilde{u}_k + \tilde{v}_k' = 0, y\in(0,1), \\ \tilde{u}_k(0) = \tilde{u}_k(1) = 0, \tilde{v}_k(0) = \tilde{v}_k(1) = 0, \end{cases} \tag{1.4.66}$$

pentru $0<|k|\leq S_1$, şi

$$\begin{cases} (\tilde{u}_k)_t - \nu\tilde{u}_k'' + (\nu k^2 + \mathrm{i}kU^e)\tilde{u}_k + (U^e)'\tilde{v}_k + \mathcal{N}\tilde{u}_k = -\mathrm{i}k\tilde{p}_k, y\in(0,1), \\ (\tilde{v}_k)_t - \nu\tilde{v}_k'' + (\nu k^2 + \mathrm{i}kU^e)\tilde{v}_k = -\tilde{p}_k', y\in(0,1), \\ \mathrm{i}k\tilde{u}_k + \tilde{v}_k' = 0, y\in(0,1), \\ \tilde{u}_k(0) = \tilde{u}_k(1) = 0, \tilde{v}_k(0) = \tilde{v}_k(1) = 0, \end{cases} \tag{1.4.67}$$

pentru $k=0$ şi $|k|>S_1$.

La fel ca în Remarca 1.1.1, relaţia (1.1.24), avem pentru $|k|>S_1$, $\|\tilde{v}_k(t)\|, \|\tilde{u}_k(t)\|\to 0$ când $t\to\infty$. Faptul că $\|\tilde{v}_0(t)\|, \|\tilde{u}_0(t)\|\to 0$ când $t\to\infty$ poate fi arătat uşor ca în (1.1.6)-(1.1.8). Rămâne de arătat că $\|\tilde{v}_k(t)\|, \|\tilde{u}_k(t)\|\to 0$ când $t\to\infty$, pentru $0<|k|\leq S_1$. După ce reducem presiunea din (1.4.66) şi notăm $\tilde{z}_k := L_k\tilde{v}_k$, deducem

$$(\tilde{z}_k)_t + \mathbf{A}_k^{MHD}\tilde{z}_k = \mathrm{i}kG_k,\ t\geq 0. \tag{1.4.68}$$

Descompunem sistemul (1.4.68) în partea instabilă, respectiv în partea stabilă

$$\text{pe } X_{N_k}^u : \frac{d}{dt}\tilde{z}_{N_k} + P_{N_k}\mathbf{A}_k^{MHD}\tilde{z}_{N_k} = \mathrm{i}kG_k, \tilde{z}_{N_k}(0) = P_{N_k}\tilde{z}_{0k}, \tag{1.4.69}$$

$$\text{pe } X_{N_k}^s : \frac{d}{dt}\tilde{\zeta}_{N_k} + (I-P_{N_k})\mathbf{A}_k^{MHD}\tilde{\zeta}_{N_k} = 0, \tilde{\zeta}_{N_k}(0) = (I-P_{N_k})\tilde{z}_{0k}, \tag{1.4.70}$$

respectiv, prin aplicarea proiectorilor P_{N_k} şi $(I-P_{N_k})$ sistemului (1.4.68). Deoarece $(I-P_{N_k})\mathbf{A}_k^{MHD}$ este exponenţial stabil, avem

$$\|\tilde{\zeta}_{N_k}(t)\|\to 0 \text{ când } t\to\infty. \tag{1.4.71}$$

Ca în demonstraţia Lemei 1.1.3, descompunem

$$\tilde{z}_{N_k}(t,y) := \sum_{j=1}^{M_k}\tilde{z}_j^k(t)\phi_j^k(y),$$

îl introducem în sistemul (1.4.69) şi multiplicăm scalar cu ϕ_l^{k*}, obţinem

$$\frac{d}{dt}\tilde{z}_l^k + \sum_{j=1}^{M_k} \left\langle P_{N_k}\mathbf{A}_k^{MHD}\phi_j^k, \phi_l^{k*}\right\rangle \tilde{z}_j^k = \nu((L_k^{MHD})^{-2}\mathcal{R}_k^{MHD}L_k^{MHD}\tilde{v}_k)'''(0)(-\nu(\phi_j^{k*})'''(0)) = 0, \tag{1.4.72}$$

$l = 1, ..., M_k$. Notăm

$$\tilde{\mathcal{Z}}_k := \begin{pmatrix} \tilde{z}_1^k \\ \tilde{z}_2^k \\ ... \\ \tilde{z}_{M_k}^k \end{pmatrix}. \tag{1.4.73}$$

Luând în considerare notaţiile (1.4.62) şi (1.4.63), ecuaţia (1.4.72) se rescrie

$$\frac{d}{dt}\tilde{\mathcal{Z}}_k + \Lambda_k\tilde{\mathcal{Z}}_k = (\nu(L_k^{-2}\mathbb{R}_kL_k\tilde{v}_k)'''(0))B_k,\ t \geq 0. \tag{1.4.74}$$

Urmează imediat din (1.4.61) că $\tilde{\mathcal{Z}}_k(t) \to 0$ pentru $t \to \infty$, aşadar,

$$\|\tilde{z}_{N_k}(t)\| \to 0 \text{ când } t \to \infty. \tag{1.4.75}$$

Relaţiile (1.4.71), (1.4.75) şi faptul că $\tilde{z}_k = \tilde{z}_{N_k} + \tilde{\zeta}_{N_k}$ implică

$$\|\tilde{z}_k(t)\| \to 0 \text{ când } t \to \infty, \tag{1.4.76}$$

ceea ce înseamnă $\|\tilde{v}_k(t)\|, \|\tilde{u}_k(t)\| \to 0$ când $t \to \infty$, pentru $0 < |k| \leq S_1$. Deci, erorile $(\tilde{u},\ \tilde{v})$ sunt exponenţial stabile. Prin urmare, am stabilit următorul rezultat

Teorema 1.4.3 *Considerăm sistemul*

$$\begin{cases} u_t - \nu\Delta u + u_xU^e + v(U^e)' + \mathcal{N}u = -p_x, \\ v_t - \nu\Delta v + v_xU^e = -p_y, \\ u_x + v_y = 0,\ t \geq 0, x \in \mathbb{R}, y \in (0,1), \end{cases} \tag{1.4.77}$$

cu condiţiile la frontieră

$$\begin{aligned} &u(t,x,0) = u(t,x,1) = v(t,x,0) = 0 \\ &v(t,x,1) = \hat{\Psi}(t,x). \end{aligned} \tag{1.4.78}$$

Unde

$$\hat{\Psi} = -\nu \sum_{0<|k|\leq S_1} ((L_k^{MHD})^{-2}R_k^{MHD}L_k^{MHD}\hat{v}_k(t))'''(1)e^{\mathrm{i}kx},$$

$$\hat{v}_k(t,y) = \int_0^{2\pi} \hat{v}(t,x,y)e^{-\mathrm{i}kx}dx, 0 < |k| \leq S_1.$$

$\hat{u}, \hat{v}$ *satisfac ecuaţia Observatorului*

$$\begin{cases} \hat{u}_t - \nu\Delta\hat{u} + \hat{u}_xU^e + \hat{v}(U^e)' + \mathcal{N}\hat{u} = -\hat{p}_x, \\ \hat{v}_t - \nu\Delta\hat{v} + \hat{v}_xU^e = -\hat{p}_y - \displaystyle\sum_{0<|k|\leq S_1} G_k(v-\hat{v})(y)e^{\mathrm{i}kx}, \\ \hat{u}_x + \hat{v}_y = 0,\ t \geq 0, x \in \mathbb{R}, y \in (0,1), \end{cases} \tag{1.4.79}$$

cu condiţiile la frontieră

$$\begin{aligned}&\hat{u}(t,x,0)=\hat{u}(t,x,1)=\hat{v}(t,x,0)=0\\&\hat{v}(t,x,1)=\hat{\Psi}(t,x).\end{aligned} \tag{1.4.80}$$

Unde

$$G_k(v-\hat{v})(y)=-\frac{\nu^2((L_k^{MHD})^{-2}\mathcal{R}_k^{MHD}L_k^{MHD}(v_k-\hat{v}_k))'''(0)}{\mathrm{i}k}\sum_{j=1}^{M_k}(\phi_j^{k*})'''(0)\phi_j^k(y),\ 0<|k|\le S_1.$$

Presupunem că sistemul (1.4.77) *cu condiţiile la frontieră* (1.4.78)*, şi sistemul* (1.4.79) *cu condiţiile la frontieră* (1.4.80) *admit soluţii clasice* u, v*, respectiv* $\hat{u}, \hat{v}$*. Atunci, erorile* $\tilde{u} := u - \hat{u}$ *şi* $\tilde{v} := v - \hat{v}$ *converg exponenţial la zero în norma* H*.*

Capitolul 2

Stabilizarea internă a ecuaţiilor Navier-Stokes şi controlabilitate exactă pe spaţii de codimensiune finită

În acest capitol, vom construi un control feedback neliniar, ce stabilizează intern ecuaţiile Navier-Stokes cu condiţii nule la frontieră. Mai mult, vom arăta că acest control duce data iniţială $\mathbf{v}_o$ în spaţiul $\mathbf{v}_e + X_N^s$, în timp finit T. Prin urmare, putem afirma că obţinem şi un rezultat de tipul controlabilitate exactă. Aici $\mathbf{v}_e$ este o stare de echilibru oarecare pentru ecuaţiile Navier-Stokes, iar X_N^s este spaţiul liniar generat de autofuncţiile corespunzătoare autovalorilor stabile ale operatorului Oseen-Stokes. Rezultatele prezentate în acest capitol sunt originale şi au fost obţinute de către autor în lucrarea [71], împreună cu V. Barbu.

2.1 Prezentarea problemei

Ecuaţiile Navier-Stokes incompresibile, cu condiţii zero la frontieră, sunt

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v} - \nu\Delta\mathbf{v} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = f^e + \nabla p \text{ în } (0,\infty)\times\mathcal{O}, \\ \nabla\cdot\mathbf{v} = 0 \text{ în } (0,\infty)\times\mathcal{O}, \\ \mathbf{v} = 0 \text{ pe } (0,\infty)\times\partial\mathcal{O}, \\ \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_o \text{ în } \mathcal{O}, \end{cases} \tag{2.1.1}$$

unde $\mathcal{O}\subset\mathbb{R}^d$, $d=2,3$, este un domeniu deschis cu frontieră netedă $\partial\mathcal{O}$, $\nu>0$ este coeficientul de vâscozitate, $\mathbf{v}$ şi p sunt necunoscutele câmpul vitezelor, respectiv presiunea fluidului, iar data iniţială $\mathbf{v}_o\in(L^2(\mathcal{O}))^d$ şi densitatea de forţă externă $f^e\in\left(H^2(\mathcal{O})\right)^d$ sunt date.

Deoarece f^e este o funcţie ce nu depinde de timp, putem considera o soluţie staţionară a ecuaţiilor Navier-Stokes (2.1.1). Adică, o soluţie $\mathbf{v}^e=\mathbf{v}^e(x)$ ce verifică ecuaţiile Navier-

Stokes staţionare

$$\begin{cases} -\nu\Delta\mathbf{v}^e + (\mathbf{v}^e\cdot\nabla)\mathbf{v}^e = f^e + \nabla p^e \text{ în } \mathcal{O}, \\ \\ \nabla\cdot\mathbf{v}^e = 0 \text{ în } \mathcal{O};\ \mathbf{v}^e = 0 \text{ pe } \partial\mathcal{O}, \end{cases} \tag{2.1.2}$$

unde p^e reprezintă presiunea de echilibru.

Considerăm un subdomeniu deschis $\mathcal{O}_0 \subset \mathcal{O}$, şi asociem sistemului (2.1.1) următoarea problemă de control intern

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v} - \nu\Delta\mathbf{v} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = f^e + \nabla p + m\Psi \text{ în } (0,\infty)\times\mathcal{O}, \\ \\ \nabla\cdot\mathbf{v} = 0 \text{ în } (0,\infty)\times\mathcal{O}, \\ \\ \mathbf{v} = 0 \text{ pe } (0,\infty)\times\partial\mathcal{O}, \\ \\ \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_o \text{ în } \mathcal{O}, \end{cases} \tag{2.1.3}$$

unde m este funcţia caracteristică a mulţimii $\mathcal{O}_0$, iar Ψ este controlul.

Scopul nostru este să construim, pentru ecuaţia (2.1.3), un control feedback stabilizant, de forma

$$\Psi := -\eta\sum_{j=1}^{N} sign(\langle \mathbf{v}-\mathbf{v}^e, \Xi_j\rangle)\Phi_j,$$

care duce data iniţială $\mathbf{v}_o$ în spaţiul $\mathbf{v}^e + X_N^s$, în timp finit T, unde X_N^s este un spaţiu de codimensiune finită, constând din moduri stabile (vezi definiţia (2.2.3) de mai jos). Pentru ecuaţiile liniare Oseen-Stokes, codimensiunea poate fi aleasă oricât de mare (vezi Teorema 2.3.1 de mai jos).

2.2 Notaţii şi preliminarii

Introducem notaţiile (vezi şi Apendix-ul)

$$H_\pi := \left\{\mathbf{v}\in\left(L^2(\mathcal{O})\right)^d : \nabla\cdot\mathbf{v} = 0 \text{ în } \mathcal{O},\ \mathbf{v}\cdot\mathbf{n} = 0 \text{ pe } \partial\mathcal{O}\right\}, \tag{2.2.1}$$

unde $\mathbf{n}$ este versorul normalei exterioare la frontiera $\partial\mathcal{O}$. Deoarece H_π este un subspaţiu liniar, închis, al lui $(L^2(\mathcal{O}))^d$, este bine-definit proiectorul $P : (L^2(\mathcal{O}))^d \to H_\pi$, numit şi proiectorul Leray. Notăm

$$A := -P\Delta,\ \mathcal{D}(A) = \left(H_0^1(\mathcal{O})\cap H^2(\mathcal{O})\right)^d \cap H_\pi,$$

$$\mathcal{A}\mathbf{v} := \nu A\mathbf{v} + P((\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}^e + (\mathbf{v}^e\cdot\nabla)\mathbf{v}),\ \mathcal{D}(\mathcal{A}) = \mathcal{D}(A),$$

şi

$$B\mathbf{v} := P((\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}),\ \mathbf{v}\in\mathcal{D}(A).$$

Deci, renotând $\mathbf{v} := P(\mathbf{v}-\mathbf{v}^e)$, putem rescrie sistemul (2.1.3) astfel

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\mathbf{v} + \mathcal{A}\mathbf{v} + B\mathbf{v} = P(m\Psi) \text{ în } (0,\infty)\times\mathcal{O}, \\ \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_o := \mathbf{v}_o - \mathbf{v}^e, \end{cases} \tag{2.2.2}$$

deoarece aplicând proiectorul Leray P sistemului controlat Navier-Stokes (2.1.3), reducem presiunea.

Este convenabil să extindem (2.2.2) la spaţiul complex, după cum urmează:

$$H_\pi^{\mathbb{C}} := H_\pi + \mathrm{i} H_\pi$$

şi

$$\mathcal{A}^{\mathbb{C}}(\mathbf{u} + \mathrm{i}\mathbf{v}) := \mathcal{A}\mathbf{u} + \mathrm{i}\mathcal{A}\mathbf{v},\ \ \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{D}(A),$$
$$B^{\mathbb{C}}(\mathbf{u} + \mathrm{i}\mathbf{v}) := B\mathbf{u} + \mathrm{i}B\mathbf{v},\ \ \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{D}(A).$$

În cele ce urmează, pentru simplitate, vom scrie H_π, $\mathcal{A}$, B când ne referim la extinderile $H_\pi^{\mathbb{C}}$, $\mathcal{A}^{\mathbb{C}}$, respectiv $B^{\mathbb{C}}$.

Operatorul $-\mathcal{A}$ generează un C_0-semigrup analitic pe H_π, şi are rezolventă compactă în H_π. Prin urmare, $\mathcal{A}$ are o mulţime numărabilă de autovalori $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$ cu proprietatea că, dat $\gamma \geq 0$, există un număr finit N de autovalori $\{\lambda_j\}_{j=1}^{N}$ astfel încât $\Re\lambda_j \leq \gamma$, pentru $j = 1, ..., N$. Fiecare autovaloare λ_j are o multiplicitate algebrică finită m_j, şi repetăm toţi λ_j în acord cu multiplicitatea fiecăruia. Notăm cu

$$X_N^u := linspan\,\{\phi_j\}_{j=1}^{N}\,;\ X_N^s := linspan\,\{\phi_j\}_{j=N+1}^{\infty}\,, \tag{2.2.3}$$

spaţiul liniar generat de autofuncţiile (posibil generalizate) $\{\phi_j\}_{j=1}^{N}$ ale operatorului $\mathcal{A}$, corespunzătoare autovalorilor $\{\lambda_j\}_{j=1}^{N}$; respectiv, spaţiul liniar generat de autofuncţiile $\{\phi_j\}_{j=N+1}^{\infty}$ ale operatorului $\mathcal{A}$, corespunzătoare autovalorilor $\{\lambda_j\}_{j=N+1}^{\infty}$. Avem

$$H_\pi = X_N^u \oplus X_N^s,$$

ca sumă algebrică. Mai departe, notăm cu P_N proiecţia algebrică şi adjunctul său P_N^*, definite astfel

$$P_N := -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\lambda I - \mathcal{A})^{-1} d\lambda;\ P_N^* := -\frac{1}{2\pi i}\int_{\overline{\Gamma}} (\lambda I - \mathcal{A}^*)^{-1} d\lambda,$$

unde Γ (respectiv, conjugatul său $\overline{\Gamma}$) separă mulţimea $\{\lambda_j\}_{j=1}^{N}$ de mulţimea $\{\lambda_j\}_{j=N+1}^{\infty}$ (respectiv, mulţimea $\left\{\overline{\lambda}_j\right\}_{j=1}^{N}$ de mulţimea $\left\{\overline{\lambda}_j\right\}_{j=N+1}^{\infty}$). În sfârşit, notăm cu

$$\mathcal{A}_N^u := P_N\mathcal{A};\ \mathcal{A}_N^s = (I - P_N)\mathcal{A} \tag{2.2.4}$$

restricţiile operatorului $\mathcal{A}$ la spaţiul X_N^u, respectiv X_N^s. Aceste proiecţii comută cu $\mathcal{A}$, prin urmare spectrul operatorului $\mathcal{A}$ pe X_N^u şi pe X_N^s coincide cu $\{\lambda_j\}_{j=1}^{N}$, respectiv cu $\{\lambda_j\}_{j=N+1}^{\infty}$. Mai mult, semigrupul $e^{-\mathcal{A}_N^s t}$ este exponenţial stabil pe X_N^s. Mai precis, avem

$$\|e^{-\mathcal{A}_N^s t}\|_{L(H_\pi)} \leq Ce^{-\gamma t},\ \forall t \geq 0. \tag{2.2.5}$$

Vom presupune, pentru simplitate, că

(A_1) Toate autovalorile $\lambda_j, j = 1, ..., N,$ ale operatorului $\mathcal{A},$ sunt semi-simple .

Aceasta înseamnă că avem

$$\mathcal{A}\phi_j = \lambda_j \phi_j, \forall j = 1, ..., N. \tag{2.2.6}$$

Dacă notăm cu ϕ_j^* autofuncţiile operatorului dual $\mathcal{A}^*$, al lui $\mathcal{A}$, avem

$$\mathcal{A}^*\phi_j^* = \overline{\lambda}_j \phi_j^*,\ j = 1, ..., N.$$

O consecinţă imediată a ipotezei (A_1) este că sistemul $\left\{\phi_j, \phi_j^*\right\}_{j=1}^N$ poate fi ales biortonormal în H_π, adică

$$\left\langle \phi_i, \phi_j^* \right\rangle = \delta_{ij}, i, j = 1, ..., N. \tag{2.2.7}$$

Am notat cu $\langle \cdot, \cdot \rangle$ produsul scalar pe H_π şi cu $\|\cdot\|$ norma indusă de acesta pe H_π. Proprietatea (A_1), sau mai general că λ_j sunt autovalori simple, este generică în raport cu soluţia de echilibru $\mathbf{v}^e$ (vezi [19]).

2.3 Stabilizarea sistemului liniar Oseen-Stokes

Definim următorul control feedback neliniar, finit-dimensional

$$\Psi(t) := -\eta \sum_{j=1}^{N} sign\left(\left\langle P_N \mathbf{v}(t), \phi_j^* \right\rangle\right) P_N \Phi_j, \tag{2.3.8}$$

unde $\eta \in \mathbb{R}_+$, $sign$ este multifuncţia pe $\mathbb{C}$, definită astfel

$$sign(z) := \begin{cases} \frac{z}{|z|}, & \text{dacă } z \neq 0, \\ \{w \in \mathbb{C} : |w| \leq 1\}, & \text{dacă } z = 0, \end{cases} \tag{2.3.9}$$

şi $\Phi_j \in H_\pi$ sunt definiţi astfel

$$\Phi_j := \sum_{k=1}^{N} \alpha_{jk} \phi_k^*,\ j = 1, ..., N,$$

cu

$$\sum_{k=1}^{N} \alpha_{ik} \left\langle \phi_k^*, \phi_j^* \right\rangle_0 = \delta_{ij},\ i, j = 1, ..., N. \tag{2.3.10}$$

Aici

$$\langle \phi, \psi \rangle_0 := \int_{\mathcal{O}} m \phi \overline{\psi} d\xi, \forall \phi, \psi \in (L^2(\mathcal{O}))^d.$$

Prin urmare, relaţia (2.3.10) implică faptul că sistemul de funcţii $\{\Phi_j, \phi_j^*\}_{j=1}^N$ este biortonormal în raport cu produsul scalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$. Este uşor de văzut că sistemul (2.3.10) are soluţie unică. Într-adevăr, dacă notăm cu Λ matricea $\left(\left\langle \phi_k^*, \phi_j^* \right\rangle_0\right)_{k,j=1}^N$, atunci $(\alpha_{jk})_{j,k=1}^N = \Lambda^{-1}$, iar existenţa inversei Λ^{-1} este asigurată de proprietatea de unică continuare a autofuncţiilor ϕ_j^*, corespunzătoare adjunctului operatorului Oseen-Stokes $\mathcal{A}^*$. Mai precis, ştim din [19] că sistemul $\left\{\phi_j^*\right\}_{j=1}^N$ este liniar independent în $(L^2(\mathcal{O}_0))^d$, ceea ce implică faptul că Λ este nesingulară.

Teorema 2.3.1, de mai jos, spune că pentru η suficient de mare, controlul feedback (2.3.8) stabilizează exponenţial, cu exponent $-\gamma$, liniarizatul sistemului (2.2.2), şi duce $\mathbf{v}_o$ în spaţiul X_N^s, în timp finit $T > 0$ arbitrar.

Teorema 2.3.1 *Fie $\rho > 0$ şi $\mathbf{v}_o \in H_\pi$ astfel încât $\|\mathbf{v}_o\| \le \rho$. Fie $\mathbf{v}$ soluţia sistemului cu buclă închisă*

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathcal{A}\mathbf{v} + \eta \displaystyle\sum_{j=1}^{N} sign\left(\left\langle P_N\mathbf{v}, \phi_j^*\right\rangle\right) P_N m(\Phi_j) = 0, \ t \ge 0, \\ \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_o, \end{cases} \tag{2.3.11}$$

unde $T > 0$ este arbitrar, dar fixat. Atunci, pentru η astfel încât

$$\eta \ge \rho \max\left\{ \frac{\Re\lambda_j}{e^{\Re\lambda_j T} - 1}, \ j = 1, ..., N \right\}, \tag{2.3.12}$$

avem

$$P_N\mathbf{v}(t) = 0, \ \forall t \ge T, \tag{2.3.13}$$

şi

$$\|\mathbf{v}(t)\| \le Ce^{-\gamma t}\|\mathbf{v}_0\|, \ \forall t \ge T, \tag{2.3.14}$$

pentru o constantă $C > 0$. În relaţia (2.3.12), dacă pentru un $j \in \{1, ..., N\}$ avem $\Re\lambda_j = 0$, punem în loc de $\frac{\Re\lambda_j}{e^{\Re\lambda_j T}-1}$, limita sa când $\Re\lambda_j \to 0$, şi anume $\frac{1}{T}$.

Demonstraţie. Aplicăm proiectorul P_N sistemului (2.3.11), pentru a obţine

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{v}_u}{dt} + \mathcal{A}_N^u\mathbf{v}_u + \eta \displaystyle\sum_{j=1}^{N} sign(\left\langle \mathbf{v}_u, \phi_j^*\right\rangle) P_N m(\Phi_j) = 0, \ t \ge 0, \\ \mathbf{v}_u(0) = P_N\mathbf{v}_o, \end{cases} \tag{2.3.15}$$

unde $\mathbf{v}_u := P_N\mathbf{v}$. Dacă descompunem $\mathbf{v}_u$ astfel $\mathbf{v}_u = \sum_{j=1}^N \mathbf{v}_j\phi_j$, îl introducem în (2.3.15), şi înmulţim scalar cu ϕ_j^* ecuaţia (2.3.15), găsim

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{v}_j}{dt} + \lambda_j\mathbf{v}_j + \eta sign\ \mathbf{v}_j = 0, \forall t \ge 0, \\ \mathbf{v}_j(0) = \mathbf{v}_j^o, \end{cases} \tag{2.3.16}$$

pentru toţi $j = 1, ..., N$. Aici am folosit relaţiile (2.2.6), (2.2.7) şi (2.3.10).

Trebuie menţionat că sistemul diferenţial ordinar multivoc (2.3.16) are soluţie unică, absolut continuă $\{\mathbf{v}_j\}_{j=1}^N$, deoarece multifuncţia $z \longmapsto sign\ z$ este maximal monotonă pe $\mathbb{C}$. Mai mult, dacă luăm în considerare relaţia

$$sign\ z \cdot \overline{z} = |z|, \forall z \in \mathbb{C},$$

avem din (2.3.16) că

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\mathbf{v}_j(t)|^2 + \Re\lambda_j|\mathbf{v}_j(t)|^2 + \eta|\mathbf{v}_j(t)| = 0, \ t \ge 0.$$

Aceasta implică

$$\frac{d}{d\tau}|\mathbf{v}_j(\tau)| + \Re\lambda_j|\mathbf{v}_j(\tau)| + \eta = 0,\ \tau \geq 0.$$

Prin urmare, dacă înmulţim ecuaţia de mai sus cu $e^{\Re\lambda_j\tau}$ şi o integrăm pe $(0,t)$, obţinem

$$e^{\Re\lambda_j t}|\mathbf{v}_j(t)| - |\mathbf{v}_j(0)| + \frac{\eta}{\Re\lambda_j}\left(e^{\Re\lambda_j t} - 1\right) = 0,\ \forall t \geq 0. \tag{2.3.17}$$

Este uşor de văzut că, din moment ce η satisface constrângerile (2.3.12), avem

$$\frac{\eta}{\Re\lambda_j}\left(e^{\Re\lambda_j t} - 1\right) - |\mathbf{v}_j(0)| \geq 0,\ \forall t \geq T,$$

care, împreună cu (2.3.17), conduce imediat la relaţia (2.3.13).

Mai departe, aplicăm sistemului (2.3.11) proiecţia $I - P_N$, şi obţinem că

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{v}_s}{dt} + \mathcal{A}_N^s\mathbf{v}_s = 0, t \geq 0, \\ \mathbf{v}_s(0) = (I - P_N)\mathbf{v}_o, \end{cases} \tag{2.3.18}$$

unde $\mathbf{v}_s := (I - P_N)\mathbf{v}$. Dacă luăm în considerare relaţia (2.2.5), avem

$$\|\mathbf{v}_s(t)\| \leq Ce^{-\gamma t}\|(I - P_N)\mathbf{v}_o\| \leq Ce^{-\gamma t}\|\mathbf{v}_o\|,\ \forall t \geq 0.$$

Aceasta, împreună cu (2.3.13), implică (2.3.14), după cum ne-am propus. $\square$

Remarca 2.3.1 După cum am menţionat, rezultatele de mai sus rămân adevărate şi în cazul în care ipoteza (A_1) nu este satisfăcută, adică autovalorile instabile nu sunt neapărat semi-simple. Mai jos vom ilustra două exemple când ipoteza (A_1) nu este satisfăcută, mai precis vom studia două cazuri în care prima autovaloare λ_1 are multiplicitatea algebrică 2 şi cea geometrică 1. Aşadar, să presupunem că matricea $\| \left\langle \mathcal{A}\phi_i, \phi_j^* \right\rangle \|_{i,j=1}^N$ are forma

$$\| \left\langle \mathcal{A}\phi_i, \phi_j^* \right\rangle \|_{i,j=1}^N = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 1 & \lambda_1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & \lambda_N \end{pmatrix} \tag{2.3.19}$$

Prin urmare, în acest caz, (2.3.16) are următoarea formă

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} + \lambda_1\mathbf{v}_1 + \eta sign\mathbf{v}_1 = 0,\ t \geq 0;\ \mathbf{v}_1(0) = \mathbf{v}_1^o, \\ \\ \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} + \mathbf{v}_1 + \lambda_1\mathbf{v}_2 + \eta sign\mathbf{v}_2 = 0,\ t \geq 0;\ \mathbf{v}_2(0) = \mathbf{v}_2^o, \\ \\ \frac{d\mathbf{v}_j}{dt} + \lambda_j\mathbf{v}_j + \eta sign\mathbf{v}_j = 0,\ t \geq 0;\ \mathbf{v}_j(0) = \mathbf{v}_j^o, j = 3, ..., N. \end{cases} \tag{2.3.20}$$

La fel ca şi în demonstraţia Teoremei 2.3.1, obţinem

$$e^{\Re\lambda_j t}|\mathbf{v}_j(t)| - |\mathbf{v}_j(0)| + \frac{\eta}{\Re\lambda_j}(e^{\Re\lambda_j t} - 1) = 0, \tag{2.3.21}$$

pentru $t \geq 0,\ j=1$ şi $j=3,4,...,N$. Urmează, în particular, că

$$e^{\Re\lambda_1 t}|\mathbf{v}_1(t)| \leq |\mathbf{v}_1(0)| \leq \rho. \tag{2.3.22}$$

Înmulţim a doua ecuaţie a sistemului (2.3.20) cu $\overline{\mathbf{v}}_2$ şi luăm partea reală a rezultatului, pentru a obţine

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\mathbf{v}_2|^2 + \Re\lambda_1|\mathbf{v}_2|^2 + \eta|\mathbf{v}_2| = -\Re(\mathbf{v}_1\overline{\mathbf{v}}_2).$$

Aceasta implică

$$e^{\Re\lambda_1 t}|\mathbf{v}_2(t)| - |\mathbf{v}_2(0)| + \eta\frac{e^{\Re\lambda_1 t}-1}{\Re\lambda_1} \leq \int_0^t e^{\Re\lambda_1\tau}|\mathbf{v}_1(\tau)|d\tau. \tag{2.3.23}$$

Folosind relaţiile (2.3.21), (2.3.22) şi (2.3.23), deducem imdeiat că

$$\mathbf{v}_j(t)=0,\ t\geq T,\ j=1,...,N,$$

dacă $\eta \geq \rho(1+T)\max\limits_{1\leq j\leq N}\left\{\dfrac{\Re\lambda_j}{e^{\Re\lambda_j T}-1}\right\}$.

Acum, să tratăm alt caz. Să presupunem că

$$\|\left\langle \mathcal{A}\phi_i,\phi_j^*\right\rangle\|_{i,j=1}^N = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 1 & \lambda_1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & \lambda_N \end{pmatrix}. \tag{2.3.24}$$

Obţinem

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}|\mathbf{v}_1| + \Re\lambda_1|\mathbf{v}_1| + \eta \leq |\mathbf{v}_2|,\ t\geq 0, \\ \\ \frac{d}{dt}|\mathbf{v}_2| + \Re\lambda_1|\mathbf{v}_2| + \eta \leq |\mathbf{v}_1|,\ t\geq 0, \\ \\ \frac{d}{dt}|\mathbf{v}_j| + \Re\lambda_j|\mathbf{v}_j| + \eta = 0,\ t\geq 0,\ j=3,...,N. \end{cases} \tag{2.3.25}$$

Sumăm primele două ecuaţii ale sistemului (2.3.25), pentru a vedea că

$$\frac{d}{dt}(|\mathbf{v}_1|+|\mathbf{v}_2|) + (\Re\lambda_1 - 1)(|\mathbf{v}_1|+|\mathbf{v}_2|) + 2\eta \leq 0. \tag{2.3.26}$$

Este uşor de observat că dacă

$$\eta \geq \rho\max\left\{\frac{1}{2}\frac{\Re\lambda_1-1}{e^{(\Re\lambda_1-1)T}-1};\ \max_{3\leq j\leq N}\left\{\frac{\Re\lambda_j}{e^{\Re\lambda_j T}-1}\right\}\right\},$$

avem, via (2.3.25) şi (2.3.26),

$$\mathbf{v}_j(t)=0,\ t\geq T,\ j=1,...,N,$$

după cum dorim.

Conchidem că, în cazul în care autovalorile instabile nu sunt neapărat semi-simple, se poate alege $\eta > 0$ într-un mod adecvat, suficient de mare, pentru a obţine rezultate asemănătoare cu cele din Teorema 2.3.1.

2.4 Stabilizarea ecuaţiilor Navier-Stokes (2.2.2)

În cele ce urmează, considerăm γ egal cu 0. Deci, X_N^s este generat de autofuncţiile corespunzătoare autovaloriilor λ_j, cu $\Re\lambda_j > 0, j = N+1, N+2, ...$ Notăm cu

$$\beta := \min\left\{\Re\lambda_j, j = N+1, ...\right\}.$$

Urmează că avem următoarea estimare pentru operatorul $\mathcal{A}_N^s$

$$\|e^{-\mathcal{A}_N^s t}\|_{L(H_\pi,H_\pi)} \leq Ce^{-\beta t},\ \forall t \geq 0. \tag{2.4.27}$$

Principalul rezultat al acestui capitol este prezentat în următoarea teoremă ce spune că controlul feedback (2.3.8) stabilizează exponenţial sistemul neliniar (2.2.2) şi, la fel ca în cazul liniar, duce data iniţială $\mathbf{v}_o$ în spaţiul X_N^s, în timp finit $T > 0$, suficient de mic.

Teorema 2.4.1 *Fie $T, \rho > 0$ constante suficient de mici. Pentru toţi $\mathbf{v}_o \in W$, astfel încât $\|\mathbf{v}_o\|_W \leq \rho$, problema*

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathcal{A}\mathbf{v} + \eta\displaystyle\sum_{j=1}^{N} sign(\langle P_N\mathbf{v}, \phi_j^*\rangle)P_N m(\Phi_j) + B\mathbf{v} = 0,\ t \geq 0, \\ \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_o, \end{cases} \tag{2.4.28}$$

este bine-pusă pe W cu soluţie unică

$$\mathbf{v} \in C([0,\infty); W) \cap L^2(0,\infty; Z),$$

dacă η este astfel încât

$$\eta \geq \max\left\{\frac{\Re\lambda_j\left(k\|\phi_j^*\| + \rho\right)}{e^{\Re\lambda_j T} - 1}; j = 1, ..., N\right\}. \tag{2.4.29}$$

Mai mult, aceste soluţii satisfac

$$P_N\mathbf{v}(t) = 0, \forall t \geq T, \tag{2.4.30}$$

şi

$$\|\mathbf{v}(t)\| \leq Ce^{-\beta t}\|\mathbf{v}_0\|, \forall t \geq T, \tag{2.4.31}$$

pentru o constantă $C > 0$.

Aici k este dat de relaţia (2.4.35) *de mai jos, iar*

$$W := (H^{\frac{1}{2}-\epsilon}(\mathcal{O}))^d \cap H_\pi \text{ şi } Z := (H^{\frac{3}{2}-\epsilon}(\mathcal{O}))^d \cap H_\pi$$

dacă $d = 2$,

$$W := (H^{\frac{1}{2}+\epsilon}(\mathcal{O}))^d \cap H_\pi \text{ şi } Z := (H^{\frac{3}{2}+\epsilon}(\mathcal{O}))^d \cap H_\pi$$

dacă $d = 3$. De asemenea, dacă pentru un $j \in \{1, ..., N\}$ avem $\Re\lambda_j = 0$, punem în relaţia (2.4.29), *în loc de $\frac{\Re\lambda_j}{e^{\Re\lambda_j T}-1}$, $\frac{1}{T}$.*

Demonstraţie. Pentru toţi $0 < r \leq 1$, introducem bila de rază r, centrată în origine, a spaţiului $L^2(0,\infty;Z)$:

$$S(0,r) := \left\{ f \in L^2(0,\infty;Z) : \|f\|_{L^2(0,\infty;Z)} := \left(\int_0^\infty \|f(t)\|_Z^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq r \right\}.$$

Pentru toţi $z \in S(0,r)$, considerăm sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathcal{A}\mathbf{v} + \eta \displaystyle\sum_{j=1}^{N} sign(\langle P_N\mathbf{v}, \phi_j^*\rangle) P_N m(\Phi_j) = -Bz, \ t \geq 0, \\ \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_o. \end{cases} \tag{2.4.32}$$

Ideea demonstraţiei este următoarea: arătăm că pentru toţi $z \in S(0,r)$, problema (2.4.32) are soluţie $\mathbf{v}_z \in S(0,r)$, pentru T, ρ şi r suficient de mici. Mai mult, arătăm că

$$P_N\mathbf{v}_z(t) = 0, \forall t \geq T.$$

Apoi, notăm cu Γ operatorul ce asociază lui z soluţia $\mathbf{v}_z$. Arătăm că $\Gamma : S(0,r) \to S(0,r)$ este o contracţie pe $S(0,r)$, pentru T, r, ρ suficient de mici. În final, aplicăm principiul aplicaţiilor contractive pentru a obţine existenţa soluţiilor sistemului (2.4.28), completând astfel demonstraţia.

Vom utiliza câteva rezultate din lucrările [12] şi [16]. Mai precis, folosind aceleaşi idei ca în [16, Lema 3.2], se poate arăta că operatorul stabil $\mathcal{A}_N^s = (I - P_N)\mathcal{A}$ satisface

$$\int_0^\infty \|e^{-\mathcal{A}_N^s t} w\|_Z^2 \leq c\|w\|_W^2, \ \forall w \in W, \tag{2.4.33}$$

pentru o constantă $c > 0$. Mai departe, notăm cu

$$(\mathcal{N}z)(t) := \int_0^t e^{-\mathcal{A}_N^s(t-\tau)} (Bz)(\tau) d\tau. \tag{2.4.34}$$

Din [12, Lema 5.4] avem următoarele estimări pentru termenul neliniar B

$$\|Bz\|_W \leq k\|z\|_Z^2, \ \forall z \in Z, \tag{2.4.35}$$

pentru o constantă $k > 0$. Ca în [12, Ec. (5.41)-(5.43)] avem de asemenea şi următoarele estimări pentru B

$$\|Bz_1 - Bz_2\|_W \leq k\left(\|z_1\|_Z + \|z_2\|_Z\right)\|z_1 - z_2\|_Z, \forall z_1, z_2 \in S(0,r). \tag{2.4.36}$$

Folosind acestea şi estimarea (2.4.33), se poate arăta, ca în *Pasul* (c) al demonstraţiei [12, Proposition 5.6], că avem următoarele estimări pentru operatorul $\mathcal{N}$, definit în (2.4.34),

$$\|\mathcal{N}z_1 - \mathcal{N}z_2\|_{L^2(0,\infty;Z)}^2 \leq 4ck^2r^2\|z_1 - z_2\|_{L^2(0,\infty;Z)}^2, \forall z_1, z_2 \in S(0,r). \tag{2.4.37}$$

În sfârşit, notăm cu

$$(\Lambda z)(t) := e^{-\mathcal{A}_N^s t}(I - P_N)\mathbf{v}_o + (\mathcal{N}z)(t). \tag{2.4.38}$$

Folosind aceleaşi idei ca în [12, Proposition 5.2], găsim că

$$\begin{aligned}\|\Lambda z\|^2_{L^2(0,\infty;z)} &\leq 2c\|(I-P_N)\mathbf{v}_o\|^2_W + 2ck^2\left(\int_0^\infty \|z(t)\|^2_z\right)^2 \\ &\leq 2c(\rho^2+k^2r^4), \forall z\in S(0,r).\end{aligned} \tag{2.4.39}$$

Având aceste rezultate cheie clarificate putem continua cu demonstraţia.

Pentru a arăta că există o soluţie pentru ecuaţia (2.4.32), se poate argumenta ca în demonstraţia Teoremei 2.3.1, apelând la faptul că multifuncţia *sign* este maximal monotonă pe $\mathbb{C}$. Mai departe, arătăm că această soluţie rămâne în bila $S(0,r)$, pentru r suficient de mic, şi satisface relaţiile (2.4.30) şi (2.4.31). Aplicăm proiectorul P_N ecuaţiei (2.4.32), pentru a obţine că

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\mathbf{v}_j(t)|^2 + \Re\lambda_j|\mathbf{v}_j(t)|^2 + \eta|\mathbf{v}_j(t)| = -\Re\left(\left\langle Bz,\phi_j^*\right\rangle \overline{\mathbf{v}}_j\right), t\geq 0, \tag{2.4.40}$$

pentru toţi $j=1,...,N$, unde $P_N\mathbf{v} = \sum_{j=1}^N \mathbf{v}_j\phi_j$. Apoi, folosind inegalitatea lui Schwarz, deducem

$$-\Re\left(\left\langle Bz,\phi_j^*\right\rangle \overline{\mathbf{v}}_j\right) \leq \left|\left\langle Bz,\phi_j^*\right\rangle\right| |\mathbf{v}_j| \leq \|Bz\|\|\phi_j^*\|\,|\mathbf{v}_j|\,.$$

Aceasta, împreună cu (2.4.40), implică

$$\frac{d}{d\tau}|\mathbf{v}_j(\tau)| + \Re\lambda_j|\mathbf{v}_j(\tau)| + \eta \leq \|Bz\|\|\phi_j^*\|, \forall\tau\geq 0, \tag{2.4.41}$$

pentru toţi $j=1,...,N$. Înmulţind (2.4.41) cu $e^{\Re\lambda_j\tau}$ şi integrând pe $(0,t)$, obţinem

$$\begin{aligned}e^{\Re\lambda_j t}|\mathbf{v}_j(t)| - |\mathbf{v}_j(0)| &+ \int_0^t \eta e^{\Re\lambda_j\tau}d\tau \\ &\leq \int_0^t e^{\Re\lambda_j\tau}\|Bz(\tau)\|\|\phi_j^*\|d\tau, t\geq 0,\end{aligned} \tag{2.4.42}$$

pentru toţi $j=1,...,N$. Acum, folosind estimarea (2.4.35), avem că

$$\begin{aligned}\int_0^t e^{\Re\lambda_j\tau}\|Bz(\tau)\|\|\phi_j^*\|d\tau &\leq \int_0^t e^{\Re\lambda_j\tau}\|Bz(\tau)\|_W\|\phi_j^*\|d\tau \\ &\leq k\|\phi_j^*\|\int_0^t e^{\Re\lambda_j\tau}\|z(\tau)\|^2_Z d\tau \\ &\leq k\|\phi_j^*\|\int_0^\infty \|z(\tau)\|^2_Z \\ &\leq kr^2\|\phi_j^*\|,\end{aligned} \tag{2.4.43}$$

deoarece $z\in S(0,r)$. Deci, (2.4.43) şi (2.4.40) implică

$$e^{\Re\lambda_j t}|\mathbf{v}_j(t)| + \eta\frac{e^{\Re\lambda_j t}-1}{\Re\lambda_j} - \left(kr^2\|\phi_j^*\| + |\mathbf{v}_j(0)|\right) \leq 0,\ \forall t\geq 0, \tag{2.4.44}$$

pentru toţi $j = 1, ..., N$. Este uşor de văzut că, dacă η satisface constrângerile (2.4.29), avem că $|\mathbf{v}_j(t)| = 0, \forall t \geq T$, pentru toţi $j = 1, ..., N$. Mai mult, obţinem de asemenea din (2.4.44) că

$$|\mathbf{v}_j(t)| \leq e^{-\Re\lambda_j T}\left(kr^2\|\phi_j^*\| + \rho\right), \; 0 \leq t \leq T. \tag{2.4.45}$$

Alegem $T > 0$ suficient de mic astfel încât

$$hT\sum_{j=1}^{N}\left\{|\lambda_j|^{\alpha}e^{-2\Re\lambda_j T}\left(kr^2\|\phi_j^*\| + \rho\right)^2\right\} \leq \frac{r^2}{4}, \tag{2.4.46}$$

unde $\alpha := \frac{3}{2} - \epsilon$ dacă $d = 2$ şi $\alpha := \frac{3}{2} + \epsilon$ dacă $d = 3$, şi $h > 0$ este dat de următoarea relaţie dintre norme

$$\|\cdot\|_{(H^{\alpha}(\mathcal{O}))^d \cap H_{\pi}} \leq h\|\mathcal{A}^{\frac{\alpha}{2}} \cdot\| \tag{2.4.47}$$

(pentru mai multe detalii a se vedea [81]). Deci, se obţine, via (2.4.45), (2.4.47) şi (2.4.46), că

$$\int_0^{\infty}\|P_N\mathbf{v}(t)\|_Z^2 dt = \int_0^{T}\|P_N\mathbf{v}(t)\|_Z^2 dt \leq h\int_0^{T}\sum_{j=1}^{N}|\lambda_j|^{\alpha}|\mathbf{v}_j(t)|^2 dt \tag{2.4.48}$$

$$\leq hT\sum_{j=1}^{N}\left(|\lambda_j|^{\alpha}e^{-2\Re\lambda_j T}\left(kr^2\|\phi_j^*\| + \rho\right)^2\right) \leq \frac{r^2}{4}. \tag{2.4.49}$$

Acum, aplicând proiectorul $I - P_N$ ecuaţiei (2.4.32), avem

$$\frac{d}{dt}\mathbf{v}_s + \mathcal{A}_N^s\mathbf{v}_s + (I - P_N)Bz = 0, t \geq 0; \; \mathbf{v}_s(0) = (I - P_N)\mathbf{v}_o, \tag{2.4.50}$$

unde $\mathbf{v}_s = (I - P_N)\mathbf{v}$. Folosind formula variaţiei constantelor, urmează că

$$\mathbf{v}_s(t) = e^{-\mathcal{A}_N^s t}(I - P_N)\mathbf{v}_o + \int_0^t e^{-\mathcal{A}_N^s(t-\tau)}(I - P_N)Bz(\tau)d\tau, \; t \geq 0. \tag{2.4.51}$$

Este uşor de observat că, via (2.4.51),(2.4.34) şi (2.4.38), avem egalitatea

$$\mathbf{v}_s(t) = (\Lambda z)(t), \; \forall t \geq 0.$$

Deci, din (2.4.39), obţinem că

$$\|\mathbf{v}_s\|^2_{L^2(0,\infty;Z)} \leq 2c(\rho^2 + k^2r^4). \tag{2.4.52}$$

Luând ρ şi r suficient de mici astfel încât

$$2c(\rho^2 + k^2r^4) \leq \frac{r^2}{4}, \tag{2.4.53}$$

deducem din (2.4.52) că

$$\|(I - P_N)\mathbf{v}\|^2_{L^2(0,\infty;Z)} = \|\mathbf{v}_s\|^2_{L^2(0,\infty;Z)} \leq \frac{r^2}{4}. \tag{2.4.54}$$

În final, concluzionăm că dacă T, ρ şi r sunt suficient de mici astfel încât satisfac relaţiile (2.4.46) şi (2.4.53), avem

$$\begin{aligned}\|\mathbf{v}\|^2_{L^2(0,\infty;Z)} = \int_0^\infty \|\mathbf{v}(t)\|^2_Z dt \le 2\int_0^\infty \left(\|P_N\mathbf{v}(t)\|^2_Z + \|(I-P_N)\mathbf{v}(t)\|^2_Z\right) dt \\ \le 2\left(\frac{r^2}{4}+\frac{r^2}{4}\right) = r^2,\end{aligned} \tag{2.4.55}$$

dacă luăm în considerare relaţiile (2.4.48)-(2.4.49) şi (2.4.54). Aceasta înseamnă că soluţia $\mathbf{v}$ rămâne în bila $S(0,r)$. Prin urmare, dacă notăm cu Γ operatorul care asociază lui z soluţia corespunzătoare $\mathbf{v}_z$ a sistemului (2.4.32), avem că Γ duce bila $S(0,r)$ în ea insăşi. Deci, pentru a termina demonstraţia, mai rămâne de arătat că Γ este o contracţie pe $S(0,r)$, de unde, via principiului aplicaţiilor contractive, obţinem rezultatul dorit. Pentru aceasta avem: fie z_1, z_2 două funcţii din $S(0,r)$, şi $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in S(0,r)$ soluţiile corespunzătoare pentru sistemul (2.4.32). Deci, $\mathbf{v}_1$ şi $\mathbf{v}_2$ satisfac

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{v}_1}{dt} + \mathcal{A}\mathbf{v}_1 + \eta\displaystyle\sum_{j=1}^N sign(\langle P_N\mathbf{v}_1, \phi_j^*\rangle)P_N m(\Phi_j) = -Bz_1,\ t\ge 0, \\ \mathbf{v}_1(0) = \mathbf{v}_o. \end{cases} \tag{2.4.56}$$

şi

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{v}_2}{dt} + \mathcal{A}\mathbf{v}_2 + \eta\displaystyle\sum_{j=1}^N sign(\langle P_N\mathbf{v}_2, \phi_j^*\rangle)P_N m(\Phi_j) = -Bz_2,\ t\ge 0, \\ \mathbf{v}_2(0) = \mathbf{v}_o. \end{cases} \tag{2.4.57}$$

Aplicând, ca şi mai înainte, proiectorul P_N ecuaţiilor (2.4.56) şi (2.4.57), şi descompunând $P_N\mathbf{v}_1 = \sum_{j=1}^N \mathbf{v}_{1j}\phi_j$ şi $P_N\mathbf{v}_2 = \sum_{j=1}^N \mathbf{v}_{2j}\phi_j$, avem

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\mathbf{v}_{1j} + \lambda_j\mathbf{v}_{1j} + \eta sign(\mathbf{v}_{1j}) = -\langle Bz_1, \phi_j^*\rangle,\ t\ge 0, \\ \mathbf{v}_{1j}(0) = \mathbf{v}_j^o, \end{cases} \tag{2.4.58}$$

şi

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\mathbf{v}_{2j} + \lambda_j\mathbf{v}_{2j} + \eta sign(\mathbf{v}_{2j}) = -\langle Bz_2, \phi_j^*\rangle,\ t\ge 0, \\ \mathbf{v}_{2j}(0) = \mathbf{v}_j^o, \end{cases} \tag{2.4.59}$$

pentru toţi $j = 1, ..., N$. Extrăgând (2.4.59) din (2.4.58), obţinem

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(\mathbf{v}_{1j} - \mathbf{v}_{2j}) + \lambda_j(\mathbf{v}_{1j} - \mathbf{v}_{2j}) + \eta\left(sign(\mathbf{v}_{1j}) - sign(\mathbf{v}_{2j})\right) \\ \qquad\qquad = -\langle Bz_1 - Bz_2, \phi_j^*\rangle,\ t\ge 0, \\ (\mathbf{v}_{1j} - \mathbf{v}_{2j})(0) = 0, \end{cases} \tag{2.4.60}$$

pentru toţi $j = 1, ..., N$. Luând în considerare că *sign* este un operator maximal monoton, obţinem din (2.4.60) înmulţit cu $\overline{\mathbf{v}_{1j} - \mathbf{v}_{2j}}$, că

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}|\mathbf{v}_{1j} - \mathbf{v}_{2j}| + \Re\lambda_j|\mathbf{v}_{1j} - \mathbf{v}_{2j}| \le |\langle Bz_1 - Bz_2, \phi_j^*\rangle|,\ t\ge 0, \\ (\mathbf{v}_{1j} - \mathbf{v}_{2j})(0) = 0, \end{cases} \tag{2.4.61}$$

pentru toţi $j = 1, ..., N$. De unde,

$$\begin{aligned}
e^{\Re\lambda_j t}| \left(\mathbf{v}_{1j} - \mathbf{v}_{2j}\right)(t)| &\leq \int_0^t e^{\Re\lambda_j \tau}| \left\langle (Bz_1 - Bz_2)(\tau), \phi_j^* \right\rangle |d\tau \\
&\leq \|\phi_j^*\| \int_0^t \|Bz_1 - Bz_2\|_W \\
&\text{(folosind (2.4.36))} \\
&\leq k\|\phi_j^*\| \int_0^t \{\|z_1\|_Z + \|z_2\|_Z\} \|z_1 - z_2\|_Z dt \\
&\leq 2kr\|\phi_j^*\|\|z_1 - z_2\|_{L^2(0,\infty;Z)},
\end{aligned} \tag{2.4.62}$$

pentru toţi $j = 1, ..., N$. Aşadar,

$$| \left(\mathbf{v}_{1j} - \mathbf{v}_{2j}\right)(t)| \leq e^{-\Re\lambda_j T} 2kr\|\phi_j^*\|\|z_1 - z_2\|_{L^2(0,\infty;Z)}, 0 \leq t < T \tag{2.4.63}$$

şi, din calculele de mai sus,

$$| \left(\mathbf{v}_{1j} - \mathbf{v}_{2j}\right)(t)| = 0, \ \forall t \geq T, \tag{2.4.64}$$

pentru toţi $j = 1, ..., N$. Folosind aceleaşi idei ca în relaţia (2.4.48) obţinem, via relaţiile (2.4.63) şi (2.4.64), că

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \|P_N(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)(t)\|_Z^2 dt \\
&\qquad \leq hT \sum_{j=1}^N \left[|\lambda_j|^\alpha e^{-2\Re\lambda_j T} \left(2kr\|\phi_j^*\|\right)^2\right] \|z_1 - z_2\|_{L^2(0,\infty;Z)}^2.
\end{aligned} \tag{2.4.65}$$

Pentru a obţine estimări pentru $(I - P_N)(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)$, aplicăm proiectorul $(I - P_N)$ ecuaţiilor (2.4.56) şi (2.4.57), folosim formula variaţiei constantelor ca mai sus, şi găsim că

$$(I - P_N)(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)(t) = \int_0^t e^{-\mathcal{A}_N^s(t-\tau)}(I - P_N)(Bz_1 - Bz_2)(\tau)d\tau, \ t \geq 0. \tag{2.4.66}$$

Folosind (2.4.37), obţinem

$$\|(I - P_N)(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)\|_{L^2(0,\infty;Z)}^2 \leq 4ck^2r^2\|z_1 - z_2\|_{L^2(0,\infty;Z)}^2. \tag{2.4.67}$$

Acum, (2.4.65) şi (2.4.67) împreună implică

$$\|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_{L^2(0,\infty;Z)}^2 \leq 2\left\{hT\sum_{j=1}^N \left(|\lambda_j|^\alpha e^{-2\Re\lambda_j T}\left(2kr\|\phi_j^*\|\right)^2\right) + 4ck^2r^2\right\} \|z_1 - z_2\|_{L^2(0,\infty;Z)}^2. \tag{2.4.68}$$

Acum, dacă luăm T şi r suficient de mici astfel încât

$$2\left\{hT\sum_{j=1}^N \left(|\lambda_j|^\alpha e^{-2\Re\lambda_j T}\left(2kr\|\phi_j^*\|\right)^2\right) + 4ck^2r^2\right\} < \mu^2 < 1, \tag{2.4.69}$$

găsim
$$\|\Gamma z_1 - \Gamma z_2\|_{L^2(0,\infty;Z)} \le \mu \|z_1 - z_2\|_{L^2(0,\infty;Z)}, \ \forall z_1, z_2 \in S(0,r),$$
cu $\mu < 1$. Deci, Γ este o contracţie pe $S(0,r)$, după cum doream.

Conchidem că: dacă T, r, ρ sunt suficient de mici astfel încât se supun constrângerilor (2.4.46),(2.4.53) şi (2.4.69) atunci, via principiului aplicatiilor contractive, există o soluţie unică $\mathbf{v} \in S(0,r) \subset L^2(0,\infty;Z)$ pentru (2.4.28), care satisface relaţia (2.4.30). Mai departe, ne propunem să arătăm că această soluţie $\mathbf{v}$ aparţine de asemenea spaţiului $C([0,\infty);W)$. Pentru aceasta, ţinem cont de faptul că $\mathbf{v}_j|_{[0,T]} \in C([0,T],\mathbb{C})$ şi $\mathbf{v}_j(t) = 0, \ t \ge T$ pentru toţi $j = 1,...,N$. Deci,
$$P_N \mathbf{v} \in C([0,\infty);W).$$
Mai mult, deoarece $e^{-\mathcal{A}_N^s t}$ este un semigrup analitic pe W, urmează ca în [17, Ec. (5.51a)], că
$$(I - P_N)\mathbf{v} \in C([0,\infty);W).$$
Aşadar, $\mathbf{v} \in C([0,\infty);W)$. În sfârşit, argumentând ca în [17, Ec. (5.51b)], avem pentru toţi $t \ge T$, luând în considerare că $\mathbf{v} = (I - P_N)\mathbf{v}, \ t \ge T$,
$$\|\mathbf{v}(t)\|_W \le C\|\mathbf{v}_o\|_W + Ck\|\mathbf{v}\|^2_{L^2(0,\infty;Z)} \le b, \tag{2.4.70}$$
unde $b := C\rho + Ckr^2$. Urmează din (2.4.70) că
$$\|\mathbf{v}(t)\|_W \le b, \ t \ge T,$$
prin urmare, $\mathbf{v}(t) \in B(0,b) := \{f \in W : \|f\|_W \le b\}$, pentru toţi $t \ge T$. Similar cu ideile din [17, Ec. (5.52)-(5.55)], deducem
$$\int_T^\infty \|\mathbf{v}(t)\|_Z^2 dt \le K\|\mathbf{v}_o\|_W^2,$$
de unde, folosind strategia clasică pentru sisteme neliniare autonome [4, p.178], obţinem ca în [17, Proposition 5.9], descreşterea exponenţială (2.4.31). □

2.5 Construcţia unui feedback stabilizant real

Considerăm din nou $\gamma \ge 0$ arbitrar dar fixat. Notăm $\{\psi_j\}_{j=1}^N := \{\Re\phi_j, \Im\phi_j\}_{j=1}^{\frac{N}{2}}$ (presupunem, pentru simplitate, că toţi $\lambda_j, \ 1 \le j \le N$, sunt complexi, şi deci, N este par). Notăm
$$\hat{X}_N^u := linspan\, \{\psi_j\}_{j=1}^N,$$
şi $\hat{P}_N : H_\pi \to \hat{X}_N^u$, proiecţia algebrică pe $\hat{X}_N^u$. Aici, şi în cele ce urmează, H_π este spaţiul real definit în (2.2.1). Notăm cu $\hat{X}_N^s := (I - P_N)H_\pi$, şi
$$\hat{\mathcal{A}}_N^u := \mathcal{A}|_{\hat{X}_N^u}, \ \hat{\mathcal{A}}_N^s := \mathcal{A}|_{\hat{X}_N^s}.$$

Avem, bineînţeles, $\hat{\mathcal{A}}_N^u = \Re\mathcal{A}_N^u$ şi $\hat{\mathcal{A}}_N^s = \Re\mathcal{A}_N^s$. Mai mult, putem ortogonaliza $\{\psi_j\}_{j=1}^N$, via procedurii Schmidt, urmează că

$$\langle \psi_j, \psi_i \rangle = \delta_{ij},\ i,j = 1,...,N. \tag{2.5.71}$$

Acum, considerăm controlul feedback real

$$u := -\eta \sum_{j=1}^{N} sign(\langle P_N \mathbf{v}, \psi_j \rangle) P_N \Psi_j, \tag{2.5.72}$$

unde

$$\Psi_j := \sum_{k=1}^{N} \alpha_{jk} \psi_k,\ j = 1,...,N, \tag{2.5.73}$$

şi

$$\sum_{k=1}^{N} \alpha_{jk} \langle \psi_k, \psi_i \rangle_0 = \delta_{ji},\ i,j = 1,...,N. \tag{2.5.74}$$

(Putem alege α_{jk} în acest mod deoarece sistemul $\{\psi_j\}_{j=1}^N$ este liniar independent în $(L^2(\mathcal{O}_0))^d$.) Apoi, substituind u în sistemul liniarizat Oseen-Stokes, avem

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\mathbf{v} + \mathcal{A}\mathbf{v} = -\eta \sum_{j=1}^{N} sign(\langle P_N, \psi_j \rangle) P_N(m(\Psi_j)),\ t \geq 0, \\ \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_o. \end{cases} \tag{2.5.75}$$

Argumentând în mod asemănător ca în demonstraţia Teoremei 2.3.1, şi ţinând cont de faptul că

$$\langle \Psi_j, \psi_i \rangle = \delta_{ij},\ i,j = 1,...,N,$$

şi că, în virtutea relaţiei (2.2.5), avem

$$\|e^{-\hat{\mathcal{A}}_N^s t}\|_{L(H_\pi, H_\pi)} \leq Ce^{-\gamma t},\ \forall t \geq 0,$$

obţinem următorul rezultat.

Teorema 2.5.1 *Fie $T, \rho > 0$ şi $\mathbf{v}_o$ astfel încât $\|\mathbf{v}_o\| \leq \rho$. Pentru $0 < \eta = \eta(T, \rho)$ suficient de mare, avem că soluţia $\mathbf{v}$, a sistemului buclă închisă* (2.5.75)*, satisface*

$$P_N \mathbf{v}(t) = 0, \forall t \geq T, \tag{2.5.76}$$

şi

$$\|\mathbf{v}(t)\| \leq Ce^{-\gamma t} \|\mathbf{v}_o\|, \forall t \geq T. \tag{2.5.77}$$

Demonstraţie. Pentru simplitate, presupunem că $N = 4$. Celelalte cazuri pot fi abordate asemănător. Avem

$$\mathcal{A}^{\mathbb{C}}(\phi_1) = \mathcal{A}^{\mathbb{C}}(\psi_1 + \mathrm{i}\psi_2) = \mathcal{A}\psi_1 + \mathrm{i}\mathcal{A}\psi_2.$$

Pe de altă parte, avem

$$\mathcal{A}^{\mathbb{C}}(\phi_1) = \lambda_1 \phi_1 = \lambda_1(\psi_1 + \mathrm{i}\psi_2).$$

Deci,

$$\mathcal{A}\psi_1 = \Re\lambda_1\psi_1 - \Im\lambda_1\psi_2 \text{ şi } \mathcal{A}\psi_2 = \Re\lambda_1\psi_2 + \Im\lambda_1\psi_1. \tag{2.5.78}$$

În aceeaşi manieră, obţinem de asemenea

$$\mathcal{A}\psi_3 = \Re\lambda_2\psi_3 - \Im\lambda_2\psi_4 \text{ şi } \mathcal{A}\psi_4 = \Re\lambda_2\psi_4 + \Im\lambda_2\psi_3. \tag{2.5.79}$$

Aşadar, în acest caz, sistemul finit dimensional

$$\frac{d}{dt}\mathbf{v}_u + \hat{\mathcal{A}}_N^u\mathbf{v}_u = -\eta\sum_{j=1}^{4} sign(\langle\mathbf{v}_u,\psi_j\rangle)P_N(m(\Psi_j)),$$

are forma

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\mathbf{v}_1 + \Re\lambda_1\mathbf{v}_1 + \Im\lambda_1\mathbf{v}_2 = -\eta sign(\mathbf{v}_1), \\ \frac{d}{dt}\mathbf{v}_2 + \Re\lambda_1\mathbf{v}_2 - \Im\lambda_1\mathbf{v}_1 = -\eta sign(\mathbf{v}_2), \\ \frac{d}{dt}\mathbf{v}_3 + \Re\lambda_2\mathbf{v}_3 + \Im\lambda_2\mathbf{v}_4 = -\eta sign(\mathbf{v}_3), \\ \frac{d}{dt}\mathbf{v}_4 + \Re\lambda_2\mathbf{v}_4 - \Im\lambda_2\mathbf{v}_3 = -\eta sign(\mathbf{v}_4), \ \forall t\geq 0. \end{cases} \tag{2.5.80}$$

Înmulţind prima ecuaţie din (2.5.80) cu $\mathbf{v}_1$, a doua ecuaţie cu $\mathbf{v}_2$, şi sumându-le găsim că

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(|\mathbf{v}_1|^2 + |\mathbf{v}_2|^2) + \Re\lambda_1(|\mathbf{v}_1|^2 + |\mathbf{v}_2|^2) + \eta(|\mathbf{v}_1| + |\mathbf{v}_2|) = 0, \ \forall t\geq 0.$$

Acelaşi rezultat poate fi obţinut şi pentru coeficienţii $\mathbf{v}_3$ şi $\mathbf{v}_4$. Acum, argumentând ca în demonstraţia Teoremei 2.3.1, se poate obţine rezultatul dorit. Detaliile sunt omise. □

În aceeaşi manieră, urmărind ideile din demonstraţia Teoremei 2.4.1, se obţine, pentru sistemul neliniar

$$\frac{d}{dt}\mathbf{v} + \mathcal{A}\mathbf{v} + B\mathbf{v} = -\eta\sum_{j=1}^{N} sign(\langle P_N,\psi_j\rangle)P_N(m(\Psi_j)), \ t\geq 0; \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_o, \tag{2.5.81}$$

următorul rezultat

Teorema 2.5.2 *Fie $T,\rho > 0$ suficient de mici. Pentru toţi $\mathbf{v}_o \in W$, astfel încât $\|\mathbf{v}_o\|_W \leq \rho$, problema (2.5.81) este bine-pusă pe W, cu soluţie unică*

$$\mathbf{v} \in C([0,\infty);W) \cap L^2(0,\infty;Z),$$

dacă $\eta = \eta(T,\rho)$ este suficient de mare. Mai mult, aceste soluţii satisfac

$$P_N\mathbf{v}(t) = 0, \forall t \geq T, \tag{2.5.82}$$

şi

$$\|\mathbf{v}(t)\| \leq Ce^{-\beta t}\|\mathbf{v}_0\|, \forall t\geq T, \tag{2.5.83}$$

pentru nişte $C,\beta > 0$.

Aici $W := (H^{\frac{1}{2}-\epsilon}(\mathcal{O}))^d \cap H_\pi$ şi $Z := (H^{\frac{3}{2}-\epsilon}(\mathcal{O}))^d \cap H_\pi$ dacă $d = 2$, şi $W := (H^{\frac{1}{2}+\epsilon}(\mathcal{O}))^d \cap H_\pi$ şi $Z := (H^{\frac{3}{2}+\epsilon}(\mathcal{O}))^d \cap H_\pi$ dacă $d = 3$.

Capitolul 3

Stabilizare internă a unui număr finit de stări de echilibru pentru ecuaţiile Navier-Stokes

Aşa cum am văzut de-a lungul acestei lucrări, stabilizarea unui sistem controlat presupune mai întâi considerarea unei soluţii particulare a sistemului necontrolat (staţionară sau nestaţionară), după care se construieşte un control feedback care o stabilizează. În general, atât forma controlului cât şi domeniul său de acţiune depind de soluţia particulară aleasă. Cu alte cuvinte, acelaşi control nu poate garanta, în general, stabilitatea a două soluţii particulare diferite. Şi atunci, adresăm următoarea întrebare: putem construi un control care să stabilizeze mai multe soluţii particulare (de exemplu un număr finit, sau chiar numărabil)? În acest capitol, vom răspunde afirmativ la această întrebare. Acest capitol este alcătuit în întregime din rezultatele originale obţinute de către autor în [69].

3.1 Prezentarea problemei

Ecuaţiile Navier-Stokes controlate intern, cu condiţii zero la frontieră, sunt

$$\begin{cases} \mathbf{v}_t(x,t) - \nu\Delta\mathbf{v}(x,t) + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}(x,t) \\ \qquad\qquad = m(x)\Psi(x,t) + f^e(x) + \nabla p(x,t), \ \text{ în } Q = \mathcal{O}\times(0,\infty), \\ \\ \nabla\cdot\mathbf{v} = 0, \ \text{ în } Q, \\ \\ \mathbf{v} = 0, \ \text{ pe } \Sigma = \partial\mathcal{O}\times(0,\infty), \\ \\ \mathbf{v}(x,0) = \mathbf{v}_0(x), \ \text{ în } \mathcal{O}. \end{cases} \tag{3.1.1}$$

Ca de obicei, $\mathcal{O}$ este un domeniu neted, mărginit, din $\mathbb{R}^d, d = 2,3$; m este funcţia caracteristică a unei submulţimi netede şi deschise $\mathcal{O}_0 \subset \mathcal{O}$, de măsură pozitivă; Ψ este controlul. Funcţiile $\mathbf{v}_0, f^e \in (L^2(\mathcal{O}))^d$ sunt date, cea din urmă fiind o densitate de forţă. Deoarece forţele sunt independente de timp, căutăm o soluţie staţionară pentru ecuaţiile Navier-Stokes (3.1.1) necontrolate, adică, o funcţie $\mathbf{v}^e = \mathbf{v}^e(x)$ (şi o funcţie $p^e = p^e(x)$)

care satisface

$$\begin{cases} -\nu\Delta\mathbf{v}^e + (\mathbf{v}^e \cdot \nabla)\mathbf{v}^e = \nabla p^e + f^e, \text{ în } \mathcal{O}, \\ \nabla \cdot \mathbf{v}^e = 0, \text{ în } \mathcal{O}, \\ \mathbf{v}^e = 0, \text{ pe } \partial\mathcal{O}. \end{cases} \tag{3.1.2}$$

Aplicând proiectorul Leray, ecuaţiile (3.1.1) pot fi rescrise în următoarea formă abstractă (vezi Apendix)

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nu A\mathbf{v} + B\mathbf{v} = P(mu + f^e); \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0 \in H_\pi. \tag{3.1.3}$$

Rezultatul principal din [10], referitor la stabilizarea internă a ecuaţiilor (3.1.1) este prezentat mai jos

Teorema 3.1.1 *Există un control feedback finit-dimensional* $\Psi = \Psi(x,t)$ *de forma*

$$\Psi := -\sum_{i=1}^{M} \langle R(\mathbf{v} - \mathbf{v}^e), \psi_i \rangle \, \psi_i, \tag{3.1.4}$$

unde $R : \mathcal{D}(R) \subset H_\pi \to H_\pi$ *este un anumit operator auto-adjunct şi* $\{\psi_i\}_{i=1}^M$ *reprezintă un sistem de funcţii dat, astfel încât, odată introdus în sistemul* (3.1.3)*, stabilizează exponenţial soluţia staţionară* $\mathbf{v}^e$ *a sistemului* (3.1.1) *în vecinătatea*

$$U_\rho := \left\{\mathbf{v}_0 \in \mathcal{D}(A); \|A^{\frac{1}{4}}(\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}^e)\| < \rho\right\} \tag{3.1.5}$$

a lui $\mathbf{v}^e$*, pentru un* $\rho > 0$ *convenabil ales. Mai precis, dacă* $\rho > 0$ *este suficient de mic, atunci pentru orice dată iniţială* $\mathbf{v}_0 \in U_\rho$ *există o soluţie slabă*

$$\mathbf{v} \in L^\infty(0,T;H_\pi) \cap L^2(0,T;V), \frac{d\mathbf{v}}{dt} \in L^{\frac{4}{3}}(0,T;V'),$$

pentru $d = 3$*, şi*

$$\mathbf{v} \in L^\infty(0,T;H_\pi) \cap L^2(0,T;V), \frac{d\mathbf{v}}{dt} \in L^2(0,T;V')$$

pentru $d = 2$, $\forall T > 0$*, a sistemului cu buclă închisă*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\mathbf{v} + \nu A\mathbf{v} + B\mathbf{v} + P(m\sum_{i=1}^M \langle R(\mathbf{v} - \mathbf{v}^e), \psi_i\rangle \, \psi_i) = Pf_e, \ t \geq 0, \\ \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0, \end{cases} \tag{3.1.6}$$

astfel încât are loc următoarea descreştere exponenţială

$$\|A^{\frac{1}{4}}(\mathbf{v}(t) - \mathbf{v}^e)\| \leq Ce^{-\gamma t}\|A^{\frac{1}{4}}(\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}^e)\|, t \geq 0,$$

pentru nişte constante $C, \gamma > 0$.

Demonstraţie. Vezi [10, Theorem 2.2]. □

Ecuaţiile Navier-Stokes au proprietatea că, generic în raport cu densitatea de forţă f^e, numărul soluţiilor staţionare este finit. Mai precis, avem

Teorema 3.1.2 *Pentru $d = 2, 3$, există o mulţime densă şi deschisă $\mathcal{O}_\nu \subset H_\pi$ astfel încât, pentru orice $f^e \in \mathcal{O}_\nu$, mulţimea soluţiilor sistemului* (3.1.2) *este finită şi impară (mulţimea densă O_ν depinde de coeficientul de vâscozitate ν).*

Demonstraţie. Vezi [28, Theorem 10.4]. □

Teorema 3.1.2 ne asigură că, pentru $f^e \in \mathcal{O}_\nu$, există un număr finit de soluţii de echilibru pentru ecuaţia (3.1.1), pe care le notăm cu $\{\mathbf{v}_1^e, \mathbf{v}_2^e, ..., \mathbf{v}_N^e\}$. Teorema 3.1.1 implică faptul că, pentru orice soluţie staţionară $\mathbf{v}_i^e, i = 1, ..., N$, există un control feedback, pe care îl notăm $\Psi_i = \Psi_i(\mathbf{v} - \mathbf{v}_i^e), i = 1, ..., N$, de forma

$$\Psi_i := -\sum_{l=1}^{M_i} \left\langle R_i(\mathbf{v} - \mathbf{v}_i^e), \psi_l^i \right\rangle \psi_l^i, \tag{3.1.7}$$

unde, $R_i : \mathcal{D}(R_i) \subset H_\pi \to H_\pi, i = 1, ..., N$ sunt operatorii auto-adjuncţi şi $\{\psi_l^i\}_{l=1}^{M_i}, i = 1, ..., N$ sunt sistemele de funcţii din Teorema 3.1.1, corespunzători soluţiilor staţionare $\mathbf{v}_i^e, i = 1, ..., N$. Mai mult, soluţia sistemului cu buclă închisă

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nu A\mathbf{v} + B\mathbf{v} = P(m\Psi_i(\mathbf{v} - \mathbf{v}_i^e)) + Pf_e,\ t \geq 0; \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0, \tag{3.1.8}$$

satisface

$$|\mathbf{v}(t) - \mathbf{v}_i^e|_{\frac{1}{2}} \leq C_i e^{-\gamma_i t} |\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_i^e|_{\frac{1}{2}}, t \geq 0, \tag{3.1.9}$$

pentru $\mathbf{v}_0 \in U_{\rho_i}$ (U_{ρ_i} dat de (3.1.5)), pentru nişte constante $\rho_i, C_i, \gamma_i > 0$, pentru toţi $i = 1, ..., N$. Aici, am notat cu $|\mathbf{v}|_{\frac{1}{2}} := \|A^{\frac{1}{4}}\mathbf{v}\|, \forall \mathbf{v} \in \mathcal{D}(A^{\frac{1}{4}})$.

Să considerăm mulţimile

$$\mathcal{U}_i = \left\{\mathbf{v}_0 \in H_\pi; |\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_i^e|_{\frac{1}{2}} < \frac{\rho_i}{C_i}\right\}, i = 1, ..., N. \tag{3.1.10}$$

Putem presupune C_i suficient de mare astfel încât $\frac{\rho_i}{C_i} < \rho_i$, deci

$$\mathcal{U}_i \subset U_{\rho_i}, \forall i = 1, ..., N.$$

Mai departe, pentru $i \neq j, i, j = 1, ..., N$ putem presupune că

$$U_{\rho_i} \cap U_{\rho_j} = \emptyset.$$

Mai mult, pentru $\epsilon > 0$ suficient de mic, putem presupune de asemenea că

$$\left\{\mathbf{v}; |\mathbf{v} - \mathbf{v}_i^e|_{\frac{1}{2}} < (1+\epsilon)\rho_i\right\} \cap \left\{\mathbf{v}; |\mathbf{v} - \mathbf{v}_j^e|_{\frac{1}{2}} < (1+\epsilon)\rho_j\right\} = \emptyset, \tag{3.1.11}$$

$\forall j \neq i, i, j = 1, ..., N$ (altfel putem lua $\rho_i, i = 1, ..., N$, suficient de mici).

Pentru un $\epsilon > 0$ pentru care relaţia (3.1.11) are loc, introducem aplicaţia $w : \mathbb{R}_+ \to [0, 1]$, definită astfel

$$w(r) = \begin{cases} 1 & 0 \leq r \leq 1, \\ 0 & r \geq 1 + \epsilon, \\ \text{netedă} & 1 < r < 1 + \epsilon. \end{cases}$$

Cu ajutorul aplicaţiei w, definim funcţiile $\chi_i : \mathcal{D}(A^{\frac{1}{4}}) \to [0, 1]$, astfel

$$\chi_i(\mathbf{v}) = w\left(\frac{|\mathbf{v}|_{\frac{1}{2}}}{\rho_i}\right), \forall \mathbf{v} \in \mathcal{D}(A^{\frac{1}{4}}), i = 1, ..., N. \tag{3.1.12}$$

Remarca 3.1.1 Fie $\mathbf{v} \in U_{\rho_i}$, pentru un $i = 1, ..., N$, atunci avem

$$\chi_j(\mathbf{v} - \mathbf{v}_j^e) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } j = i \\ 0, \text{ dacă } j \neq i. \end{cases}$$

Într-adevăr, să considerăm $\mathbf{v} \in U_{\rho_i}$, pentru un $i = 1, ..., N$. Deci, $\mathbf{v} \in \left\{z; |z - \mathbf{v}_i^e|_{\frac{1}{2}} < (1+\epsilon)\rho_i\right\}$. Prin urmare, din relaţia (3.1.11)

$$\mathbf{v} \in \left\{z; |z - \mathbf{v}_j^e|_{\frac{1}{2}} \geq (1+\epsilon)\rho_j\right\}, \forall j \neq i, j = 1, ..., N.$$

Urmează imediat din definiţia funcţiilor $\chi_j, j = 1, ..., N$ (vezi (3.1.12)) rezultatul dorit.

3.2 Construcţia controlului feedback ce stabilizează mulţimea finită de soluţii staţionare

Folosind notaţiile introduse în secţiunea anterioară, construim următorul control finit-dimensional

$$\Psi(\mathbf{v}) := \sum_{i=1}^{N} \chi_i(\mathbf{v} - \mathbf{v}_i^e)\Psi_i(\mathbf{v}). \tag{3.2.1}$$

Ne propunem să arătăm că, odată introdus acest Ψ în sistemul (3.1.3), stabilizează exponenţial toate soluţiile staţionare $\mathbf{v}_i^e$, ale sistemului (3.1.1), în mulţimea deshisă $\mathcal{U}_i$ dată de (3.1.10), pentru toţi $i = 1, ..., N$. Mai exact, avem

Teorema 3.2.1 *Fie $f^e \in \mathcal{O}_\nu$. Controlul feedback finit-dimensional Φ, definit de relaţia* (3.2.1)*, stabilizează exponenţial orice soluţie staţionară $\mathbf{v}_i^e, i = 1, ..., N$ în vecinătatea $\mathcal{U}_i, i = 1, ..., N$, definită în* (3.1.10)*. Mai exact, pentru toţi $\mathbf{v}_0 \in \mathcal{U}_i, i = 1, ..., N$ există o soluţie slabă*

$$\mathbf{v} \in L^\infty(0, T; H_\pi) \cap L^2(0, T; V), \frac{d\mathbf{v}}{dt} \in L^{\frac{4}{3}}(0, T; V*),$$

pentru $d = 3$, şi

$$\mathbf{v} \in L^\infty(0, T; H_\pi) \cap L^2(0, T; V), \frac{d\mathbf{v}}{dt} \in L^2(0, T; V*)$$

pentru $d = 2$, $\forall T > 0$, a sistemului cu buclă închisă

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nu A\mathbf{v} + B\mathbf{v} = P(m\sum_{j=1}^{N} \chi_j(\mathbf{v} - \mathbf{v}_j^e)\Psi_j(\mathbf{v})) + Pf^e,\ t \geq 0; \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0, \tag{3.2.2}$$

ce satisface următoarea descreştere exponenţială

$$|\mathbf{v}(t) - \mathbf{v}_i^e|_{\frac{1}{2}} \leq C_i e^{-\gamma_i t}|\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_i^e|_{\frac{1}{2}}, t \geq 0,$$

pentru $C_i, \gamma_i > 0$ daţi de (3.1.9)*. Aici $\mathcal{O}_\nu$ este introdus în Teorema 3.1.2.*

Demonstraţie. Fie $\mathbf{v}_0 \in \mathcal{U}_i$, pentru un $i \in \{1, ..., N\}$. Considerăm următorul sistem întârziat, pentru $\lambda > 0$,

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{v}_\lambda}{dt}(t) + \nu A\mathbf{v}_\lambda(t) + B\mathbf{v}_\lambda(t) \\ = P\left(m\displaystyle\sum_{j=1}^{N} \chi_j\left(\mathbf{v}_\lambda(t-\lambda) - \mathbf{v}_j^e\right)\Psi_j(\mathbf{v}_\lambda(t))\right) + Pf^e, t > 0, \\ \mathbf{v}_\lambda(t) = \mathbf{v}_0, t \in [-\lambda, 0]. \end{cases} \tag{3.2.3}$$

Pentru $t \in [0, \lambda]$, $\mathbf{v}_\lambda(t - \lambda) = \mathbf{v}_0$. Deoarece $\mathbf{v}_0 \in \mathcal{U}_i$, avem că

$$|\mathbf{v}_\lambda(t-\lambda) - \mathbf{v}_i^e|_{\frac{1}{2}} < \frac{\rho_i}{C_i} < \rho_i, \forall t \in [0, \lambda]$$

(vezi (3.1.10)). Deci, $\mathbf{v}_\lambda(t - \lambda) \in U_{\rho_i}, \forall t \in [0, \lambda]$. Urmează atunci, din Remarca 3.1.1,

$$\chi_j(\mathbf{v}_\lambda(t-\lambda) - \mathbf{v}_j^e) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } j = i \\ 0, \text{ dacă } j \neq i, \end{cases}$$

pentru toţi $t \in [0, \lambda]$. Aşadar, pe $[0, \lambda]$, ecuaţia (3.2.3) devine

$$\frac{d\mathbf{v}_\lambda}{dt}(t) + \nu A\mathbf{v}_\lambda(t) + B\mathbf{v}_\lambda(t) = P(m\Psi_i(\mathbf{v}_\lambda(t))) + Pf^e, t \in (0, \lambda]; \mathbf{v}_\lambda(0) = \mathbf{v}_0. \tag{3.2.4}$$

Din Teorema 3.1.1 şi relaţiile (3.1.8), (3.1.9), deducem că, există o soluţie slabă $\mathbf{v}_\lambda(t)$ pe $[0, \lambda]$ a sistemului (3.2.3), ce satisface

$$|\mathbf{v}_\lambda(t) - \mathbf{v}_i^e|_{\frac{1}{2}} \leq C_i e^{-\gamma_i t}|\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_i^e|_{\frac{1}{2}}, t \in [0, \lambda]. \tag{3.2.5}$$

Deoarece $\mathbf{v}_0 \in \mathcal{U}_i$, înseamnă că avem

$$|\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_i^e|_{\frac{1}{2}} < \frac{\rho_i}{C_i}. \tag{3.2.6}$$

Urmează din (3.2.5) şi (3.2.6), că $|\mathbf{v}_\lambda(t) - \mathbf{v}_i^e|_{\frac{1}{2}} < \rho_i, t \in [0, \lambda]$, ceea ce înseamnă că

$$\mathbf{v}_\lambda(t) \in U_{\rho_i}, t \in [0, \lambda].$$

Prin urmare

$$\mathbf{v}_\lambda(t - \lambda) \in U_{\rho_i}, t \in [\lambda, 2\lambda]. \tag{3.2.7}$$

Deci, procedând ca şi mai înainte, deducem din (3.2.7) că

$$\chi_j(\mathbf{v}_\lambda(t-\lambda) - \mathbf{v}_j^e) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } j = i \\ 0, \text{ dacă } j \neq i, \end{cases}$$

pentru toţi $t \in [\lambda, 2\lambda]$. Aceasta, împreună cu pasul anterior (vezi (3.2.4)), implică că, pe $[0, 2\lambda]$, ecuaţia (3.2.3) devine

$$\frac{d\mathbf{v}_\lambda}{dt}(t) + \nu A\mathbf{v}_\lambda(t) + B\mathbf{v}_\lambda(t) = P(m\Psi_i(\mathbf{v}_\lambda(t))) + Pf^e, t \in (0, 2\lambda]; \mathbf{v}_\lambda(0) = \mathbf{v}_0. \tag{3.2.8}$$

Aplicăm Teorema 3.1.1 încă o dată şi obţinem că există o soluţie pentru (3.2.8) pe $[0, 2\lambda]$ ce rămâne în U_{ρ_i}. Continuând cu acest argument, conchidem în final că sistemul (3.2.3), pentru $\mathbf{v}_0 \in \mathcal{U}_i$, are o soluţie $\mathbf{v}_\lambda$. Mai mult, $\mathbf{v}_\lambda$ este de fapt soluţia slabă a sistemului

$$\frac{d\mathbf{v}_\lambda}{dt}(t) + \nu A\mathbf{v}_\lambda(t) + B\mathbf{v}_\lambda(t) = P(m\Psi_i(\mathbf{v}_\lambda(t))) + Pf^e, t > 0; \mathbf{v}_\lambda(0) = \mathbf{v}_0, \tag{3.2.9}$$

pentru care ştim, via Teorema 3.1.1 şi relaţiile (3.1.8), (3.1.9), că satisface

$$|\mathbf{v}_\lambda(t) - \mathbf{v}_i^e|_{\frac{1}{2}} \leq C_i e^{-\gamma_i t}|\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_i^e|_{\frac{1}{2}}, t \in [0, \infty). \tag{3.2.10}$$

În virtutea relaţiei (3.2.10), a faptului că $\mathbf{v}_0 \in \mathcal{U}_i$ şi a definiţiei funcţiilor $\chi_j, j = 1, ..., N$, avem că

$$\chi_j(\mathbf{v}_\lambda(t-\lambda) - \mathbf{v}_j^e) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } j = i \\ 0, \text{ dacă } j \neq i, \end{cases}$$

pentru toţi $t \geq 0$. Ceea ce înseamnă, de fapt, ca funcţiile $\chi_j(\mathbf{v}_\lambda(t-\lambda) - \mathbf{v}_j^e)$ sunt constante (1 dacă $j = i$ şi 0 dacă $j \neq i$) pentru toţi $t \geq 0$. Prin urmare, pentru toţi $\lambda > 0$ există o soluţie slabă $\mathbf{v}_\lambda$ a sistemului întârziat (3.2.3), iar aceste soluţii sunt de fapt toate egale cu soluţia slabă a sistemului

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt}(t) + \nu A\mathbf{v}(t) + B\mathbf{v}(t) = P(m\Psi_i(\mathbf{v}(t))) + Pf^e, t > 0, t \geq 0; \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0; \tag{3.2.11}$$

adică, $\mathbf{v}_\lambda \equiv \mathbf{v}, \forall \lambda > 0$, $\mathbf{v}$ soluţia sistemului cu buclă închisă (3.2.9). Deci putem trece la limită $\lambda \to 0$ în (3.2.3), pentru a obţine că există o soluţie slabă a sistemului

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nu A\mathbf{v} + B\mathbf{v} = P(m\sum_{j=1}^{N} \chi_j(\mathbf{v} - \mathbf{v}_j^e)\Psi_j(\mathbf{v})) + Pf^e, t \geq 0; \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0, \tag{3.2.12}$$

ce satisface desceşterea exponenţială dorită. Demonstraţia este completă. □

3.3 Legătura cu atractorul universal asociat ecuaţiilor Navier-Stokes

În această ultimă secţiune vom studia legătura dintre atractroul universal pentru ecuaţiile Navier-Stokes (despre care ştim că există) şi controlul, introdus mai sus.

Să considerăm din nou ecuaţiile Navier-Stokes controlate

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt}(t) + \nu A\mathbf{v}(t) + B\mathbf{v}(t) = P(\Psi(\mathbf{v})) + f, t > 0; \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0; \tag{3.3.1}$$

unde $f = Pf^e$ şi Ψ este dat de (3.2.1). O primă egalitate de tip energie se poate obţine luând produsul scalar al ecuaţiei (3.3.1) cu $\mathbf{v}$. Folosindu-ne de proprietatea de ortogonalitate

$$b(\mathbf{v}, z, z) = 0, \forall \mathbf{v} \in V, \forall z \in (H^1(\mathcal{O}))^d,$$

(vezi Propoziţia 4.3.1 din Apendix) avem că $\langle B\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle = 0$ şi prin urmare rămâne

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{v}\|^2 + \nu\|\mathbf{v}\|_V^2 = \langle f, \mathbf{v}\rangle + \langle P(\Psi\mathbf{v}), \mathbf{v}\rangle\,. \tag{3.3.2}$$

Ştim că

$$\|\mathbf{v}\| \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\|\mathbf{v}\|_V, \forall \mathbf{v} \in V,$$

unde λ_1 este prima autovaloare a lui A. Deci, putem majora membrul drept al relaţiei (3.3.2) cu

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\|f\|\|\mathbf{v}\|_V + \langle P(\Psi\mathbf{v}), \mathbf{v}\rangle \leq \frac{\nu}{2}\|\mathbf{v}\|_V^2 + \frac{1}{2\nu\lambda_1}\|f\|^2 + C\|\mathbf{v}\|^2,$$

de unde rezultă

$$\frac{d}{dt}\|\mathbf{v}\|^2 + (\nu\lambda_1 - 2C)\|\mathbf{v}\|^2 \leq \frac{1}{\nu\lambda_1}\|f\|^2. \tag{3.3.3}$$

Aici $C := \|P\Psi\|_{(L^2(\mathcal{O}))^d}$. Din definiţia lui Ψ (vezi (3.2.1)), putem alege $\mathcal{O}_0$ cu măsura Lebesgue suficient de mică astfel încât $\nu\lambda_1 - 2C > 0$. Folosind Lema lui Gronwall, obţinem din (3.3.3), că

$$\|\mathbf{v}(t)\|^2 \leq \|\mathbf{v}_0\|^2 e^{-\alpha t} + \frac{1}{\nu^2\lambda_1^2}\|f\|^2(1 - e^{-\alpha t}), \tag{3.3.4}$$

unde $\alpha := \nu\lambda_1 - 2C > 0$. Deci,

$$\limsup_{t\to\infty}\|\mathbf{v}(t)\| \leq \rho_0,\ \ \rho_0 := \frac{1}{\nu\lambda_1}\|f\|. \tag{3.3.5}$$

Pentru a vedea ce consecinţă are estimarea de mai sus, folosim noţiunile specifice sistemelor dinamice introduse în Secţiunea 4.2 din Apendix. Definim următorul semigrup pe H_π care asociază datei iniţiale $\mathbf{v}_0$ soluţia ecuaţiei (3.3.1), adică

$$S(t) : \mathbf{v}_0 \rightarrow \text{ soluţia } \mathbf{v}(t).$$

Avem din (3.3.5) că bilele centrate în zero de rază ρ, $B_{H_\pi}(0, \rho)$, din H_π cu $\rho \geq \rho_0$ sunt pozitiv invariante pentru semigrupul $S(t)$, şi că aceste bile sunt absorbante pentru orice $\rho > \rho_0$. Alegem $\rho_0' > \rho_0$ şi notăm cu B_0 bila $B_{H_\pi}(0, \rho_0')$. Orice mulţime B mărginită în H_π este inclusă într-un $B_{H_\pi}(0, R)$. Este uşor de dedus din (3.3.5) că $S(t)B \subset B_0$ pentru $t \geq t_0(B, \rho_0')$. Deci, B_0 este o mulţime absorbantă pentru semigrupul $S(t)$. Mai departe, definim

$$X = \bigcap_{t>0} S(t)B_0.$$

Atunci, X este compact, invariant sub $S(t)$, conex şi

$$\lim_{t\to\infty} dist(S(t)\mathbf{v}_0, X) = 0, \forall \mathbf{v}_0 \in H_\pi.$$

X se numeşte atractorul universal pentru ecuaţia (3.3.1) (pentru mai multe detalii vezi [28]).

In concluzie, avem că $\{\mathbf{v}_1^e, ..., \mathbf{v}_N^e\} \subset X$. Mai mult, în virtutea Teoremei 3.2.1, dat $\mathbf{v}_0 \in H_\pi$, dacă există $t' \geq 0$ pentru care $S(t')\mathbf{v}_0 \in \mathcal{U}_i$, pentru un $i = 1, ..., N$, atunci $S(t)\mathbf{v}_0 \to \mathbf{v}_i^e$, în H_π, atunci când $t \to \infty$. Deci, avem de asemenea că

$$\mathcal{U}_1, ..., \mathcal{U}_N \subset X.$$

Folosind acestea, am putea încerca să vizualizăm "mai bine" cum arată acest atractor global X, pentru ecuaţiile Navier-Stokes (în general acest atractor este greu de precizat!). Acesta este însă subiectul unor lucrări viitoare.

Capitolul 4

Apendix

4.1 Operatori liniari în spaţii Banach

Fie X un spaţiu Banach real (deci, este definit peste câmpul numerelor reale $\mathbb{R}$), atunci complexificatul $X^{\mathbb{C}}$ este spaţiul $X^{\mathbb{C}} := X + \mathrm{i}X$, adică, $X^{\mathbb{C}} = \{x + \mathrm{i}y : \ x, y \in X\}$ cu norma $\|x + \mathrm{i}y\| := \|x\|_X + \|y\|_X$, unde $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ şi $\| \cdot \|_X$ este norma în spaţiul X.

Fie $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ un operator liniar continuu. Notăm cu $\rho(A)$ *mulţimea rezolventă* a lui A, definită astfel

$$\rho(A) := \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \ (\lambda I - A)^{-1} \in L(X, X)\right\},$$

iar, pentru toţi $\lambda \in \rho(A)$, operatorul $(\lambda I - A)^{-1} \in L(X, X)$ se numeşte *rezolventa* lui A. În sfârşit, notăm cu $\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)$, *spectrul* lui A.

Numărul complex λ se numeşte *valoare proprie* (sau *autovaloare*) pentru operatorul A dacă ecuaţia

$$Ax - \lambda x = 0, \tag{4.1.1}$$

admite soluţie nenulă. În acest caz, soluţiile ecuaţiei (4.1.1) se numesc *vectori proprii* (sau *autovectori*) ai operatorului A, corespunzători lui λ. Dimensiunea spaţiului liniar al vectorilor proprii

$$Ker(\lambda I - A) = \{x \in X : Ax = \lambda x\}$$

se numeşte *multiplicitatea geometrică* a lui λ. Vectorul x se numeşte *vector propriu generalizat* corespunzător valorii proprii λ dacă $(\lambda I - A)^m x = 0$ pentru un $m \in \mathbb{N}$ (mulţimea numerelor naturale). Dimensiunea spaţiului vectorilor proprii generalizaţi se numeşte *multiplicitatea algebrică* a lui λ. În general, multiplicitatea algebrică este mai mare decât cea geometrică, însă, în cazul în care acestea două coincid, autovaloarea λ se numeşte *semisimplă*. Relativ la proprietăţiile spectrului unui operator compact A este binecunoscut următorul rezultat, cunoscut în literatură ca teorema Riesz-Schauder-Fredholm (vezi, de exemplu, [53]).

Teorema 4.1.1 *Fie $A \in L(X, Y)$ un operator compact. Atunci spectrul său $\sigma(A)$ conţine o mulţime cel mult numărabilă de puncte din planul complex, care nu are nici un punct de acumulare cu excepţia lui $\lambda = 0$. Mai mult, orice $\lambda \in \sigma(A)$ este autovaloare a lui A cu multiplicitate algebrică finită.*

În particular, urmează din Teorema 4.1.1.

Teorema 4.1.2 *Fie A un operator liniar închis şi dens definit în X cu rezolventa $(\lambda I - A)^{-1}$ compactă pentru un $\lambda \in \rho(A)$. Atunci spectrul $\sigma(A)$ conţine autovalori izolate $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$, fiecare de multiplicitate (algebrică) finită.*

Dacă A este un astfel de operator, atunci pentru orice $N \in \mathbb{N}$, spectrul $\sigma(A)$ poate fi scris astfel

$$\sigma(A) = \{\lambda_j\}_{j=1}^{N} \cup \{\lambda_j\}_{j=N+1}^{\infty},$$

şi dacă Γ este o curbă închisă în $\mathbb{C}$, ce conţine în interiorul său $\{\lambda_j\}_{j=1}^{N}$, notăm cu

$$P_N := -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} (\lambda I - A)^{-1} d\lambda, \tag{4.1.2}$$

şi $X_N^u := P_N X$, $X_N^s := (I - P_N)X$ (pentru mai multe detalii în legătură cu proiecţiile P_N vezi [53]). Atunci avem că X se descompune ca sumă directă

$$X = X_N^u \oplus X_N^s, \; P_N^2 = P_N,$$

şi dacă notăm

$$A_N^u := P_N A, \; A_N^s := (I - P_N)A, \tag{4.1.3}$$

avem următorul rezultat (vezi [53, Theorem 6.17]).

Teorema 4.1.3 *Sub ipotezele Teoremei 4.1.2 avem*

$$A_N^u X_N^u \subset X_N^u, \; A_N^s X_N^s \subset X_N^s, \tag{4.1.4}$$

şi

$$\sigma(A_N^u) = \{\lambda_j\}_{j=1}^{N}, \; \sigma(A_N^s) = \{\lambda_j\}_{j=N+1}^{\infty}. \tag{4.1.5}$$

Dacă $A \in L(X, Y)$, atunci operatorul $A^* : Y^* \to X^*$, definit astfel

$$(Ax, y^*) = (x, A^* y^*), \; \forall x \in X, \; \forall y^* \in Y^*,$$

se numeşte *dualul* operatorului A. Am notat cu X^*, Y^* dualul spaţiului X, respectiv Y, şi cu (f, y^*) valoarea funcţionalei $y^* \in Y^*$ în $f \in Y$. Este uşor de văzut că $A^* \in L(Y^*, X^*)$.

Să presupunem acum că $X = H$ este un spaţiu Hilbert cu norma $\|\cdot\|_H$ şi produsul scalar $(\cdot,\cdot)_H$ şi că există $\lambda_0 \in \rho(A)$. Atunci, definim spaţiul $(\mathcal{D}(A))^*$ (dualul lui $\mathcal{D}(A)$ în perechea $(\cdot,\cdot)_H$) ca fiind completatul lui H în norma

$$\|x\|_{(\mathcal{D}(A))^*} := \|\lambda_0 x - Ax\|_H, \; \forall x \in H.$$

Atunci, avem

$$\mathcal{D}(A) \subset H \subset (\mathcal{D}(A))^*,$$

algebric şi topologic. Mai mult, operatorul $A : \mathcal{D}(A) \subset H \to H$ are o extindere la întreg spaţiul H, notată $\tilde{A} : H \to (\mathcal{D}(A^*))^*$, definită astfel

$${}_{(\mathcal{D}(A^*))^*}(\tilde{A}x, y)_{\mathcal{D}(A^*)} := (x, A^* y)_H, \; \forall y \in \mathcal{D}(A^*). \tag{4.1.6}$$

Bineînţels avem că $\tilde{A}x = Ax$, $\forall x \in \mathcal{D}(A)$.

4.2 Semigrupuri de operatori şi câteva noţiuni din teoria sistemelor dinamice

Fie X un spaţiu Banach (real sau complex) şi $\{S(t), t \geq 0\}$ o familie de operatori liniari continui în $L(X,X)$, indexată după t. $\{S(t), t \geq 0\}$ se numeşte *semigrup de clasă* C_0 (sau C_0*-semigrup*) dacă

(i) $S(t)S(s) = S(t+s), \ \forall t, s \geq 0,$

(ii) $S(0) = I,$

(iii) $\lim_{t\to 0} S(t)x = x, \ \forall x \in X.$

Se numeşte *generatorul infinitesimal* al C_0-semigrupului $S(t)$ operatorul A_0 definit astfel

$$A_0 x := \lim_{t\to 0} \frac{S(t)x - x}{t}, \ \forall x \in \mathcal{D}(A_0),$$

şi se poate arăta că A_0 este un operator liniar închis şi dens definit în X.

C_0-semigrupul $S(t)$ se numeşte *analitic* dacă admite o extensie $S(\lambda)$ în planul complex, dată de

$$S(\lambda)x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda - t)^j}{j!} \frac{d^j}{dt^j} S(t)x \text{ pentru } |arg(\lambda - \lambda_0)| < C,$$

unde $\lambda_0 \in \mathbb{R}$.

Următorul rezultat este binecunoscuta teoremă *Hille-Yosida* ce oferă condiţii necesare şi suficiente pentru ca un operator liniar să fie generatorul infinitesimal al unui C_0-semigrup analitic (pentru mai multe detalii vezi [72]).

Teorema 4.2.1 *Operatorul liniar A_0, închis şi dens definit, este generatorul unui C_0-semigrup analitic dacă şi numai dacă*

$$\|(\lambda I - A_0)^{-1}\| \leq \frac{C}{|\lambda - \lambda_0|}, \ \forall \lambda \in \mathbb{C}, \ \Re\lambda > \lambda_0.$$

Dacă A_0 este generatorul infinitesimal al C_0-semigrupului $S(t)$, atunci problema Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) = A_0 u(t), \ t \geq 0, \\ \\ u(0) = x, \end{cases} \tag{4.2.1}$$

are soluţie unică $u \in C^1([0,T];X)$ cu $\frac{d}{dt}u \in C([0,T];X)$, pentru orice $x \in \mathcal{D}(A_0)$. Avem $u(t) = S(t)x, \ \forall t \geq 0, \forall x \in \mathcal{D}(A_0)$. Semigrupul generat de A_0 se mai notează şi cu e^{tA_0}.

Generatorul infinitesimal A_0 al C_0-semigrupului $S(t) = e^{A_0 t}$ se spune că are *proprietatea creşterii logaritmice* dacă $\sigma(A_0) \subset \{\lambda; \Re\lambda > \omega\}$ implică faptul că

$$\|S(t)\|_{L(X,X)} \leq M e^{\omega t}, \ \forall t \geq 0.$$

Trebuie precizat că, contrar cu cazul finit-dimensional, această proprietate nu este satisfăcută de toţi generatorii infinitesimali. Avem însă următorul rezultat.

Teorema 4.2.2 *Dacă A_0 este generatorul infinitesimal al unui C_0−semigrup analitic, atunci A_0 are proprietatea creşterii logaritmice.*

Pentru mai multe detalii în legătură cu teoria C_0−semigrupurilor se poate consulta lucrarea [89].

În final, introducem câteva noţiuni din teoria sistemelor dinamice. Fie $\{S(t), t \geq 0\}$ un semigrup pe X. Spunem că o mulţime $M \subset H$ este *pozitiv invariantă* pentru semigrupul $S(t)$ dacă

$$S(t)M \subset M, \forall t > 0.$$

Definiţia 4.2.1 Se numeşte *atractor* o mulţime $M \subset X$ care satisface proprietăţile:

- (i) M este invariantă ($S(t)M = M, \forall t \geq 0$).
- (ii) M are o vecinătate deschisă U pentru care, pentru orice $\mathbf{v}_0 \in U$, $S(t)\mathbf{v}_0$ converge la un element din M pentru $t \to \infty$:

$$dist(S(t)\mathbf{v}_0, M) \to 0 \text{ pentru } t \to \infty.$$

Distanţa care apare în (ii) este de fapt distanţa de la un punct la o mulţime definită astfel

$$d(\mathbf{v}, M) = \inf_{z \in M} d(\mathbf{v}, z),$$

$d(\mathbf{v}, z)$ fiind distanţa de la $\mathbf{v}$ la z în X. Dacă M este un atractor, cea mai mare mulţime U care satisface (ii) se numeşte *bazinul de atracţie* a lui X.

Definiţia 4.2.2 Spunem că $M \subset X$ este *atractor global* pentru semigrupul $\{S(t), t \geq 0\}$ dacă M este un atractor compact ce atrage toate mulţimile mărginite ale lui X (şi deci bazinul de atracţie este întreg X).

Definiţia 4.2.3 Mulţimea $B \subset X$ se numeşte *absorbantă* pentru $U \subset X$, dacă: $\forall B_0 \subset U$, mărginit , $\exists t_1(B_0)$ astfel încât $S(t)B_0 \subset B, \forall t \geq t_1(B_0)$.

Pentru mai multe detalii despre teoria sistemelor dinamice pot fi consultate, de exemplu, lucrările [48, 57].

4.3 Ecuaţiile Navier-Stokes clasice

Ecuaţiile Navier-Stokes cu condiţii nule la frontieră, ce descriu mişcarea unui fluid Newtonian, vâscos şi incompresibil într-un domeniu deschis $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d, d = 2, 3$, au următoarea formă

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\mathbf{v}(x,t) - \nu\Delta\mathbf{v}(x,t) + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}(x,t) = f(x,t) + \nabla p(x,t) \\ \text{pentru } (x,t) \in \mathcal{O} \times (0,T), \\ (\nabla \cdot \mathbf{v})(x,t) = 0, \ \forall (x,t) \in \mathcal{O} \times (0,T), \\ \mathbf{v}(x,t) = 0, \ \forall (x,t) \in \partial\mathcal{O} \times (0,T), \\ \mathbf{v}(x,0) = \mathbf{v}_o(x), \ x \in \mathcal{O}. \end{cases} \tag{4.3.1}$$

Unde $\mathbf{v}$ reprezintă câmpul vitezelor fluidului iar p presiunea. Condiţia de divergenţă zero

$$(\nabla \cdot \mathbf{v})(x,t) = 0,\ \forall (x,t) \in \mathcal{O} \times (0,T),$$

semnifică faptul că fluidul este incompresibil. Am folosit notaţiile standard

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = div\ \mathbf{v} := \sum_{i=1}^{d} D_i \mathbf{v}_i,\ D_i = \frac{\partial}{\partial x_i},\ i = 1, ..., d;$$

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} := \sum_{i=1}^{d} \mathbf{v}_i D_i \mathbf{v}_j,\ j = 1, ..., d.$$

Printr-un procedeu clasic propus de J. Leray, problema cu valori la frontieră (4.3.1) poate fi scrisă ca o problemă Cauchy infinit-dimensională, într-un spaţiu de funcţii ales corespunzător pe $\mathcal{O}$. Pentru aceasta, introducem spaţiile următoare

$$H_\pi := \left\{\mathbf{v} \in (L^2(\mathcal{O}))^d :\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0,\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ pe } \partial\mathcal{O}\right\}, \tag{4.3.2}$$

$$V := \left\{\mathbf{v} \in (H_0^1(\mathcal{O}))^d :\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0\right\}. \tag{4.3.3}$$

Aici $\mathbf{n}$ este normala exterioară la frontiera $\partial\mathcal{O}$. Spaţiul H_π este un subspaţiu închis al lui $(L^2(\mathcal{O}))^d$ şi poate fi văzut ca spaţiu Hilbert cu produsul scalar

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{z} \rangle := \int_{\mathcal{O}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{z} dx,$$

şi cu norma corespunzătoare $\|\mathbf{v}\| := \left(\int_{\mathcal{O}} |\mathbf{v}|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$ (aici $|\cdot|$ este norma în spaţiul $\mathbb{R}^d$). Norma spaţiului V o notăm cu $\|\cdot\|_V$:

$$\|\mathbf{v}\|_V := \left(\int_{\mathcal{O}} |\nabla \mathbf{v}(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.3.4}$$

Notăm cu $P : (L^2(\mathcal{O}))^d \to H_\pi$ proiecţia ortogonală a lui $(L^2(\mathcal{O}))^d$ pe H_π (*proiectorul Leray*) şi definim

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{z}) := \int_{\mathcal{O}} \nabla \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{z} dx,\ \forall \mathbf{v}, \mathbf{z} \in V, \tag{4.3.5}$$

$$A := -P\Delta,\ \mathcal{D}(A) = (H^2(\mathcal{O}))^d \cap V, \tag{4.3.6}$$

echivalent

$$\langle A\mathbf{v}, z \rangle = a(\mathbf{v}, \mathbf{z}),\ \forall \mathbf{v}, \mathbf{z} \in V.$$

Operatorul Stokes A este auto-adjunct în H_π, $A \in L(V, V^*)$, şi

$$\langle A\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{v}\|_V^2,\ \forall \mathbf{v} \in V. \tag{4.3.7}$$

În sfârşit, considerăm funcţionala triliniară

$$b(\mathbf{v}, \mathbf{z}, \mathbf{w}) := \int_{\mathcal{O}} \sum_{i,j=1}^{d} \mathbf{v}_i D_i \mathbf{z}_j \mathbf{w}_j dx,\ \forall \mathbf{v}, \mathbf{z}, \mathbf{w} \in V, \tag{4.3.8}$$

şi notăm cu $B : V \to V^*$ operatorul neliniar definit astfel

$$B\mathbf{v} := P(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}, \tag{4.3.9}$$

sau, echivalent,

$$\langle B\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = b(\mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{w}),\ \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V.$$

Fie $f \in L^2(0, T; V^*)$ şi $\mathbf{v}_o \in H_\pi$. Funcţia $\mathbf{v} : [0, T] \to H_\pi$ se numeşte *soluţie slabă* pentru ecuaţia (4.3.1) dacă

$$\mathbf{v} \in L^2(0, T : V^*) \cap C_{\mathtt{w}}([0, T]; H_\pi) \cap W^{1,1}([0, T]; V^*),$$

şi

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\langle \mathbf{v}(t), \psi\rangle + \nu a(\mathbf{v}(t), \psi) + b(\mathbf{v}(t), \mathbf{v}(t), \psi) &= \langle f(t), \psi\rangle \\ \text{a.p.t. } t \in (0, T),\ \forall \psi &\in V, \\ \mathbf{v}(0) &= \mathbf{v}_o. \end{aligned} \tag{4.3.10}$$

Aplicând proiectorul Leray P, ecuaţia (4.3.1) poate fi scrisă echivalent astfel

$$\frac{d}{dt}\mathbf{v}(t) + \nu A\mathbf{v}(t) + B\mathbf{v}(t) = f(t) \text{ a.p.t. } t \in (0, T);\ \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_o, \tag{4.3.11}$$

unde $\frac{d}{dt}\mathbf{v}$ este derivata tare a funcţiei $\mathbf{v} : [0, T] \to V^*$.

Funcţia $\mathbf{v}$ se numeşte *soluţie tare* pentru (4.3.1) dacă $\mathbf{v} \in W^{1,1}([0, T]; H_\pi) \cap L^2(0, T; \mathcal{D}(A))$ şi (4.3.11) are loc cu $\frac{d}{dt}\mathbf{v} \in L^1(0, T; H_\pi)$. Mai departe vom prezenta pe scurt câteva proprietăţi ale funcţionalei triliniare b ce defineşte operatorul inerţial B (pentru mai multe detalii vezi [81]).

Propoziţia 4.3.1 *Fie $1 \le d \le 3$. Atunci*

$$b(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}) = -b(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{z}),\ \forall \boldsymbol{v}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{w} \in V, \tag{4.3.12}$$

$$|b(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{w})| \le C\|\boldsymbol{v}\|_{m_1}\|\boldsymbol{z}\|_{m_2+1}\|\boldsymbol{w}\|_{m_3},\ \forall \boldsymbol{v} \in V_{m_1}, \boldsymbol{z} \in V_{m_2}, \boldsymbol{w} \in V_{m_3}, \tag{4.3.13}$$

unde $m_i \ge 0, i = 1, 2, 3$ şi

$$\begin{aligned} &m_1 + m_2 + m_3 \ge \tfrac{d}{2} \textit{ dacă } m_i \ne \tfrac{d}{2},\ \forall i \in \{1, 2, 3\}, \\ &m_1 + m_2 + m_3 > \tfrac{d}{2} \textit{ dacă } m_i = \tfrac{d}{2} \textit{ pentru un } i \in \{1, 2, 3\}. \end{aligned} \tag{4.3.14}$$

Aici $V_{m_i} := V \cap (H_0^{m_i}(\mathcal{O}))^d$ şi $\|\cdot\|_m$ este norma în V_m.

Referitor la existenţa soluţiilor pentru ecuaţiile Navier-Stokes (4.3.1) avem următorul rezultat (vezi [16, Theorem 1.17]).

Teorema 4.3.1 *Fie $d = 2, 3$ şi $f \in W^{1,1}([0, T]; H_\pi)$, $\boldsymbol{v}_o \in \mathcal{D}(A)$ unde $0 < T < \infty$. Atunci există o unică funcţie $\boldsymbol{v} \in W^{1,\infty}([0, T^*); H_\pi) \cap L^\infty(0, T^*; \mathcal{D}(A)) \cap C([0, T^*]; V)$ astfel încât*

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{v}(t) + \nu A\boldsymbol{v}(t) + B\boldsymbol{v}(t) = f(t) \ \text{a.p.t. } t \in (0, T^*); \ \boldsymbol{v}(0) = \boldsymbol{v}_o,$$

pentru un $T^* = T^*(\|\boldsymbol{v}_o\|) \leq T$. Dacă $d = 2$ atunci $T^* = T$. Mai mult, $\boldsymbol{v}(t)$ este derivabilă la dreapta şi

$$\frac{d^+}{dt}\boldsymbol{v}(t) + \nu A\boldsymbol{v}(t) + B\boldsymbol{v}(t) = f(t), \ \forall t \in [0, T^*).$$

(Pentru mai multe detalii referitor la existenţa soluţiilor ecuatiilor Navier-Stokes vezi [28],[81]) Să considerăm o soluţie particulară $\hat{\mathbf{v}}$ a ecuaţiilor Navier-Stokes (4.3.1), adică $\hat{\mathbf{v}}$ satisface

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\hat{\mathbf{v}}(x,t) - \nu\Delta\hat{\mathbf{v}}(x,t) + (\hat{\mathbf{v}} \cdot \nabla)\hat{\mathbf{v}}(x,t) = f(x,t) + \nabla\hat{p}(x,t) \\ (x,t) \in \mathcal{O} \times \mathbb{R}^+, \\ (\nabla \cdot \hat{\mathbf{v}})(x,t) = 0, \ \forall (x,t) \in \mathcal{O} \times \mathbb{R}^+, \\ \hat{\mathbf{v}} = 0 \text{ pe } \partial\mathcal{O} \times \mathbb{R}^+, \\ \hat{\mathbf{v}}(x,0) = \hat{\mathbf{v}}_o(x), \ x \in \mathcal{O}. \end{cases} \tag{4.3.15}$$

Stabilizarea internă a soluţiei $\hat{\mathbf{v}}$ constă în a determina un control feedback $F(\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}})$ cu suportul într-o submulţime $\mathcal{O}_0 \subset \mathcal{O}$, de măsură Lebesgue pozitivă, astfel încât, următorul sistem cu buclă închisă

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\mathbf{v}(x,t) - \nu\Delta\mathbf{v}(x,t) + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}(x,t) \\ \qquad = f(x,t) + \nabla p(x,t) + F(\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}}), \ x \in \mathcal{O}, \ t \in \mathbb{R}^+, \\ (\nabla \cdot \mathbf{v})(x,t) = 0, \ \forall (x,t) \in \mathcal{O} \times \mathbb{R}^+, \\ \mathbf{v} = 0 \text{ pe } \partial\mathcal{O} \times \mathbb{R}^+, \\ \mathbf{v}(x,0) = \mathbf{v}_o(x), \ x \in \mathcal{O}, \end{cases} \tag{4.3.16}$$

să aibe o soluţie globală ce satisface o descreştere eponenţială, de tipul

$$\|(\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}})(t)\| \leq Ce^{-\delta t}\|\mathbf{v}_o - \hat{\mathbf{v}}_o\|, \ t \geq 0,$$

pentru nişte constante pozitive C, δ. Cerem ca controlul să fie în formă feedback, ceea ce înseamnă de fapt că în orice moment t, controlul este definit de câmpul vitezelor fluidului, considerat în acelaşi moment t. Prin urmare, controlul poate reacţiona la fluctuaţii imprevizibile ale câmpului vitezelor $\mathbf{v}$, suprimând influenţa lor negativă asupra fluxului fluidului.

Stabilizarea la frontieră a soluţiei $\hat{\mathbf{v}}$ constă în a determina un control feedback $F(\mathbf{v}-\hat{\mathbf{v}})$ ce acţionează pe frontiera $\partial\mathcal{O} \times \mathbb{R}^+$, astfel încât, următorul sistem cu buclă închisă

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\mathbf{v}(x,t) - \nu\Delta\mathbf{v}(x,t) + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}(x,t) \\ \qquad\qquad = f(x,t) + \nabla p(x,t),\ x \in \mathcal{O},\ t \in \mathbb{R}^+), \\ (\nabla \cdot \mathbf{v})(x,t) = 0,\ \forall (x,t) \in \mathcal{O} \times \mathbb{R}^+, \\ \mathbf{v} = F(\mathbf{v}-\hat{\mathbf{v}}) \text{ pe } \partial\mathcal{O} \times \mathbb{R}^+, \\ \mathbf{v}(x,0) = \mathbf{v}_o(x),\ x \in \mathcal{O}, \end{cases} \tag{4.3.17}$$

să aibe o soluţie globală ce satisface aceeaşi descreştere eponenţială de mai sus, adică

$$\|(\mathbf{v}-\hat{\mathbf{v}})(t)\| \leq Ce^{-\delta t}\|\mathbf{v}_o - \hat{\mathbf{v}}_o\|,\ t \geq 0,$$

pentru nişte constante pozitive C, δ. Deşi, la o primă privire stabilizarea la frontieră pare mai simplă decât cea internă, în realitate aceasta se dovedeşte a fi mai delicat de realizat.

Bibliografie

[1] Adams, D., *Sobolev spaces,* Academic Press (1975).

[2] Baker, J., Armaou, A. şi Christofides, P., *Nonlinear control of incompressible fluid flow: application to Burgers equation and 2D channel flow,* J. Math. Anal. Appl. **252** (2000), 230-255.

[3] Balogh, A., Liu, W.-J. şi Krstic, M., *Stability enhancement by boundary control in 2-D channel flow,* IEEE Transactions on Automatic Control **46** (2001), 1696-1711.

[4] Balakrishanan, A.V., *Applied functional analysis,* Springer, Berlin (1981).

[5] Barbu, V., *The time optimal control of Navier-Stokes equations,* Systems Control Lett. **30** (1997), 93-100.

[6] Barbu, V., *Partial differential equations and boundary value problems,* Kluwer Academic Publishers (1998).

[7] Barbu, V. şi Sritharan, S.S., *H^∞-control theory of fluid dynamics,* R. Soc. Lond. Proc. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. **454** (1998), no. 1979, 3009-3033.

[8] Barbu, V., *Feedback stabilization of Navier-Stokes equations,* ESAIM COCV **9** (2003), 197-206.

[9] Barbu, V. şi Lefter, C.G., *Internal stabilizability of the Navier-Stokes equations,* Systems and Control Lett. **48** (2003), 161-167.

[10] Barbu, V. şi Triggiani, R., *Internal stabilization of Navier-Stokes equations with finite-dimensional controllers,* Indiana Univ. Math. Journal **53** (2004), 1443-1494.

[11] Barbu, V. şi Lefter, C., *Optimal control of ordinary differential equations,* Handbook of differential equations, Elsevier, Amsterdam (2005).

[12] Barbu, V., Lasiecka, I. şi Triggiani, R., *Abstract settings for tangential boundary stabilization of Navier-Stokes equations by high-and low-gain feedback controllers,* Nonlin. Anal. **64** (2006), 2704-2746.

[13] Barbu, V., Lasiecka, I. şi Triggiani, R., *Tangential boundary stabilization of Navier-Stokes equations,* Memories AMS **851** (2006), pp+128.

[14] Barbu, V., *Stabilization of a plane channel flow by wall normal controllers,* Nonlin. Anal. Theory-Methods Appl. **56** (2007), 145-168.

[15] Barbu, V., *Nonlinear Differential Equations of Monotone Type in Banach Spaces,* Springer, New York (2010).

[16] Barbu, V., *Stabilization of Navier-Stokes Flows,* Springer, New York (2010).

[17] Barbu, V., *Stabilization of a plane periodic channel flow by noise wall normal controllers,* Systems Control Lett. **59** (2010), 608-614.

[18] Barbu, V., Rodrigues, S.S. şi Shirikyan, A., *Internal exponential stabilization to a nonstationary solution for the 3D Navier-Stokes equations,* SIAM J. Control Optim. **49** (2011), no.4, 1454-1478.

[19] Barbu, V. şi Lasiecka, I., *The unique continuation property of eigenfunctions to Stokes-Oseen operator is generic with respect to the coefficients,* Nonlin. Anal. Theory-Methods Appl. http://dx.doi.org/10.1016/j.na.2011.07.056 (2011).

[20] Barbu, V., *Stabilization of Navier-Stokes equations by oblique boundary feedback controllers* http://arxiv.org/abs/arXiv:1106.3931 (2011).

[21] Barbu, V. şi Munteanu, I., *Internal stabilization of Navier-Stokes equation with exact controllability on spaces with finite codimension,* Evol. Eqs. Control Theory **1** (2012), 1-16.

[22] Bedra, M., *Feedback stabilization of the 2D and 3D Navier-Stokes equations based on an extended system,* ESAIM COCV **15** (2009), 934-968.

[23] Bewely, T.R. şi Liu, S., *Optimal and robust control and estimation of linear paths to transition,* J. Fluid Mech. **365** (1998), 305-349.

[24] Bewely, T.R., *New frontiers for control in fluid mechanics: a renaissance approach,* în ASME FEDSM 99-6926 (1999).

[25] Bewely, T.R., Temam, R. şi Ziane, M., *A general framework for robust control in fluid mechanics,* Physica D **138** (2000), 360-392.

[26] Bewely, T.R., Moin, P. şi Temam, R., *DNS-based predictive control of turbulence: an optimal benchmark for feedback algorithms,* J. Fluid Mech. **447** (2001), 179-225.

[27] Cochran, J., Vazquez, R. şi Krstic, M., *Backstepping boundary control of Navier-Stokes channel flow: a 3D extension,* 25th Amer. Control Conf. (2006).

[28] Constantin, P. şi Foias, C., *Navier-Stokes Equations* , Univ. Chicago Press (1989).

[29] Coron, J.-M., *On the controllability of 2-D incompressible perfect fluids,* J. Math. Pures Appl. **75** (1996), 155-188.

[30] Coron, J.-M., *On the controllability of the 2-D incompressible Navier-Stokes equations with the Navier slip boundary conditions,* ESAIM: Control, Optim. Cal. Var. **1** (1996), 35-75.

[31] Coron, J.-M. şi Fursikov, A.V., *Global exact controllability of the 2-D Navier-Stokes equations on a manifold without boundary,* Russian J. Math. Phys. **4** (1996), 429-448.

[32] Coron, J.-M., *On null asymptotic stabilization of the 2-D Euler equation of incompressible fluids on simply connected domains,* SIAM J. Control Optim. **37** (1999), 1874-1896.

[33] Coron, J.-M., *Control and Nonlinearity,* AMS, Providence, RI (2007).

[34] Cortelezzi, L., Speyer, J.L., Lee, K.H. şi Kim, K., *Robust reduced-order control of turbulent channel flows via distributed sensors and actuators,* Proc. 37th IEE Conf. Decision Control, Tampa, Fl. (1998), 1906-1911.

[35] Desai, M. şi Ito, K., *Optimal controls of Navier-Stokes equations,* SIAM J. Control Optim. **32** (1994), 1428-1446.

[36] Fattorini, H.O. şi Sritharan, S.S., *Existence of optimal controls for viscous flow problems,* Proceedings of the Royal Society of London Ser. A **439** (1992), 81-102.

[37] Fattorini, H.O. şi Sritharan, S.S., *Necessary and sufficient conditions for optimal controls in viscous flow problems,* Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Ser. A **124A** (1994), 211-251.

[38] Fattorini, H.O. şi Sritharan, S.S., *Optimal chattering controls for viscous flow,* Nonlinear Anal. Theory-Methods Appl. **25** (1995), 763-797.

[39] Fattorini, H.O. şi Sritharan, S.S., *Optimal control problems with state constrains in fluid mechanics and combustion,* Appl. Math. Optim. **38** (1998), 159-192.

[40] Fernandez-Cara, E., *On the approximate and null controllability of the Navier-Stokes equations,* SIAM Rev. **41** (1999), 269-277.

[41] Fortin, A., Jardak, M., Gervais, J.J. şi Pierre, R., *Old and new results on the two-dimensional Poiseuille flow,* J. Comput. Physics **115** (1994), 455-469.

[42] Fursikov, A.V., Imanuvilov, O.Y., *On exact boundary zero-controllability of two-dimensional Navier-Stokes equations- Mathematical problems for Navier-Stokes equations (Centro, 1993),* Acta. Appl. Math. **37** (1994), 67-76.

[43] Fursikov, A.V. şi Imanuvilov, O.Y., *Local exact controllability for the Boussinesques equation,* SIAM J. Control Optimiz. **36** (1998), 391-421.

[44] Fursikov, A.V., Gunzburger, M.D. şi Hou, L.S., *Boundary value problems and optimal boundary control for the Navier-Stokes system: the two-dimensional case,* SIAM J. Control Optim. **36** (1998), 852-894.

[45] Fursikov, A.V., *Real processes of the 3-D Navier-Stokes systems and its feedback stabilization form the boundary,* AMS Translations. Partial Diff. Eqs. M. Vishnik Seminar (2006).

[46] Hartmann, J., *Theory of the laminar flow of an electrically conductive liquid in a homogeneous magnetic field,* Det Kgl. Danske Vidensk-abernes Selskab Mathematisk-fysiske Meddelelser XV **6** (1937), 1-27.

[47] Hou, L.S. şi Yan, Y., *Dynamics and approximations of a velocity tracking problem for the Navier-Stokes flows with picewise distributed control,* SIAM J. Control Optim. **35** (1997), 1847-1885.

[48] Howie, J.M., *Fundamentals of Semigroup Theory,* Clarendon Press (1995).

[49] Imanuvilov, O.Y., *On exact controllability for Navier-Stokes equations,* ESAIM COCV **3** (1998), 97-131.

[50] Jiménez, J., *Transition to turbulence in two-dimensional Poiseuille flow,* J. Fluid Mech. **218** (1990), 265-297.

[51] Joshi, S.S., Speyer, J.L. şi Kim, J., *A system theory approach to the feedback stabilization of infinitesimal and finite-amplitude distrubances in plane Poiseuille flow,* J. Fluid Mech. **332** (1997), 157-184.

[52] Joshi, S.S., Speyer, J.L. şi Kim, J., *Finite-dimensional optimal control of Poiseuille flow,* J. Guid. Control. Dyna. **22** (1999), 340-348.

[53] Kato, T., *Perturbation Theory for Linear Operators,* Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 132, Springer-Verlag New York, Inc., New York (1966).

[54] Kokotovic, P., Krstic, M. şi Kanellakopoulos, I., *Nonlinear and adaptive control design,* John Wiley and Sons, New York (1995).

[55] Lasiecka, I. şi Triggiani, R., *Control Theory for Partial Differential Equations: Continuous and Approximation Theories: Abstrac Parabolic Systems,* Encyclopedia of Mathematics and its Applications **74**, Cambridge University Press, Cambridge (2002), pp+648.

[56] Lefter, C.G., *Calculul variaţiilor şi controlul sistemelor diferenţiale,* Ed. Al. Myller, Iaşi (2006).

[57] Lefter, C.G., *Ecuaţii diferenţiale şi sisteme dinamice,* Ed. Al. Myller, Iaşi (2006).

[58] Lefter, C.G., *Feedback stabilization of 2D Navier-Stokes equations with Navier slip boundary conditions,* Nonlinear Analysis **70** (2009), 553-562.

[59] Leray, J., *Etude de diverses équations intégrales non linéares et de quelques problémes que pose l'hydrodynamique,* J. Math. Pures Appl. **12** (1933), 1-82.

[60] Leray, J., *Essai sur les mouvements plans d'un liquide visqueux que limitent des parois,* J. Math. Puress Appl. **13** (1934), 331-418.

[61] Leray, J., *Essai sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace,* Acta Math. **63** (1934), 193-248.

[62] Lock, R.C., *The stability of the flow of an electrically conducting fluid between parallel planes under a transverse magnetic field,* Proceedings of Royal Society of London A **233** (1955), 100- 105.

[63] Lorenzi, A. şi Munteanu, I., *Recovering a constant in the two-dimensional Navier-Stokes system with no initial condition* (trimis spre publicare).

[64] Luo, L. şi Schuster, E., *Mixing enhancement in 3D MHD channel flow by boundary electrical potential,* Amer. Control Conf. (2010), 3347-3352.

[65] Munteanu, I., *Tangential feedback stabilization of periodic flows in a 2-D channel,* Diff. Int. Eqs. **24** (2011), 469-494.

[66] Munteanu, I., *Normal feedback stabilization of periodic flows in a two-dimensional channel,* J. Optimiz. Theory Appl. **152** (2012), 413-443.

[67] Munteanu, I., *Normal feedback stabilization of periodic flows in a three-dimensional channel,* Num. Funct. Anal. Optimiz. **33** (2012), 611-637.

[68] Munteanu, I., *Existence of solutions for models of shallow water in a basin with a degenerate varying bottom,* J. Evol. Eqs. (sub tipar).

[69] Munteanu, I., *Internal stabilizable feedback controller for a finite set of equilibrium solutions to the Navier-Stokes equations,* An. Stiint. Univ. Al. I. Cuza, Ser. noua, Mat. (sub tipar).

[70] Munteanu, I., *Normal feedback stabilization and observer design for linearized MHD channel flow at low magnetic Reynolds number* (trimis spre publicare).

[71] Munteanu, I., *Stability in periodic MHD channel flow subject to low external magnetic field* (trimis spre publicare).

[72] Pazy, A., *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations,* Springer, Berlin (1985).

[73] Potter, M.C. şi Kutchey, J.A., *Stability of plane Hartmann flow subject to a transverse magnetic field,* Phisics of Fluids **16**(1848).

[74] Ravindran, S.S., *Reduced-order adaptive controllers for fluid flows using POD,* J. Scientific Computing **15** (2000), 457-478.

[75] Raymond, J.P., *Feedback boundary stabilization of the two-dimensional Navier-Stokes equations,* Siam J. Control Optimiz. **45** (2006), 790-828.

[76] Rozhdestvensky, B.L. şi Simakin, I.N., *Secondary flows in a plane channel: their relationship and comparison with turbulent flows,* J. Fluid Mech. **147** (1984), 261-289.

[77] Schuster, E., Luo, L. şi Krstic, M, *MHD channel flow control in 2D: Mixing enhancement by boundary feedback,* Automatica **44** (2008), 2498-2507.

[78] Shirikyan, A., *Exact controllability in projections for three-dimensional Navier-Stokes equations,* Ann. I. H. Poincaré **24** (2007), 521-537.

[79] Smith, B.L. şi Glezer, A., *The formulation and evolution of synthetic jets,* Phys. Fluids **10** (1998), 2281-2297.

[80] Takashima, M., *The stability of the modified plane Pousseuille flow in the presence of a transverse magnetic field,* Fluid Dynamics Research **17** (1996), 293-310.

[81] Temam, R., *Navier-Stokes Equations and Nonlinear Functional Analysis: second edition,* Society for industrial and applied mathematics, Philadelphia (1995).

[82] Temam, R., *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics,* Springer-Verlag, New York (1997).

[83] Triggiani, R., *Stability enhancement of a 2-D linear Navier-Stokes channel flow by a 2-D wall normal boundary controller,* Discrete and Contin. Dyn. Syst. SB, 8279-314.

[84] Vazquez, R. şi Krstic, M., *A closed-form observer for the channel flow Navier-Stokes system,* Proceedings of the 2005 CDC (2005), 5959-5964.

[85] Vazquez, R. şi Krstic, M., *A closed-form feedback controller for stabilization of the linearized 2-D Navier-Stokes Poiseuille flow,* IEEE Trans. Autom. Control **52** (2007), 2298-2312.

[86] Vazquez, R, Schuster, E. şi Krstic, M., *Magnetohydrodynamic state estimation with boundary sensors,* Automatica **44** (2008), 2517-2527.

[87] Vazquez, R, Schuster, E şi Krstic, M., *A closed-form full-state feedback controller for stabilization of 3D magnetohydrodynamic channel flow,* Journal of Dyn. Syst. **131** (2009).

[88] Vladimirov, V. şi Lin, K., *The three-dimensional stability of steady MHD flows of an ideal fluid,* Physics of Plasmas **5** (1998), 4199-4204.

[89] Vrabie, I., C_0-*semigroups and applications,* Ser. Mathematics Studies no. 191, Elsevier, North-Holland, Amsterdam (2003).

[90] Shirikyan, A., *Approximate controllability for three-dimensional Navier-Stokes equations,* Comm, Math. Phys. **266**) (2006), 123-151.

[91] Shirikyan, A., *Exact controllability in projections for three-dimensional Navier-Stokes equations,* Ann. I. H. Poincaré **24** (2007), 521-537.

[92] Xu, C., Schuster, E., Vazquez, R. şi Krstic, M., *Stabilization of linearized 2D magnetohydrodynamic channel flow by backstepping boundary control,* Syst. Control Lett. **57** (2008), 805-812.

[93] Zabczyk, J., *Mathematical control theory: an introduction,* Systems Control: Foundations Applications, Birkh auser Boston Inc., Boston, MA (1992).