Algebră universală

De la Wikipedia, enciclopedia liberă

În matematică, o **algebră universală** este un ansamblu format dintr-o *mulțime de bază* și niște *operații*: $A = (\Omega, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$. Fiecare operație ω_j este o funcție $\omega_k : \Omega^{k_j} \to \Omega$, unde k_j se numește *aritatea* (numărul de argumente) operației ω_j, iar $\Omega^{k_j} = \underbrace{\Omega \times \ldots \Omega}_{k_j}$ este produsul cartezian al mulțimii de bază cu ea însăși de k_j ori.

De notat că este permis ca k_j să fie 0. Astfel de „operații", numite *operații nulare* sunt de fapt elemente speciale ale mulțimii de bază.

Exemple

- Un grup este o algebră universală cu 3 operații de arități respectiv 2, 0, 1.
  1. Prima operație (binară) este operația specificată ca lege de compoziție a grupului. Notația obișnuită este $a + b$ sau $a \cdot b$ în loc de $\omega_1(a, b)$. Trebuie să fie asociativă: $\forall a, b, c \in \Omega \,,\ \omega_1(\omega_1(a, b), c) = \omega_1(a, \omega_1(b, c))$
  2. A doua operație (nulară) marchează elementul neutru. Trebuie să satisfacă proprietatea de element neutru: $\forall a \in \Omega \,,\ \omega_1(\omega_2, a) = \omega_1(a, \omega_2) = a$
  3. A treia operație (unară) produce elementul invers. Trebuie să satisfacă proprietatea de element invers: $\forall a \in \Omega \,,\ \omega_1(\omega_3(a), a) = \omega_1(a, \omega_3(a)) = \omega_2$

- Un spațiu vectorial peste un corp *K* poate fi reprezentat printr-o algebră universală având cele trei operații de la grup plus câte o operație unară pentru fiecare element (scalar) al corpului *K*. Unui scalar $\alpha \in K$ îi va corespunde deci o operație unară $\omega_\alpha : \Omega \to \Omega$, notată de obicei $\alpha \cdot x$ în loc de $\omega_\alpha(x)$

Subalgebre ale unei algebre universale

O submulțime $\Omega' \subseteq \Omega$ a mulțimii de bază se numește *stabilă* în raport cu operațiile algebrei universale *A* dacă pentru fiecare operație ω_j, adică pentru fiecare *j*, are loc $\forall x_1, \ldots, x_{k_j} \in \Omega' \,,\ \omega_j(x_1, \ldots, x_{k_j}) \in \Omega'$.

Orice sumbulțime Ω' a mulțimii de bază, stabilă în raport cu operațiile algebrei, determină o algebră universală ce are ca mulțime de bază acea mulțime și ca operații restricțiile la Ω' ale operațiilor algebrei: $A' = (\Omega', \omega'_1, \omega'_2, \ldots, \omega'_n)$, unde

$$\omega'_j : (\Omega')^{k_j} \to \Omega' \,,\ \omega'_j(x_1, \ldots, x_{k_j}) = \omega_j(x_1, \ldots, x_{k_j}).$$

O astfel de algebră A' se numește *subalgebră* a algebrei *A*.

Se poate demonstra că o intersecție arbitrară de subalgebre ale unei algebre universale este o subalgebră. (De fapt, orice intersecție de submulțimi ale mulțimii de bază ale algebrei, stabile în raport cu operațiile algebrei, este o submulțime stabilă în raport cu operațiile algebrei.) Altfel spus, subalgebrele unei algebre universale alcătuiesc un *sistem de închidere*.

Subalgebra generată de o mulțime

O submulțime $M \subseteq \Omega$ a mulțimii de bază a unei algebre *A* nu este, în general, o subalgebră. Se poate pune problema care este „cea mai mică” subalgebră a lui *A* în care mulțimea de bază să includă mulțimea *M*. Există două construcții posibile, despre care se poate demonstra că duc la același rezultat:

1. Se iau toate mulțimile de bază ale subalgebrelor lui *A* ce conțin mulțimea *M* și se construiește intersecția lor.
2. Se notează $M_0 = M$, se definește M_1 ca fiind M_0 la care se adaugă toate valorile ce se pot obține prin aplicarea operațiilor algebrei asupra elementelor lui M_0, se construiește asemănător M_2 pornind de la M_1 ș.a.m.d. În final, mulțimea de bază a subalgebrei va fi $\bigcup_{i=0}^{\infty} M_i$.

Rezultatul oricăreia dintre construcțiile de mai sus se numește *subalgebra generată* de mulțimea *M*.

Relații de congruență

O relație binară $\equiv$ definită peste mulțimea Ω se numește *congruență* dacă este o relație de echivalență și în plus satisface proprietatea că, pentru fiecare operație ω_j a algebrei, din compunerea de elemente congruente rezultă elemente congruente:

$\forall x_1, \ldots, x_{k_j}, y_1, \ldots, y_{k_j} \in \Omega$, dacă $x_1 \equiv y_1\ ,\ \ldots\ ,\ x_{k_j} \equiv y_{k_j}$ atunci $\omega_j(x_1, \ldots, x_{k_j}) \equiv \omega_j(y_1, \ldots, y_{k_j})$

Ca orice relație de echivalență, o relație de congruență partiționează mulțimea Ω în clase de echivalență. Pe mulțimea claselor de echivalență ale unei relații de congruență, se poate defini o structură de algebră universală numită *algebră cât* (de la cât=rezultatul împărțirii): $A' = (\Omega' = \Omega|_{\equiv}, \omega_1', \ldots, \omega_n')$ definind fiecare operație ω_j' prin:

$$\omega_j(\hat{x_1}, \ldots, \hat{x_{k_j}}) = \hat{\omega_j}(x_1, \ldots, x_{k_j})$$

unde prin $\hat{x}$ se notează clasa de echivalență din care face parte *x*. De notat că corectitudinea definiției de mai sus a operațiilor se bazează pe faptul că din condiția de congruență rezultă că clasa lui $\omega_j(x_1, \ldots, x_{k_j})$ nu depinde de alegerea lui $x_1, \ldots, x_{k_j}$ în interiorul claselor lor.

Morfisme și izomorfisme

Articol principal: morfism.
Articol principal: izomorfism.

Două algebre universale *A* și A' sunt *similare* dacă au același număr de operații și operațiile de pe aceeași poziție au aceeași aritate. O funcție $f : \Omega \to \Omega'$ definită între mulțimile de bază a două algebre universale similare este numită *morfism* dacă pentru fiecare operație funcția comută cu operația respectivă:

$$\forall x_1, \ldots, x_{k_j} \in \Omega\ ,\ f(\omega_j(x_1, \ldots, x_{k_j}) = \omega'(f(x_1), \ldots, f(x_{k_j}))$$

Compunerea a două morfisme este întotdeauna un morfism.

Un morfism care este funcție bijectivă se numește *izomorfism*. Dacă între două algebre universale se poate stabili un izomorfism, ele se numesc izomorfe. Două algebre universale izomorfe sunt de fapt aceeași structură algebrică: orice proprietate este valabilă între elementele primei structuri este valabilă și în cea de-a doua structură.

Morfismele, respectiv izomorfismele, între o algebră universală și ea însăși se numesc *endomorfisme*, respectiv *automorfisme*.

Morfisme, subalgebre și congruențe

Fiind dată o congruență într-o algebră universală, funcția ce asociază fiecărui element al mulțimii de bază a algebrei clasa de echivalență a acelui element este un morfism de la algebra inițială la algebra cât.

Imaginea unui morfism ($f(\Omega) = \{f(x) : x \in \Omega\}$) este o subalgebră a algebrei destinație a morfismului.

Pentru orice morfism *f*, dacă punem $x \equiv y$ dacă $f(x) = f(y)$, obținem o relație de congruență. Funcția care asociază fiecărui $\hat{x} \in \Omega|_{\equiv}$ pe $f(x)$ este un izomorfism între algebra cât și subalgebra imagine a morfismului.