# Structuri algebrice şi aplicaţii

25 iulie 2021

## 1 Curs şi seminar 1 - Recapitulare inele si corpuri

**Definiţia .1** Structura algebrică $(R, +, \cdot)$ cu $R \neq \emptyset$ se numeşte *inel* dacă $(R, +)$ este grup abelian, $(R, \cdot)$ este semigrup şi are loc distributivitatea înmulţirii faţă de adunare, adică

$$\forall x, y, z \in R,\ x(y+z) = xy + xz \text{ şi } (x+y)z = xz + yz.$$

Dacă există $1 \in R$ astfel încât $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$, $\forall x \in R$, atunci inelul $R$ se numeşte *inel cu unitate* sau *inel unitar*.

Dacă, în plus, are loc comutativitatea înmulţirii, adică $\forall x, y \in R$, $xy = yx$, atunci inelul se numeşte *comutativ*.

Un inel cu unitate şi comutativ se numeşte *inel comutativ cu unitate*.

**Definiţia .2** Un element $x \in R$ este *divizor al lui zero* la stânga (la dreapta) dacă există $y \in R$, $y \neq 0$, astfel încât $xy = 0$ (respectiv $x = 0$).

**Definiţia .3** Un inel comutativ cu unitate în care orice element nenul este inversabil se numeşte *corp*. Altfel spus, $(K, +, \cdot)$ este corp dacă următoarele condiţii au loc: $(K, +)$ este grup abelian, $(K^*, \cdot)$ este grup şi are loc distributivitatea înmulţirii faţă de adunare.

Dacă înmulţirea din corp este comutativă, atunci corpul se numeşte *comutativ*.

**Observaţia .1**

1. Într-un corp nu există divizori ai lui zero nenuli.

2. Un corp are măcar două elemente.

**Subinele. Ideale**

Fie $R$ un inel, $R' \subset R$; $R' \neq \emptyset$.

**Definiţia .4** *$R'$ se numeşte subinel al lui $R$ dacă*

$$\forall x', y' \in R', \; x' - y' \in R' \text{ şi } x' \cdot y' \in R.$$

Dacă $K' \subset K$, $K' \neq \emptyset$, atunci $K'$ este un *subcorp* al lui $K$ şi notăm

$$K' \leq K$$

dacă avem $(K', +)$ subgrup în $(K, +)$ şi $((K')^*, \cdot)$ este subgrup în $(K^*, \cdot)$.

Fie acum $R$ un inel şi $A \subset R$, $A \neq \emptyset$.

**Definiţia .5** *$A$ se numeşte ideal stâng în $R$ dacă:*

1. $\forall a_1, a_2 \in A, \; a_1 - a_2 \in A$,
2. $\forall x \in R, \; \forall a \in A, \; xa \in A$, adică $RA \subseteq A$.

Similar se defineşte noţiunea de *ideal drept*.

Un *ideal bilateral* este un ideal stâng şi drept în $R$.

Să observăm că, în general, $xa \neq ax$.

Pentru inelele comutative, cele trei tipuri de ideale coincid.

Notaţie pentru $A$ ideal în $R$: $A \leq R$.

Pentru cazul necomutativ: fie $a \in R$ fixat.

$$Ra = \{xa \in R \mid x \in R\} \text{ este ideal stâng în } R.$$
$$RaR = \{xay \in R \mid x, y \in R\} \text{ este ideal bilateral în } R.$$

**Ideale principale**

$$(a)_s = \{xa + na \in R \mid x \in R, \; n \in \mathbb{Z}\} \text{ este ideal stâng în } R.$$
$$(a)_d = \{ax + na \in R \mid x \in R, \; n \in \mathbb{Z}\} \text{ este ideal drept în } R.$$

Pentru inelele cu unitate $1 \neq 0$ avem $(a)_s = Ra$ şi $(a)_d = aR$.

Pentru $\mathbb{Z}$, $n\mathbb{Z} = (n)$.

**Ideal generat de un număr finit de elemente sau de o mulţime oarecare de elemente**

I. Fie $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$.

$$\begin{aligned} (A)_s &= (a_1, a_2, ..., a_n)_s \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^{n} (x_i a_i + n_i a_i) \in R \mid x_i \in R,\, n_i \in \mathbb{Z},\, i = \overline{1,n} \right\} \end{aligned}$$

este ideal stâng în $R$.

$$\begin{aligned} (A)_d &= (a_1, a_2, ..., a_n)_d \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^{n} (a_i x_i + n_i a_i) \in R \mid x_i \in R,\, n_i \in \mathbb{Z},\, i = \overline{1,n} \right\} \end{aligned}$$

este ideal drept în $R$.

Dacă inelul $R$ este cu $1 \neq 0$, atunci:

$$(a_1, a_2, ..., a_n)_s = Ra_1 + Ra_2 + \cdots + Ra_n$$

şi

$$(a_1, a_2, ..., a_n)_d = a_1 R + a_2 R + \cdots + a_n R.$$

II. Dacă $A \subset R$ nu este neapărat finită, atunci

$$(A)_s = \bigcup_{\substack{A'_i \subset A \\ A'_i \text{finită}}} (A'_i)_s; \qquad (A)_d = \bigcup_{\substack{A'_i \subset A \\ A'_i \text{finită}}} (A'_i)_d.$$

**Inelul cât (factor)**

Fie $R$ un inel şi $A$ ideal bilateral al său. Atunci $(R/A, +)$ este grup factor unde

$$R/A = \{x + A \mid x \in R\} \text{ cu } x \sim y(A) \Longleftrightarrow x - y \in A.$$

Definim $(x + A)(y + A) = xy + A$; operaţia este bine definită deoarece $A$ este ideal bilateral.

Avem că $(R/A, \cdot)$ este semigrup şi are loc distributivitatea înmulţirii faţă de adunare. $(R/A, +, \cdot)$ se numeşte *inel cât* (*factor*).

**Exemple importante de ideale**

**Teorema .1** *Fie $R$ un inel comutativ cu $R \neq 0$ şi fie $P$ ideal în $R$, $P \neq R$. Atunci următoarele condiţii sunt echivalente:*

1. $\forall\, a, b \in R$, *astfel încât* $ab \in P \Longrightarrow a \in P$ *sau* $b \in P$.

2. $\forall\, a, b \in R$, *astfel încât* $a \notin P$ *şi* $b \notin P \Longrightarrow ab \notin P$.

3. $\forall\, A, B$ *ideale în* $R$, *astfel încât* $A \cdot B \subset P \Longrightarrow A \subset P$ *sau* $B \subset P$.

4. $R/P$ *domeniu de integritate.*

**Definiţia .6** $P$ se numeşte *ideal prim* al lui $R$.

Să reamintim noţiunea de număr prim.

**Definiţia .7** $p \in \mathbb{N},\ p > 1$, se numeşte *număr prim* dacă $p|ab \Longrightarrow p|a$ sau $p|b$.

Divizibiliatea în inele se poate scrie astfel:

$$B|A \Longleftrightarrow A \subset B \text{ unde } A \text{ şi } B \text{ sunt ideale în } R.$$

**Observaţia .2** Dacă $R$ este un domeniu de integritate, atunci $R/0 \simeq R$, de unde rezultă că 0 este ideal prim.

### Operaţii cu ideale

Dacă $A, B$ sunt ideale stângi (drepte, bilaterale), atunci

$$A \cap B \text{ este ideal stâng (drept, bilateral)}$$

$$A + B = \{a + b \in R \mid a \in A,\ b \in B\} \text{ este ideal stâng (drept, bilateral)}$$

$$A \cdot B = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \mid a_i \in A,\ b_i \in B,\ n \in \mathbb{N} \right\} \text{ este ideal stâng (drept, bilateral).}$$

Dacă $R$ este comutativ şi $A$ este ideal $R$, atunci

$$\sqrt{A} = \{c \in R \mid \exists\, n \in \mathbb{N},\ \text{astfel încât } c^n \in A\} \text{ este ideal.}$$

În particular,

$$\sqrt{0} = \{c \in R \mid \exists\, n \in \mathbb{N},\ \text{astfel încât } c^n = 0\}$$

se numeşte *nilradicalul* inelului, format din elementele *nilpotente* ale lui $R$.

**Teorema .2** *Fie* $R$ *un inel comutativ cu* $R \neq 0$ *şi* $M$ *ideal în* $R$, $M \neq R$. *Următoarele condiţii sunt echivalente:*

1. $\forall x \in R,\ x \notin M,\ \exists\, y \in R$, *astfel încât* $1 - xy \in M$.

2. $\forall\, A$ *ideal în* $R$ *astfel încât* $M \subseteq A$, *atunci* $M = A$ *sau* $A = R$.

3. $R/M$ *este corp comutativ.*

**Definiţia .8** Un ideal $M$ care satisface una dintre condiţiile echivalente de mai sus se numeşte ideal *maximal* al lui $R$.

Fie $(X, \leq)$ o mulţime parţial ordonată.

**Definiţia .9** $M \in X$ se numeşte element *maximal* dacă $M \leq x \Longrightarrow x = M$, pentru $x \in X$. Considerăm $\mathcal{I} = \{A \mid A$ ideal al lui $R$, $A \neq R\}$. Atunci $(\mathcal{I}, \subseteq)$ este o mulţime parţial ordonată.

**Observaţia .3** Orice ideal maximal este prim. Reciproc, nu: 0 este ideal prim pentru un domeniu de integritate, dar nu este maximal în general.

**Teorema .3** *Un inel cu* 1 *este corp dacă şi numai dacă nu are ideale stângi* (*drepte, bilaterale*) *proprii.*

Deci, pentru $K$ corp, avem doar două ideale: 0 şi $K$.

Pentru $K$ corp, 0 este unicul ideal maximal.

**Exemple.** În $\mathbb{Z}$, idealele prime sunt 0 şi $p\mathbb{Z}$ cu $p$ prim şi idealele maximale sunt de forma $p\mathbb{Z}$, cu $p$ prim.

**Lema lui Krull**

*Fie* $R$ *un inel comutativ cu* $1 \neq 0$. *Dacă* $A$ *este ideal în* $R$, $A \neq R$, *atunci există* $M$ *un ideal maximal în* $R$, *aşa încât* $A \subset M$.

**Observaţia .4**

1. Dacă $R$ este un inel comutativ cu $1 \neq 0$, atunci $R$ admite cel puţin un ideal maximal. Într-adevăr, aplicăm lema lui Krull pentru $A = 0$.

2. Dacă $R$ este un inel comutativ cu $1 \neq 0$ şi $a \in R$, $a$ element neinversabil în $R$, atunci există un ideal maximal $M$ în $R$, astfel încât $a \in M$. Într-adevăr, considerăm, în lema lui Krull, $A = (a) \neq R$, deoarece dacă $(a) = R$, atunci $1 \in (a)$, de unde ar rezulta că $a$ este inversabil, fals!

**Proprietăţi**

Fie $A$ ideal în $R$.

Dacă $1 \in A$, atunci $A = R$.

Dacă $a \in A$, $a$ inversabil, atunci $A = R$.

**Observaţia .5** Dacă $R$ este inel şi $A$ ideal în $R$, $A \neq R$, atunci elementele lui $A$ sunt neinversabile.

**Teorema .4** *Dacă mulţimea elementelor neinversabile formează un ideal, atunci acesta este unicul ideal maximal al inelului.*

**Morfisme de inele**

Fie $(R, +, \cdot)$ şi $(R', +, \cdot)$ inele.

**Definiţia .10** Funcţia $f : R \to R'$ se numeşte *morfism* (*homomorfism*) *de inele* dacă

1. $f(x + y) = f(x) + f(y)$.
2. $f(xy) = f(x)f(y)$, pentru orice $x, y \in R$.

Dacă inelele $R$ şi $R'$ sunt cu $1 \neq 0$ şi $1' \neq 0'$ şi are loc, în plus, condiţia

3. $f(1) = 1'$,

atunci $f$ se numeşte *morfism unitar* de inele.

**Definiţia .11** Dacă $f$ este morfism şi $f$ este injectivă, atunci $f$ se numeşte *morfism injectiv* de inele.

Dacă $f$ este morfism şi $f$ este surjectiv, atunci $f$ se numeşte *morfism surjectiv* de inele.

Dacă morfismul $f$ este bijectiv, $f$ se numeşte *izomorfism* de inele.

Să remarcăm că pentru noţiunea de morfism de corpuri se impun doar condiţiile 1 şi 2. Condiţia 3 rezultă din faptul că structurile $(K^*, \cdot)$ şi $(K^{'*}, \cdot)$ sunt grupuri.

**Observaţia .6** Orice morfism nenul de corpuri este morfism injectiv.

Pentru $f : R \to R'$, $\operatorname{Ker} f = \{x \in R \mid f(x) = 0'\}$.

$\operatorname{Ker} f$ este nucleul lui $f$ şi este ideal bilateral în $R$.

$\operatorname{Im} f = \{f(x) \in R' \mid x \in R\}$.

$\operatorname{Im} f$ este imaginea lui $f$ şi este subinel în $R$.

**Teoreme de izomorfisme ale inelelor.**

**Teorema .5** *Fie $f : R \to R'$ un morfism de inele. Atunci există izomorfismul de inele*

$$\begin{aligned} \varphi : R/\mathrm{Ker}\, f \quad &\xrightarrow{\sim} \quad \mathrm{Im}\, f \\ x + \mathrm{Ker}\, f \quad &\longrightarrow \quad f(x). \end{aligned}$$

**Teorema .6** *Fie $R$ un inel şi $A$ ideal bilateral în $R$. Atunci orice ideal stâng (drept, bilateral) al inelului $R/A$ este de forma $B/A$ unde $A \leq B \leq R$ şi $B$ este ideal stâng (drept, bilateral) în $R$. În plus, dacă $B$ este ideal bilateral în $R$, astfel încât $A \subset B$, atunci există izomorfismul:*

$$R/B \xrightarrow{\sim} (R/A)/(B/A).$$

**Teorema .7** *Fie $R$ inel şi $R'$ un subinel în $R$, iar $A$ ideal bilateral în $R$. Atunci există izomorfismul canonic*

$$R'/R' \cap A \xrightarrow{\sim} (R' + A)/A.$$

**Observaţia .7**

1. Dacă $f : R \to R'$ este morfism de inele şi $A$ este ideal în $R$, atunci $f(A)$ este subinel în $R'$. Dacă, în plus, $f$ este surjectiv, atunci $f(A)$ este ideal în $R'$.

2. Dacă $A'$ este ideal în $R'$, atunci $f^{-1}(A')$ este ideal în $R$.

## 2 Cursul 2 - Module

Fie $R$ inel cu $1 \neq 0$.

**Definiţia .12** Se numeşte *$R$-modul stâng* un grup abelian $(M,+)$, împreună cu o lege externă de compunere peste $R$

$$\begin{aligned} \varphi : R \times M &\longrightarrow M \\ (r,m) &\longrightarrow r \cdot m, \end{aligned}$$

astfel încât

1. $r(m_1 + m_2) = rm_1 + rm_2$.
2. $(r_1 + r_2))m = r_1m + r_2m$.
3. $r_1(r_2m) = (r_1r_2)m$.
4. $1 \cdot m = m$,

$\forall r, r_1, r_2 \in R,\ \forall m, m_1, m_2 \in M$.

Analog se defineşte noţiunea de *$R$-modul drept*.

**Observaţia .8**

1. O structură de $R$-modul stâng poate determina o structură de $R$-modul drept dacă inelul $R$ este comutativ.

   Într-adevăr, dacă ${}_RM$ este un modul stâng şi $\varphi : R \times M \to M$, $\varphi(r,m) = rm$ este operaţia externă, în raport cu care au loc condiţiile de $R$-modul stâng, atunci definim

   $$\varphi' : M \times R \to M, \quad \varphi'(m,r) = m \circ r = rm.$$

   Avem
   $$(m \circ r_1) \circ r_2 = r_2(m \circ r_1) = r_2(r_1m) = (r_2r_1)m = m \circ (r_2r_1).$$

   Dacă inelul $R$ este comutativ, atunci se verifică toate condiţiile de $R$-modul drept pentru $M$, în raport cu $\varphi'$.

   De aceea, pentru inele comutative nu mai facem distincţie între noţiunile de modul stâng şi modul drept.

2. Dacă inelul $R$ nu este comutativ, atunci pe grupul abelian $(R,+)$ definim o înmulţire astfel:

   $$R = R^\circ \text{ ca mulţimi}, \ (R,+) = (R^\circ,+)$$

   şi pentru $r_1, r_2 \in R^\circ,\ r_1 \circ r_2 = r_2r_1$. Se obţine astfel inelul opus $(R^\circ, +, \cdot)$.

Definim
$$\varphi'' : M \times R^\circ \to M, \quad \varphi''(m,r) = m \circ r = rm.$$
Aşadar,
$$_RM = M_{R^\circ}.$$

### Exemple de module

1. Fie $R$ un inel cu $1 \neq 0$. Atunci $_RR$ şi $R_R$ sunt module. În acest caz, înmulţirea externă este înmulţirea internă din inelul $R$.
2. Orice grup abelian $(G,+)$ este $\mathbb{Z}$-modul.
3. Pentru $K$ corp comuttiv şi $_KL$ spaţiu liniar, avem că $_KL$ este modul peste $K$, atât stâng, cât şi drept.
4. Fie $(M,+)$ un grup abelian şi notăm cu $\mathrm{End}(M)$ inelul endomorfismelor grupului $M$. Atunci $_{\mathrm{End}(M)}M$ este un modul stâng în care
$$\varphi : \mathrm{End}(M) \times M \to M, \quad \varphi(f,m) = f(m).$$

**Teorema .8** *Dacă $(M,+)$ este grup abelian şi $\mathrm{End}(M)$ este inelul endomorfismelor sale şi $R$ este inel cu $1 \neq 0$, atunci un morfism unitar de inele $f : R \to \mathrm{End}(M)$ determină o structură de modul stâng peste $R$ şi reciproc, o structură de modul stâng peste $R$ induce un morfism unitar de inele $f : R \to \mathrm{End}(M)$.*

**Demonstraţie.** Într-adevăr, dacă $f : R \to \mathrm{End}(M)$ este un morfism unitar de inele, atunci $\forall r \in R$,
$$f(r) : M \to M$$
şi definim
$$\varphi : R \times M \to M, \quad \varphi(r,m) = rm = f(r) \cdot m.$$

Reciproc, dacă $_RM$ este $R$-modul stâng, atunci definim $f : R \to \mathrm{End}(M)$, $f(r) : M \to M$, $f(r)(m) = r \cdot m$ şi se verifică faptul că $f$ este morfism unitar de inele. $\square$

## 3 Bimodule

Fie $(M,+)$ un grup abelian şi $R, S$ inele cu $1 \neq 0$, aşa încât

1. $_RM$ şi $_SM$ sunt $R$- şi $S$-module stângi. Dacă, în plus, $r(sm) = s(rm)$, $\forall r \in R$, $\forall s \in S$, $\forall m \in M$, atunci $_{R-S}M$ este bimodul.

2. ${}_RM$ şi $M_S$ sunt $R$-modul la stânga, respectiv $S$-modul la dreapta. Dacă, în plus, $(rm)s = r(ms)$, $\forall r \in R$, $\forall s \in S$, $\forall m \in M$, atunci ${}_RM_S$ este bimodul.

3. $M_R$ şi $M_S$ sunt $R$ şi $S$ module drepte. Dacă, în plus, $(mr)s = (ms)r$, $\forall r \in R$, $\forall s \in S$, $\forall m \in M$, atunci $M_{R-S}$ este bimodul.

**Exemple.**

1. ${}_RR_R$ este $R - R$ bimodul.

2. Dacă ${}_RM$ este modul şi considerăm modulul $M_{\mathbb{Z}}$ (deoarece $(M, +)$ este grup abelian), atunci $M$ este $\mathbb{Z} - R$ bimodul de tipurile ${}_{\mathbb{Z}-R}M$ şi ${}_RM_{\mathbb{Z}}$.

3. Dacă $R$ este inel comutativ, atunci ${}_RM_R$ este $R - R$ bimodul.

## 3.1 Submodul. Modul cât

Fie ${}_RM$ este un $R$-modul stâng.

**Definiţia .13** $M' \subset M$, $M' \neq \emptyset$ se numeşte *submodul* al modulului $M$ dacă

1. $\forall m_1', m_2' \in M'$, avem $m_1' - m_2' \in M'$.

2. $\forall r \in R$, $\forall m' \in M'$, avem $rm' \in M'$.

Următoarele condiţii sunt echivalente cu definiţia:

1. $\forall m_1', m_2' \in M'$, avem $m_1' + m_2' \in M'$.

2. $\forall r \in R$, $\forall m' \in M'$, avem $rm' \in M'$.

Notăm $M' \leq M$.

Fie ${}_RM$ modul şi $M' \leq M$.

Considerăm grupul abelian $(M/M', +)$,

$$M/M' = \{m + M' \mid m \in M\}.$$

Definesc

$$\begin{aligned} \cdot : R \times M/M' &\longrightarrow M/M' \\ (r, m + M') &\longrightarrow r(m + M') = rm + M' \end{aligned}$$

Definiţia de mai sus nu depinde de reprezentanţi.

$M/M'$ se numeşte *modul cât* (*factor*).

## 3.2 Morfisme de module

Fie ${}_RM$, ${}_RN$ module de acelaşi tip peste acelaşi inel $R$.

**Definiţia .14** Funcţia $f : M \to N$ se numeşte *R-morfism* dacă satisface condiţiile:

1. $f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2),\ \forall m_1, m_2 \in M.$
2. $f(rm) = rf(m),\ \forall r \in R,\ \forall m \in M.$

*Nucleul* morfismului $f$:

$$\operatorname{Ker} f = \{x \in M \mid f(x) = 0_N\} \text{ este submodul în } M.$$

*Imaginea* morfismului $f$

$$\operatorname{Im} f = \{f(x) \mid x \in M\} \text{ este submodul în } N\ .$$

Caracterizări:

$$f \text{ monomorfism} \iff \operatorname{Ker} f = 0$$

$$f \text{ epimorfism} \iff \operatorname{Im} f = N \iff N/\operatorname{Im} f = 0.$$

O compunere de morfisme este un morfism.

Fie $M' \leq M$. Atunci $i : M' \to M$ incluziunea canonică este un monomorfism, iar $p : M \to M/M'$, $p(m) = m + M'$ este un epimorfism.

**Definiţia .15** Dacă $f : M \to N$ este un morfism, atunci $N/\operatorname{Im} f = \operatorname{coker} f$ se numeşte *conucleul* lui $f$.

$M/\operatorname{Ker} f = \operatorname{coim} f$ se numeşte *coimaginea* lui $f$.

**Definiţia .16** Dacă $M, N$ sunt $R - S$ bimodule de acelaşi tip şi $f : M \to N$, atunci $f$ este *morfism* de $R - S$ bimodule dacă $f$ este morfism de $R$-module şi morfism de $S$-module.

### Teoreme de izomorfisme ale modulelor

**Teorema .9** *Fie $f : M \to N$ un morfism de module. Atunci există $\varphi : M/\operatorname{Ker} f \to \operatorname{Im} f$, $\varphi(m + \operatorname{Ker} f) = f(m)$ izomorfism de module.*

**Teorema .10** *Fie ${}_RM$ un modul şi $N \leq M$ un submodul al lui $M$. Atunci orice submodul al modulului cât $M/N$ este de forma $L/N$ unde $N \leq L \leq M$ şi există un izomorfism canonic*

$$\varphi : M/L \xrightarrow{\sim} (M/N)/(L/N).$$

**Teorema .11** *Dacă* ${}_RM$ *este un modul şi* $N \leq M$, $L \leq M$, *atunci există un izomorfism canonic*

$$\varphi : L/N \cap L \xrightarrow{\sim} (L+N)/N.$$

# 4 Cursul 3 - Şiruri exacte de module

Fie şirul $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L$ de module şi morfisme de module.

**Definiţia .17** Spunem că şirul de mai sus este *exact în* $N$ dacă $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g$.

**Observaţia .9** Morfismul $M \xrightarrow{f} N$ este mono(morfism) dacă şi numai dacă şirul $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N$ este exact.

Morfismul $M \xrightarrow{f} N$ este epi(morfism) dacă şi numai dacă şirul $M \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$ este exact.

Morfismul $M \xrightarrow{f} N$ este izo(morfism) dacă şi numai dacă şirul $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$ este exact.

**Definiţia .18** Un şir exact de forma

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{v} N \xrightarrow{q} M'' \longrightarrow 0$$

se numeşte *şir exact scurt* dacă $v$ este mono, $q$ este epi şi $\operatorname{Ker} q = \operatorname{Im} v$.

Plecând de la un mono (epi) morfism putem construi în mod canonic un şir exact scurt astfel:
Fie $v : M' \longrightarrow M$ mono. Obţinem şirul exact scurt

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{v} M \xrightarrow{p} M/\operatorname{Im} v \longrightarrow 0.$$

Fie $q : M \longrightarrow M''$ epi. Obţinem şirul exact scurt

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} q \xrightarrow{i} M \xrightarrow{q} M'' \longrightarrow 0.$$

## Cazuri particulare

- $v = u$ incluziunea canonică. Obţinem şirul exact scurt indus de un submodul

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{u} M \longrightarrow M/M' \longrightarrow 0.$$

- $q = p$ proiecţia canonică. Obţinem şirul

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M/M' \longrightarrow 0.$$

Pornind de la un morfism $f : M \longrightarrow N$, putem construi un şir exact astfel:

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} f \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{p} N/\operatorname{Im} f \longrightarrow 0$$

adică este exact în fiecare termen al şirului.

**Lema slabă a celor 5.** *Considerăm următoarea diagramă comutativă cu liniile exacte:*

$$\begin{tikzcd}
 & A' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "f'"] & A \arrow[r, "q"] \arrow[d, "f"] & A'' \arrow[r] \arrow[d, "f''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B' \arrow[r, "v'"] & B \arrow[r, "q'"] & B'' &
\end{tikzcd}$$

*Au loc următoarele afirmaţii:*

1. *Dacă $f'$ şi $f''$ sunt mono, atunci $f$ este mono.*

2. *Dacă $f'$ şi $f''$ sunt epi, atunci $f$ este epi.*

3. *Dacă $f'$ şi $f''$ sunt izo, atunci $f$ este izo.*

**Demonstraţie.**

1. Arătăm că avem $\operatorname{Ker} f = 0$. Fie $a \in \operatorname{Ker} f$. Atunci $f(a) = 0$, deci $q'f(a) = 0$, de unde $f''q(a) = 0$. Cum $f''$ este mono, obţinem $q(a) = 0$, adică $a \in \operatorname{Ker} q = \operatorname{Im} v$. Rezultă că există $a' \in A'$, încât $a = v(a')$. Avem $0 = f(a) = fv(a') = v'f'(a)$ şi, cum $v'$ este mono, obţinem $f'(a') = 0$. Dar şi $f'$ este mono, deci $a' = 0$. Obţinem $a = v(a') = 0$, adică

$$\operatorname{Ker} f = 0.$$

2. Să arătăm acum că $f$ este epi. Verificăm surjectivitatea lui $f$. Fie $b \in B$. Avem $q'(b) \in B''$. Cum $f''$ este epi, rezultă că există $a'' \in A''$, încât $f''(a'') = q''(b)$. Dar şi $q$ este epi, rezultă că există $a_1 \in A$, încât $q(a_1) = a''$. Avem $f''(q(a_1)) = q'(b)$ şi cum $f''q = q'f$ rezultă $q'(f(a_1) - b) = 0$, de unde $f(a_1) - b \in \operatorname{Ker} q' = \operatorname{Im} v'$. Există $b' \in B'$ încât $f(a_1) - b = v'(b')$. Morfismul $f'$ este epi, rezultă că există $a' \in A'$ cu $f'(a') = b'$. Obţinem $f(a_1) - b = v'f'(a')$, deci $f(a_1) - f(v(a')) = b$, adică

$$b = f(a_1 - v(a')) \in \operatorname{Im} f. \qquad \square$$

**Lema tare a celor 5.** *Fie următoarea diagramă comutativă cu liniile exacte:*

$$\begin{tikzcd}
A_2 \arrow[r, "g_2"] \arrow[d, "f_2"] & A_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "f_1"] & A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & A' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"] & A'' \arrow[d, "f''"] \\
B_2 \arrow[r, "h_2"] & B_1 \arrow[r, "h_1"] & B \arrow[r, "h"] & B' \arrow[r, "h'"] & B''
\end{tikzcd}$$

1. *Dacă $f_2$ este epi şi $f_1$ şi $f'$ sunt mono, atunci $f$ este mono.*

2. *Dacă $f_1$ şi $f'$ sunt epi, iar $f''$ este mono, atunci $f$ este epi.*

## 4.1 Produse directe de module

I. Considerăm două module de acelaşi tip, peste acelaşi inel ${}_RM_1$, ${}_RM_2$.

**Definiţia .19** Se numeşte *produs direct* al modulelor $M_1$ şi $M_2$ un modul $P$, împreună cu două morfisme $p_1, p_2$, $p_i : P \longrightarrow M_i$, $i = \overline{1,2}$, aşa încât următoarea diagramă este comutativă:

$$\begin{tikzcd}
 & M_1 & \\
\forall X \arrow[ur, "f_1"] \arrow[dr, "f_2"'] \arrow[rr, dashed, "\exists! f"] & & P \arrow[ul, "p_1"'] \arrow[dl, "p_2"] \\
 & M_2 &
\end{tikzcd}$$

Pentru orice modul $X$ şi orice morfisme $f_1 : X \longrightarrow M_1$, $f_2 : X \longrightarrow M_2$, există şi este unic morfismul $f : X \longrightarrow P$, aşa încât

$$p_1 f = f_1, \quad p_2 f = f_2.$$

Proprietatea prin care se defineşte produsul direct se numeşte *proprietate de universalitate* a produsului direct.

**Teoremă de existenţă şi unicitate.** *Fie modulele ${}_RM_1$ şi ${}_RM_2$. Atunci există produsul lor direct $(P, p_1, p_2)$ şi este unic până la izomorfism.*

**Demonstraţie.** *Existenţa.* Fie produsul cartezian

$$M_1 \Pi M_2 = \{(m_1, m_2) \mid m_1 \in M_1,\ m_2 \in M_2\}$$

şi definim

$$(m_1, m_2) + (m_1', m_2') = (m_1 + m_1', m_2 + m_2'), \quad r(m_1, m_2) = (rm_1, rm_2),\ \forall r \in R.$$

Obţinem o structură de $R$-modul pe $M_1 \Pi M_2$.

Definim

$$\begin{aligned} p_i : M_1 \Pi M_2 &\longrightarrow M_i \\ (m_1, m_2) &\longrightarrow m_i \end{aligned}$$

$p_i$ sunt proiecţiile canonice şi sunt epi, $i = \overline{1,2}$.

Definim $M_i : M_i \longrightarrow M_1 \Pi M_2$ cu $u_1(m_1) = (m_1, 0),\ u_2(m_2) = (0, m_2)$.

$u_1$ şi $u_2$ se numesc *injecţiile canonice*.

Au loc, în plus, următoarele proprietăţi:

$$p_i u_i = 1_{M_i} \ \text{ şi } \ p_i u_j = 0, \quad i \neq j.$$

De asemenea, $u_1 p_1 + u_2 p_2 = 1_{M_1 \Pi M_2}$ folosind definiţia produsului direct:

$$\begin{tikzcd}
 & M_1 \arrow[dr, "u_1"] & \\
M_1 \Pi M_2 \arrow[ur, "p_1"] \arrow[dr, "p_2"'] \arrow[rr, shift left, "u_1 p_1 + u_2 p_2"] \arrow[rr, shift right, "1_{M_1 \Pi M_2}"'] & & M_1 \Pi M_2 \\
 & M_2 \arrow[ur, "u_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Se demonstrează faptul că $(M_1 \Pi M_2; p_1, p_2)$ este produs direct al lui $M_1$ şi $M_2$.

De remarcat că $f : X \longrightarrow M_1 \Pi M_2$ este definit astfel $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$.

Se verifică unicitatea până la izomorfism a produsului direct (tehnica ”vânătorii de diagrame”).

□

II. Fie acum $\{{}_R M_i\}_{i \in I}$ o familie de $R$-module, nu neapărat finită.

*Produsul direct* al acestei familii de module este $(P, \{p_i\}_{i\in I})$, $p_i : P \longrightarrow M_i$, încât următoarea diagramă este comutativă:

$$\begin{tikzcd}
& M_i & \\
\forall X \arrow[ur, "f_i"] \arrow[rr, dashed, "\exists! f"] & & P \arrow[ul, "p_i"']
\end{tikzcd}$$

Această proprietate se numeşte *proprietate de universalitate* a produsului direct.

**Teorema de existenţă şi unicitate.** *Dată familia $\{M_i\}_{i\in I}$, există produsul ei direct şi este unic, până la izomorfism.*

**Demonstraţie.** Considerăm produsul cartezian

$$\prod_{i\in I} M_i = \{\{m_i\}_{i\in I} \mid m_i \in M_i,\ i \in I\}$$

şi definim:

$$\begin{aligned}
"+" \quad &: \quad \{m_i\}_{i\in I} + \{m'_i\}_{i\in I} = \{m_i + m'_i\}_{i\in I} \\
"\cdot" \quad &: \quad r\{m_i\}_{i\in I} = \{rm_i\}_{i\in I},\ \forall r \in R.
\end{aligned}$$

Obţinem astfel o structură de $R$-modul pe $\prod\limits_{i\in I} M_i$.

Să remarcăm că

$$\prod_{i\in I} M_i = \left\{ f : I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} M_i \mid f(i) \in M_i \right\}.$$

Definim

$$\begin{aligned}
p_{i_0} : \prod_{i\in I} M_i \quad &\longrightarrow \quad M_{i_0} \\
\{m_i\}_{i\in I} \quad &\longrightarrow \quad m_{i_0}
\end{aligned}$$

şi

$$\begin{aligned}
u_{i_0} : M_{i_0} \quad &\longrightarrow \quad \prod_{i\in I} M_i \\
m_{i_0} \quad &\longrightarrow \quad \{m_i\}_{i\in I}
\end{aligned}$$

cu $m_i = 0$ pentru $i \neq i_0$.

Avem $p_i u_i = 1_{M_i},\ p_i u_j = 0$, pentru $i \neq j$,

$$\sum_{i \in I} u_i p_i = 1_{\prod\limits_{i \in I} M_i}.$$

Se verifică unicitatea până la izomorfism a produsului direct de module. $\square$

# 5 Curs 4 - Sume directe de module

## I. Suma directă pentru ${}_RM_1$ şi ${}_RM_2$

**Definiţia .20** *Suma directă* a modulelor ${}_RM_1$ şi ${}_RM_2$ este un modul $S$ împreună cu două morfisme $u_1, u_2$, $u_i : M_i \longrightarrow S$ monomorfisme canonice aşa încât următoarea diagramă este comutativă:

$$\begin{tikzcd}
& M_1 \arrow[dl, "u_1"'] \arrow[dr, "g_1"] & \\
S \arrow[rr, dashed, "\exists ! g"] & & X \\
& M_2 \arrow[ul, "u_2"] \arrow[ur, "g_2"'] &
\end{tikzcd}$$

$gu_i = g_i,\ i = \overline{1,2}$, adică, pentru orice modul $X$ şi orice morfisme $g_1, g_2$ definite ca în diagramă, există şi este unic $g : S \longrightarrow X$, încât

$$gu_1 = g_1 \ \text{ şi } \ gu_2 = g_2.$$

Această proprietate se numeşte *proprietate de unviersalitate* a sumei directe.

**Teorema de existenţă şi unicitate.** *Date ${}_RM_1$ şi ${}_RM_2$, există suma lor directă şi este unică până la izomorfism.*

**Demonstraţie.** *Existenţa.* $(u_1, u_2, M_1 \Pi M_2)$ este suma directă pentru $M_1$ şi $M_2$. Considerăm diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & M_1 \arrow[dl, "u_1"'] \arrow[dr, "g_1"] & \\
M_1 \Pi M_2 \arrow[rr, dashed, "\exists ! g"] & & X \\
 & M_2 \arrow[ul, "u_2"] \arrow[ur, "g_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Definim

$$g : M_1 \Pi M_2 \longrightarrow X, \;\; g(m_1, m_2) = g_1(m_1) + g_2(m_2).$$

$g$ este morfism şi are loc

$$g u_i = g_i, \;\; i = \overline{1,2}.$$

*Unicitatea* lui $g$. Presupunem că există morfismul $g' : M_1 \Pi M_2 \longrightarrow X$, aşa încât $g' u_i = g_i$, $i = \overline{1,2}$. Avem

$$\begin{aligned}
g'(m_1, m_2) &= g'((0, m_2) + (m_1, 0)) \\
&= g'((0, m_2) + g'(m_1, 0) \\
&= g'(u_2(m_2)) + g'(u_1(m_1)) \\
&= g_1(m_1) + g_2(m_2) \\
&= g(m_1, m_2), \quad \forall (m_1, m_2) \in M_1 \Pi M_2.
\end{aligned}$$

## Unicitatea sumei directe

Pentru suma directă notăm $M_1 \Pi M_2$ sau $M_1 \coprod M_2$ sau $M_1 \oplus M_2$. Suma directă este $(u_1, u_2, M_1 \coprod M_2)$. Presupunem că $(u_1, u_2, S)$ şi $(u'_1, u'_2, S')$ sunt sume directe ale modulelor $M_1$ şi $M_2$.

Să arătăm că există izomorfismul $g : S \longrightarrow S'$, astfel încât $g u_i = u'_i$, $i = \overline{1,2}$. Folosim tehnica "vânătorii de diagrame". Considerăm diagramele

$$\begin{tikzcd}
 & M_1 \arrow[dl, "u_1"'] \arrow[dr, "u_1'"] & \\
S \arrow[rr, dashed, "\exists! g"] & & S' \\
 & M_2 \arrow[ul, "u_2"] \arrow[ur, "u_2'"'] &
\end{tikzcd}$$

$gu_i = u_i',\ \forall i = \overline{1,2},$

$$\begin{tikzcd}
 & M_1 \arrow[dl, "u_1'"'] \arrow[dr, "u_1"] & \\
S' \arrow[rr, dashed, "\exists! g'"] & & S \\
 & M_2 \arrow[ul, "u_2'"] \arrow[ur, "u_2"'] &
\end{tikzcd}$$

$g'u_i' = u_i,\ \forall i = \overline{1,2}.$

Obţinem

$$(gg')u_i' = u_i' \text{ şi } (g'g)u_i = u_i,\ i = \overline{1,2}.$$

Similar, avem

$$\begin{tikzcd}
& M_1 \arrow[dl, "u_1"'] \arrow[dr, "u_1"] & \\
S \arrow[rr, shift left, "g'g"] \arrow[rr, shift right, "1_S"'] & & S \\
& M_2 \arrow[ul, "u_2"] \arrow[ur, "u_2"'] &
\end{tikzcd}$$

$g'g = 1_S$,

$$\begin{tikzcd}
& M_1 \arrow[dl, "u_1'"'] \arrow[dr, "u_1'"] & \\
S' \arrow[rr, shift left, "1_{S'}"] \arrow[rr, shift right, "gg'"'] & & S' \\
& M_2 \arrow[ul, "u_2'"] \arrow[ur, "u_2'"'] &
\end{tikzcd}$$

$gg' = 1_{S'}$.

Aşadar, $g$ este un izomorfism. $\square$

**Teorema .12** *Date modulele* ${}_RM_1$, ${}_RM_2$ *şi modulul* $S$, *împreună cu morfismele* $u_i : M_i \longrightarrow S$, $i = \overline{1,2}$, *următoarele condiţii sunt echivalente:*

1. $(u_1, u_2, S)$ *este sumă directă.*

2. *Există morfismele* $p_i : S \longrightarrow M_i,\ i = \overline{1,2}$, *unic determinate, astfel încât*

$$\begin{cases} p_1u_1 = 1_{M_1},\ p_2u_2 = 1_{M_2},\ p_iu_j = 0,\ i \neq j, \\ u_1p_1 + u_2p_2 = 1_S. \end{cases}$$

**Demonstraţie.** $1 \Longrightarrow 2$. Considerăm diagramele

$$\begin{tikzcd}
 & M_1 \arrow[dl, "u_1"'] \arrow[dr, "1_{M_1}"] & \\
S \arrow[rr, dashed, "\exists! p_1"] & & M_1 \\
 & M_2 \arrow[ul, "u_2"] \arrow[ur, "0"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\exists! p_1 : S \longrightarrow M_1, \text{ încât } \begin{cases} p_1 u_1 = 1_{M_1} \\ p_1 u_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd}
 & M_1 \arrow[dl, "u_1"'] \arrow[dr, "0"] & \\
S \arrow[rr, dashed, "\exists! p_2"] & & M_2 \\
 & M_2 \arrow[ul, "u_2"] \arrow[ur, "1_{M_2}"'] &
\end{tikzcd}$$

$\exists! p_2 : S \longrightarrow M_2$, încât $\begin{cases} p_2 u_1 = 0 \\ p_2 u_2 = 1_{M_2} \end{cases}$ Avem

$$\begin{tikzcd}
& M \arrow[dl, "u_1"'] \arrow[dr, "u_1"] & \\
S \arrow[rr, dashed, shift left, "1_S"] \arrow[rr, dashed, shift right, "u_1p_1+u_2p_2"'] & & S \\
& M \arrow[ul, "u_2"] \arrow[ur, "u_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Din unicitatea morfismului avem $u_1p_1 + u_2p_2 = 1_S$.

$2 \Longrightarrow 1$. Fie $R$-modulul $X$ şi $g_i : M_i \longrightarrow X$ morfisme arbitrare. Să determinăm morfismul unic $g : S \longrightarrow X$, astfel încât $gu_i = g_i$, $i = \overline{1,2}$.

Considerăm diagrama în care $g = g_1p_1 + g_2p_2$.

$$\begin{tikzcd}
& M_1 \arrow[dl, "u_1"] \arrow[dr, "g_1"] & \\
S \arrow[ur, dashed, bend left=15, "p_1"] \arrow[rr, dashed, "g"] \arrow[dr, dashed, bend right=15, "p_2"'] & & X \\
& M_2 \arrow[ul, "u_2"'] \arrow[ur, "g_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Se verifică faptul că $gu_i = g_i$, $i = \overline{1,2}$. Morfismul $g$ este unic cu această proprietate. Într-adevăr, dacă $g' : S \longrightarrow X$ este aşa încât $g'u_i = g_i$, $i = \overline{1,2}$, atunci

$$g' = g' \circ 1_S = g' \circ (u_1p_1 + u_2p_2) = g_1p_1 + g_2p_2 = g \qquad \square$$

## II. Sumă directă pentru o familie de module

Fie familia de $R$-module $\{_R M_i\}_{i \in I}$.

**Definiţia .21** *Suma directă a familiei* $\{M_i\}_{i\in I}$ este $(\{u_i\}_{i\in I}, S)$, unde $S$ este un $R$-modul şi $u_i : M_i \longrightarrow S$ sunt morfisme, aşa încât

$$\begin{tikzcd} & M_i \arrow[dl, "u_i"'] \arrow[dr, "g_i"] & \\ S \arrow[rr, dashed, "\exists! g"] & & X \end{tikzcd}$$

pentru orice $R$-modul $X$ şi orice morfisme $g_i : M_i \longrightarrow X$ există şi este unic $g : S \longrightarrow X$, încât $gu_i = g_i$, $i \in I$.

Proprietatea dată în definiţia de mai sus este *proprietatea de universalitate a sumei directe.*

**Teorema .13** *Dacă* $(\{u_i\}_{i\in I}, S)$ *este sumă directă pentru familia* $\{M_i\}_{i\in I}$*, atunci există şi este unică familia de morfisme*

$$p_i : S \longrightarrow M_i,\ i \in I,\ cu\ p_j u_i = \begin{cases} 1_{M_i}, & pentru\ j = i, \\ 0, & pentru\ j \neq i. \end{cases}$$

**Demonstraţie.** Folosim diagrama

$$\begin{tikzcd} & M_i \arrow[dl, "u_i"'] \arrow[dr, "\delta_{ij}"] & \\ S \arrow[rr, dashed, "\exists! p_j"'] & & M_j \end{tikzcd}$$

□

**Teorema de existenţă şi unicitate.** *Dată familia de module* $\{M_i\}_{i\in I}$*, există suma directă a familiei şi este unică, până la izomorfism.*

**Soluţie.** Fie

$$\prod_{i\in I} M_i = \{\{m_i\}_{i\in I} \mid m_i \in M_i,\ i \in I\}$$

cu $\{m_i\}_{i\in I} + \{m'_i\}_{i\in I} = \{m_i + m'_i\}_{i\in I}$ şi $r\{m_i\}_{i\in I} = \{rm_i\}_{i\in I}$. Atunci $\prod\limits_{i\in I} M_i$ este un $R$-modul.

Considerăm

$$\coprod_{i\in I} M_i = \Big\{\{m_i\}_{i\in I} \in \prod_{i\in I} M_i \mid m_i = 0, \text{ cu excepţia unui număr finit de indici}\Big\}.$$

Atunci $\coprod_{i\in I} M_i$ este submodul al lui $\prod_{i\in I} M_i$.

Să remarcăm că pentru $I$ finită, avem

$$\coprod_{i\in I} M_i = \prod_{i\in I} M_i.$$

Considerăm morfismele

$$u_{i_0} : M_{i_0} \longrightarrow \coprod_{i\in I} M_i, \text{ pentru orice } i_0 \in I \text{ arbitrar}$$
$$u_{i_0}(m_{i_0}) = \{m_i\}_{i\in I}, \text{ cu } \begin{cases} m_i = m_{i_0} & \text{pentru } i = i_0, \\ m_i = 0 & \text{pentru } i \neq i_0. \end{cases}$$

Atunci $\left(\{u_i\}_{i\in I}, \coprod_{i\in I} M_i\right)$ este sumă directă pentru familia $\{M_i\}_{i\in I}$.

Într-adevăr, considerăm diagrama

$$\begin{tikzcd}
& M_i \arrow[dl, "u_i"'] \arrow[dr, "g_i"] & \\
\coprod_{i\in I} M_i \arrow[rr, dashed, "\exists! g"'] & & X
\end{tikzcd}$$

Morfismul $g$ se defineşte astfel

$$g_i(\{m_i\}_{i\in I}) = \sum_{i\in I} g_i(m_i),$$

unde $g_i(m_i) = 0$, cu excepţia unui număr finit de indici.

Se verifică faptul că $gu_i = g_i$.

*Unicitatea lui $g$.* Presupunem că există $g' : \coprod_{i \in I} M_i \longrightarrow X$ încât $g' u_i = g_i$, $i \in I$. Atunci

$$\begin{aligned} g'(\{m_i\}_{i\in I}) &= g'(u_{i_1}(m_1) + u_{i_2}(m_2) + \cdots + u_{i_k}(m_{i_k})) \\ &= g_{i_1}(m_{i_1}) + \cdots + g_{i_k}(m_{i_k}) \\ &= g(\{m_i\}_{i\in I}),\ \forall \{m_i\}_{i\in I} \in \coprod_{i\in I} M_i, \end{aligned}$$

unde $m_{i_1}, ..., m_{i_k}$ sunt elementele nenule din $\{m_i\}_{i\in I}$. Unicitatea sumei directe se verifică cu tehnica "vânătorii de diagrame". $\square$

## 6 Cursuri 5, 6 - Sumă directă internă de submodule

Fie ${}_RM$ un modul şi ${}_RM_i$ submodule în ${}_RM$, pentru orice $i \in I$. Notăm

$$\sum_{i\in I} M_i = \left\{ \sum_{i\in I} m_i \in M \mid m_i \in M_i,\ i \in I, m_i = 0, \text{ cu excepţia unui număr finit de indici} \right\}$$

**Definiţia .22** $\sum\limits_{i\in I} M_i$ se numeşte *suma directă internă* a familiei $\{M_i\}_{i\in I}$ dacă scrierea oricărui element sub forma $\sum\limits_{i\in I} m_i$ este unică.

**Notaţie:** $\sum\limits_{i\in I} \oplus M_i$ sau $\bigoplus\limits_{i\in I} M_i$.

**Teorema .14** *Fie $M$ un $R$-modul şi $\{M_i\}_{i\in I}$ o familie de submodule ale lui $M$. Următoarele condiţii sunt echivalente:*

1. $M = \sum\limits_{i\in I} \oplus M_i$.
2. *Există un izomorfism canonic* $h : \coprod\limits_{i\in I} M_i \xrightarrow{\sim} M$ *indus de incluziunile canonice* $h_i : M_i \longrightarrow M$, $i \in I$, *unde* $\coprod\limits_{i\in I} M_i$ *este suma directă externă.*
3. $M = \sum\limits_{i\in I} M_i$ *şi* $\sum\limits_{i\in I} m_i = 0 \Longleftrightarrow m_i = 0,\ \forall\, i \in I$.
4. $M = \sum\limits_{i\in I} M_i$ *şi* $M_{i_0} \cap \left( \sum\limits_{\substack{i\in I \\ i\neq i_0}} M_i \right) = 0$, *pentru orice* $i_0 \in I$.

**Demonstraţie.** $1 \Longrightarrow 2$. Considerăm incluziunile canonice $h_i : M_i \longrightarrow M$. Utilizăm definiţia sumei directe pentru diagrama

$$\begin{tikzcd} & M_i \arrow[dl, "u_i"'] \arrow[dr, "h_i"] & \\ \coprod\limits_{i\in I} M_i \arrow[rr, dashed, "\exists! h"'] & & M \end{tikzcd}$$

$hu_i = h_i,\ \forall i \in I$, unde

$$h(\{m_i\}_{i\in I}) = \sum_{i\in I} h_i(m_i) = \sum_{i\in I} m_i \text{ pentru } \{m_i\}_{i\in I} \in \coprod_{i\in I} M_i.$$

$h$ este morfism surjectiv, deoarece $\forall\, m \in M$, $m$ se scrie în mod unic ca

$$m = \sum_{i\in I} m_i.$$

$h$ este injectiv datorită faptului că $m = \sum\limits_{i\in I} m_i$ este o scriere unică.

$2 \Longrightarrow 3$. Considerăm izomorfismul

$$h : \coprod_{i\in I} M_i \longrightarrow M.$$

Din definiţie avem că $\sum\limits_{i\in I} M_i$ este submodul al lui $M$.

Să mai arătăm că $M \subseteq \sum\limits_{i\in I} M_i$.

Din faptul că $h$ este un izomorfism, rezultă că, pentru orice $m \in M$ există $\{m_i\}_{i\in I}$, aşa încât $m = h(\{m_i\}_{i\in I})$.

Morfismul $h$ este indus de incluziunile canonice.

Avem $m = \sum\limits_{i\in I} h_i(m_i) = \sum\limits_{i\in I} m_i$. Deci $M \subset \sum\limits_{i\in I} M_i$.

Dacă $\sum\limits_{i=1} m_i = 0$, atunci $h(\{m_i\}_{i\in I}) = 0$ şi, cum $h$ este izomorfism, obţinem $m_i = 0$, $\forall\, i \in I$.

$3 \Longrightarrow 4$. Pentru $i_0 \in I$ oarecare, considerăm

$$x \in M_{i_0} \cap \left( \sum_{\substack{i\in I \\ i\neq i_0}} M_i \right).$$

Atunci, $x = m_{i_0} \in M_{i_0}$ şi $x = \sum\limits_{\substack{i\in I \\ i\neq i_0}} m_i$. Obţinem $-m_{i_0} + \sum\limits_{\substack{i\in I \\ i\neq i_0}} m_i = 0$, de unde $m_i = 0$, $\forall\, i \in I$, în baza lui 3. Rezultă $x = 0$.

$4 \Longrightarrow 1$. Avem $M = \sum\limits_{i\in I} M_i$. Fie $m = \sum\limits_{i\in I} m_i$. Să arătăm că scrierea este unică. Presupunem că

$m = \sum_{i\in I} m_i = \sum_{i\in I} m'_i$, de unde

$$m_{i_0} - m'_{i_0} = \sum_{\substack{i\in I\\ i\neq i_0}} m'_i - \sum_{\substack{i\in I\\ i\neq i_0}} m_i \in M_{i_0} \cap \left( \sum_{\substack{i\in I\\ i\neq i_0}} M'_{i_0} \right) = 0,$$

deci $m_{i_0} = m'_{i_0}$, pentru orice $i_0 \in I$. $\square$

# 7 Sumanzi direcţi. Factori direcţi. Şiruri exacte scindate

Fie $M$ un $R$-modul şi $N$ un submodul al său. Notăm cu $u : N \longrightarrow M$ incluziunea canonică.

**Definiţia .23** Submodulul $N$ se numeşte *sumand direct* al lui $M$ dacă există morfismul $q : M \longrightarrow N$, încât $qu = 1_N$.

Rezultă că morfismul $q$ este epi.
Spunem că $u$ are invers la stânga.
Fie acum $M$ un $R$-modul şi $P$ un modul cât al lui $M$, iar $p : M \longrightarrow P$ epimorfismul corespunzător.

**Definiţia .24** $P$ se numeşte *factor direct* al lui $M$ dacă există $v : P \longrightarrow M$, încât $pv = 1_P$.

Rezultă că morfismul $v$ este mono.
Spunem că $p$ are invers la dreapta.

**Definiţia .25** Un şir exact scurt

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{v} M \xrightarrow{q} M'' \longrightarrow 0$$

se numeşte şir exact *scindat* dacă $\operatorname{Im} v = \operatorname{Ker} q$ este sumand direct al lui $M$.

**Teorema .15** (de caracterizare a şirurilor exacte scindate) *Fie $M$ un $R$-modul, $N$ un submodul cu $u : N \longrightarrow M$ incluziunea canonică şi $p : M \longrightarrow M/N$ proiecţia canonică. Următoarele condiţii privitoare la $M$ şi $N$ sunt echivalente.*

1. *$N$ este sumand direct al lui $M$.*

2. *$M/N$ este factor direct al lui $M$.*

3. *Există un izomorfism canonic* $f : M \xrightarrow{\sim} N \coprod (M/N)$ *aşa încât*

$$\begin{array}{rcl} N \xrightarrow{u} M & \xrightarrow{f} & N \coprod (M/N) \\ N \coprod (M/N) & \xrightarrow{f^{-1}} & M \xrightarrow{p} M/N \end{array}$$

$fu = u_1 : N \longrightarrow N \coprod (M/N)$ *este incluziunea pe prima componentă.*

$pf^{-1} = p_2 : N \coprod (M/N) \longrightarrow M/N$ *este proiecţia pe a doua componentă.*

**Demonstraţie.** Fie diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "u"] \arrow[d, "1_N"'] & M \arrow[r, "p"] \arrow[d, dashed, "\exists f \text{ izo}"] & M/N \arrow[r] \arrow[d, "1_{M/N}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, shift left, "u_1"] & N \coprod (M/N) \arrow[l, dashed, shift left, "p_1"] \arrow[r, shift left, "p_2"] & M/N \arrow[l, dashed, shift left, "u_2"] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \qquad \text{(D)}$$

în care cele două linii sunt şiruri exacte.

n1 $\Longrightarrow$ 3. Să arătăm că există $f$ care face pătratele comutative şi apoi, conform lemei slabe a celor 5 va rezulta că $f : M \longrightarrow N \coprod (M/N)$ este izo.

Din $N$ sumand direct rezultă că există $q : M \longrightarrow N$, încât $qu = 1_N$.

Considerăm produsul direct $(N \coprod (M/N); p_1, p_2)$ şi din definiţia acestuia $\exists! f : M \longrightarrow N \coprod (M/N)$ încât $p_1 f = q$ şi $p_2 f = p$.

$$\begin{tikzcd}
 & N & \\
N \coprod (M/N) \arrow[ur, "p_1"] \arrow[dr, "p_2"'] & & M \arrow[ul, "q"'] \arrow[ll, dashed, "\exists! f"'] \arrow[dl, "p"] \\
 & M/N &
\end{tikzcd}$$

Aşadar al doilea pătrat din diagrama (D) este comutativ. Pe de altă parte, $p_2(fu) = pu = 0$.

Considerând din nou produsul direct $N\coprod(M/N)$, rezultă că

$$\exists! u_1 : N \longrightarrow N\coprod M/N$$

astfel încât $p_1u_1 = 1_N$ şi $p_2u_1 = 0$.

Dar şi $fu$ satisface aceste condiţii, deci $fu = u_1$, deci şi primul pătrat al diagramei (D) este comutativ.

Obţinem aşadar condiţia 3.

$3 \Longrightarrow 1$. Să arătăm că există $q : M \longrightarrow N$, astfel încât $qu = 1_N$.

Considerăm $q = p_1f : M \longrightarrow N$ şi avem $qu = (p_1f)u = p_1u_1 = 1_N$.

$2 \Longrightarrow 3$. Procedăm analog. Din faptul că $M/N$ este factor direct, rezultă că există $v : M/N \longrightarrow M$, astfel încât $pv = 1_{M/N}$. Considerăm suma directă $(u_1, u_2; N\coprod(M/N))$ şi aplicăm definiţia

$$\begin{tikzcd}
& N \arrow[dl, "u_1"'] \arrow[dr, "u"] & \\
N\coprod(M/N) \arrow[rr, dashed, "\exists! f_1"] & & \mathrm{M} \\
& M/N \arrow[ul, "u_2"] \arrow[ur, "v"'] &
\end{tikzcd}$$

Rezultă că $\exists! f_1$, astfel încât $f_1u_1 = u$ şi $f_1u_2 = v$. Obţinem comutativitatea primului pătrat.

Considerăm diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "u_1"] \arrow[d, "1_N"'] & N\coprod(M/N) \arrow[r, shift left, "p_2"] \arrow[d, dashed, "f_1"] & M/N \arrow[r] \arrow[l, dashed, shift left, "u_2"] \arrow[d, "1_{M/N}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "u"] & M \arrow[r, "p"] & M/N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{D$'$}$$

Să verificăm comutativitatea pătratelor diagramei (D$'$). Din $f_1u_2 = v$ rezultă$(pf_1)u_2 = pv = 1_{M/N}$ şi $(pf_1)u_1 = pu = 0$. Întrucât $N\coprod(M/N)$ este sumă directă, rezultă că există şi este unic

$p_2 : N\coprod(M/N)\longrightarrow M/N$, încât $p_2u_2 = 1_{M/N}$ şi $p_2u_1 = 0$. Dar şi $pf_1$ satisface aceste egalităţi, deci $pf_1 = p_2$, adică am obţinut comutativitatea celui de al doilea pătrat din (D). Aşadar, $f_1$ este izo. Considerăm $f = f_1^{-1}$.

$3 \Longrightarrow 2$. Să arătăm că există $v : M/N\longrightarrow M$, încât $pv = 1_{M/N}$. Considerăm $v = f_1u_2$. Avem $pv = (pf_1)u_2 = p_2u_2 = 1_{M/N}$. $\square$

# 8 Curs 7 - Module libere

Fie ${}_RM$ un modul şi $X \subseteq M$. Notăm cu

$$\overline{X} = \left\{ \sum_{x \in X} r_x x \mid r_x \in R,\ x \in X,\ r_x{=}0 \text{ cu excepţia unui număr finit de elemente} \right\}.$$

Atunci $\overline{X}$ este submodul al lui $M$.

**Definiţia .26** $\overline{X}$ se numeşte *submodulul generat de* $X$.

Putem scrie

$$\overline{X} = \sum_{x \in X} Rx.$$

Dacă $X$ este finită, atunci $\overline{X}$ este submodul finit generat.
Dacă $\overline{X} = M$, atunci $X$ este un sistem de generatori pentru $M$.
Avem $X = \{x_1, ..., x_n\}$, de unde $\overline{X} = \sum_{i \in I}^{n} Rx_i$.

**Definiţia .27** Submulţimea $X \subseteq M$ se numeşte *liniar independentă* peste $R$ dacă

$$\sum_{x \in X} r_x x = 0 \Rightarrow r_x = 0, \forall x \in X.$$

**Definiţia .28** $X \subseteq M$ se numeşte *bază* pentru $M$ dacă $X$ este mulţime de generatori şi $X$ este liniar independentă.

**Definiţia .29** $M$ se numeşte *modul liber* dacă admite o bază.

Dacă $M$ este liber cu baza $X$, atunci scrierea unui element din $M$ sub forma $\sum_{x \in X} r_x \cdot x$ este unică.
Notăm $M = \sum_{x \in X} \oplus Rx$.

**Exemple.** ${}_RR$ este modul liber cu baza $X = \{1_R\}$.
${}_KL$ spaţiu liniar este un modul liber.

**Teorema .16** *Dacă $X$ este o mulţime oarecare şi $R$ este inel cu $1 \neq 0$, atunci există un $R$-modul liber cu baza $X$.*

**Demonstraţie.** Fie

$$L = \left\{ \sum_{x \in X} r_x x \mid r_x \in R,\ r_x = 0 \text{ cu excepţia unui număr finit de indici} \right\}.$$

Definim

$$" + " \quad : \quad \sum_{x\in X} r_x x + \sum_{x\in X} r'_x x = \sum_{x\in X} (r_x + r'_x)x$$

$$" \cdot " \quad : \quad r\left(\sum_{x\in X} r_x x\right) = \sum_{x\in X} (rr_x)x.$$

Atunci $(L, +, \cdot)$ este un $R$-modul, cu baza $X$. $\square$

Fie ${}_RM$ un modul.

**Teorema .17** *$M$ este modul liber cu baza $X$ dacă şi numai dacă*

$$M \xrightarrow{\sim} \coprod_{x\in X} R_x,$$

*unde $R_x = R$, $\forall x \in X$.*

**Demonstraţie.** '$\Longrightarrow$" Fie $g_x : R_x \longrightarrow M$, $g_x(r_x) = r_x x$ pentru orice $x \in X$.

Familia $\{g_x\}_{x\in X}$ induce un morfism unic $g : \coprod\limits_{x\in X} R_x \longrightarrow M$,

$$g(\{r_x\}_{x\in X}) = \sum_{x\in X} g_x(r_x) = \sum_{x\in X} r_x x.$$

Avem diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & R_x \arrow[dl, "i"'] \arrow[dr, "g_x"] & \\
\coprod\limits_{x\in X} R_x \arrow[rr, dashed, "g"'] & & M
\end{tikzcd}$$

Definim acum

$$g' : M \longrightarrow \coprod_{x\in X} R_x, \quad g'\left(\bar{x} = \sum_{x\in X} r_x x\right) = \{r_x\}_{x\in X}.$$

Se verifică faptul că $gg' = 1_M$, $g'g = 1_{\coprod\limits_{x\in X} R_x}$. Deci

$$M \xrightarrow{\sim} \coprod_{x\in X} R_x.$$

"$\Longleftarrow$" Avem $M \xrightarrow{\sim} \coprod\limits_{x\in X} R_x$ cu $X \subset M$ şi cum $\coprod\limits_{x\in X} R_x$ este un modul liber cu baza $\{1_{R_x}\}_{x\in X}$

rezultă că $M$ este modul liber cu baza $X$. $\square$

**Teorema .18** *Fie $L$ un modul liber cu baza $X$ şi $M$ un modul, iar $f : X \longrightarrow M$ o funcţie. Atunci există un unic morfism de module $\bar{f} : L \longrightarrow M$ care extinde $f$.*

**Demonstraţie.** Definim $\bar{f} : L \longrightarrow M$, $\bar{f}\left(\sum_{x\in X} r_x x\right) = \sum_{x\in X} r_x f(x)$.

Unicitatea lui $\bar{f}$: presupunem că există morfismul $\bar{f_1} : L \longrightarrow M$, încât $\bar{f_1}(x) = f(x) = \bar{f}(x)$, $\forall x \in X$. Rezultă atunci că $\bar{f_1} = \bar{f}$. $\square$

**Teorema .19** *Orice modul este un modul cât al unui anumit modul liber.*

**Demonstraţie.** Pentru orice modul $M$, există un modul liber $L$ şi un epimorfism $p : L \longrightarrow M$. Fie $X$ o mulţime de generatori pentru $M$ şi fie $L$ modulul liber de bază $X$ şi considerăm aplicaţia

$$f : X \longrightarrow M, \quad f(x) = x.$$

În baza teoremei anterioare, există

$$\bar{f} = p : L \longrightarrow M, \quad p\left(\sum_{x\in X} r_x x\right) = \sum_{x\in X} r_x x.$$

$p$ este un epimorfism. Conform primei teoreme de izomorfism, avem

$$L/\operatorname{Ker} p \simeq M. \qquad \square$$

**Teorema .20** *Dacă $f$ este epimorfism, iar $f : M \longrightarrow N$, $g : L \longrightarrow N$ sunt morfisme de module, unde $L$ este un modul liber, atunci există un morfism (nu unic) $h : L \longrightarrow M$, aşa încât $fh = g$.*

**Demonstraţie.** Considerăm diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & L \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "g"] & \\
M \arrow[r, "f"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Fie $X$ o bază petru modulul liber $L$. Definim o aplicaţie de la $X$ la $M$. Fie $f' : X \longrightarrow M$, aşa încât$f'(x) = m_x \in M$ cu $f(m_x) = g(x)$. Observăm că $f'$ nu este unic, pentru că $g(x)$ poate avea mai multe contraimagini.

$f'$ se poate extinde unic la $h$, care verifică egalitatea $fh = g$. $\square$

# 9 Curs 8 - Module proiective

**Definiţia .30** Un modul ${}_R P$ se numeşte *proiectiv* dacă pentru orice epimorfism $f : M \longrightarrow N$ şi orice morfism $g : P \longrightarrow N$ există un morfism $h : P \longrightarrow M$, astfel încât

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "g"] & \\ M \arrow[r, "f"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \qquad fh = g.$$

Să observăm că $h$ nu este unic.

Remarcăm că orice modul liber este proiectiv, invers nu!

**Teorema .21** *Dacă* $\{P_i\}_{i\in I}$ *este o familie de module, atunci* $\coprod_{i\in I} P_i$ *este proiectiv dacă şi numai dacă* $P_i$ *este proiectiv pentru orice* $i \in I$.

**Demonstraţie.** "$\Longrightarrow$" Fie $u_i : P_i \longrightarrow \coprod\limits_{i\in I} P_i$ injecţiile canonice.

Considerăm diagrama

$$\begin{tikzcd} & \coprod\limits_{i\in I} P_i \arrow[ddl, dashed, "\exists h"'] \arrow[d, shift left, "p_i"] & \\ & P_i \arrow[u, dashed, shift left, "u_i"] \arrow[dl, dashed, "h_i"] \arrow[d, "g_i"] & \\ M \arrow[r, "f"] & N \arrow[r] & 0, \quad \forall i \in I. \end{tikzcd}$$

$\coprod\limits_{i\in I} P_i$ este o sumă directă, deci $\exists p_i : \coprod\limits_{i\in I} P_i \longrightarrow P_i$, $i \in I$, astfel încât $p_i u_i = 1_{P_i}$ şi $p_i u_j = 0$, pentru $j \neq i$.

Există morfismul $h : \coprod\limits_{i\in I} P_i \longrightarrow M$, aşa încât$fh = g_i p_i$. Definim $h_i = hu_i$. Se verifică $fh_i = g_i$.

"$\Longleftarrow$" Fie diagrama

$$\begin{tikzcd}
& P_i \arrow[d, "u_i"] \arrow[ddl, dashed, "h_i"'] & \\
& \coprod P_i \arrow[d, "g"] \arrow[dl, dashed, "h"] & \\
M \arrow[r, "f"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Există morfismul $h_i : P_i \longrightarrow M$, aşa încât$fh_i = gu_i$. Morfismul $h$ apare de la proprietatea sumei directe. Avem $hu_i = h_i$ şi atunci $fh = g$ din $fhu_i = gu_i$, $\forall i \in I$, şi din faptul că $\{u_i\}_{i\in I}$ este o familie epimorfică.

Ultimul pas îl mai putem justifica astfel:

$$\begin{tikzcd}
& P_i \arrow[dl, "u_i"'] \arrow[dr, "gu_i=fhu_i"] & \\
\coprod\limits_{i\in I} P_i \arrow[rr, shift left, "fh"] \arrow[rr, shift right, dashed, "g"'] & & N
\end{tikzcd}$$

Din definiţia sumei directe, $fh = g$. $\square$

**Exemplu.** Fie $(m, n) = 1$ şi considerăm modulele ${}_{\mathbb{Z}_{nm}}\mathbb{Z}_n$, ${}_{\mathbb{Z}_{nm}}\mathbb{Z}_m$, ${}_{\mathbb{Z}_{nm}}\mathbb{Z}_{nn}$. Din $(m, n) = 1$ rezultă $\mathbb{Z}_{nm} \simeq \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$. Modulul ${}_{\mathbb{Z}_{nm}}\mathbb{Z}_{nm}$ este liber, deci proiectiv. Conform teoremei precedente, rezultă că ${}_{\mathbb{Z}_{nm}}\mathbb{Z}_n$ şi ${}_{\mathbb{Z}_{nm}}\mathbb{Z}_m$ sunt proiective. Pe de altă parte, ${}_{\mathbb{Z}_{nm}}\mathbb{Z}_n$ nu este liber, deoarece $\forall \hat{x} \in \mathbb{Z}_n$, $\hat{n}\hat{x} = \hat{0}$, dar $\hat{n} \neq \hat{0}$, $\hat{n} \in \mathbb{Z}_{nm}$. Deci nu este satisfăcută condiţia de liniară independenţă pentru $\forall \hat{x} \in \mathbb{Z}_n$.

**Teorema .22** (de caracterizare pentru module proiective) *Fie ${}_RP$ un modul. Următoarele condiţii sunt echivalente:*

1. *$P$ este modul proiectiv.*
2. *Pentru orice şir exact $M \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$, şirul indus de grupuri abeliene*

$$\mathrm{Hom}_R(P, M) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_R(P, N) \longrightarrow 0$$

*este exact, unde* $f_*(g) = fg$.

3. *Pentru orice epimorfism* $p : M \longrightarrow P$, $P$ *este factor direct al lui* $M$.

4. $P$ *este sumand direct al unui anumit modul liber.*

**Demonstraţie.** $1 \Longrightarrow 2$. Avem

$$\mathrm{Hom}_R(P, M) = \{g : P \longrightarrow M \mid g \text{ morfism}\}$$
$$(g + g')(x) = g(x) + g'(x)$$

$(\mathrm{Hom}_R(P, M), +)$ este un grup abelian.

În continuare, folosim definiţia modulului proiectiv.

$2 \Longrightarrow 3$. Considerăm şirul exact

$$M \xrightarrow{p} P \longrightarrow 0$$

Conform cu 2, următorul şir este exact

$$\mathrm{Hom}_R(P, M) \xrightarrow{p_*} \mathrm{Hom}_R(P, P) \longrightarrow 0$$

Pentru $1_P : P \longrightarrow P$ există $v : P \longrightarrow M$, aşa încât $p_*(v) = 1_P$, adică $pv = 1_P$. Cu alte cuvinte, $P$ este factor direct al lui $M$.

$3 \Longrightarrow 4$. Pentru $P$ există un modul liber $L$ şi $p : L \longrightarrow P$ epimorfism. Conform cu 3, $P$ este factor direct al lui $L$. Avem $L \simeq \mathrm{Ker}\, p \oplus (L/\mathrm{Ker}\, p) \simeq \mathrm{Ker}\, p \oplus P$.

$4 \Longrightarrow 1$. Pentru $P$ există un modul liber $L$ şi $Q$ submodul al lui $L$ încât $L = P \coprod Q$. $L$ este proiectiv, fiind liber, deci şi $P$ este proiectiv. $\square$

## 10 Seminarii 2-8

**1.** *Fie* $f :_R M \longrightarrow _R M$ *un morfism de module, aşa încât* $f^2 = f$. *Atunci* $M = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$.

**Soluţie.** Pentru orice $x \in M$ avem $x = x - f(x) + f(x)$. Avem că $x - f(x) \in \ker f$. Dacă $u \in \ker f \cap \operatorname{Im} f$, atunci $f(u) = 0$ şi $u = f(a)$, pentru $a \in M$. Obţinem $f(a) = 0$, deci $u = 0$. Obţinem $M = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$.

**2.** *Fie* $M = M_1 \oplus M_2$. *Atunci există morfismul* $f : M \longrightarrow M$, *încât* $f^2 = f$ *şi* $M_1 = \ker f$, $M_2 = \operatorname{Im} f$.

**Soluţie.** Pentru orice $x \in M$, avem scrierea unică $x = x_1 + x_2$ cu $x_1 \in M_1$, $x_2 \in M_2$. Considerăm $f(x) = x_2$. $f$ satisface condiţiile din enunţ.

**3.** *Arătaţi că* $\operatorname{Hom}_R(R, M) \simeq M$.

**Soluţie.** Avem $\operatorname{Hom}_R(R, M) = \{f : R \longrightarrow M \mid f \text{ morfism de module}\}$.

$$(f + g)(r) = f(r) + g(r).$$

Considerăm

$$\varphi : \operatorname{Hom}(R, M) \longrightarrow M$$
$$\varphi(f) = f(1) \in M$$

$\varphi$ este surjectivă: $\forall x \in M$ considerăm

$$f : R \longrightarrow M, \quad f(r) = rx.$$

$f$ este morfism de module şi $\varphi(f) = x$.
$\varphi$ este injectivă. Într-adevăr, dacă $\varphi(f) = \varphi(g)$, adică $f(1) = g(1)$, atunci

$$f(r) = rf(1) = rg(1) = g(r).$$

Deci $\varphi$ este izomorfism.

**Exemplu:** $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_n) \simeq \mathbb{Z}_n$.

**4.** *Arătaţi că* $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}) = 0$.

**Soluţie.** Fie $f : \mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{Z}$, $f(\hat{0}) = 0$, $f(\hat{k}) = f(k \cdot \hat{1}) = kf(\hat{1})$. Avem $f(\hat{0}) = f(\hat{n}) = 0$ şi $f(\hat{n}) = nf(\hat{1})$. Rezultă că $nf(\hat{1}) = 0$ în $\mathbb{Z}$, deci $f(\hat{1}) = 0$, adică $f = 0$.

**5.** *Fie* $(m, n) = 1$, $m, n \geq 2$. *Atunci* $\mathbb{Z}_{m,n} \simeq \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$.

**Soluţie.** Considerăm
$$f : \mathbb{Z}_{nm} \longrightarrow \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$$
$$f(\hat{x}) = (\bar{x}, \bar{\bar{x}})$$
Se verifică faptul că $f$ este izomorfism.

**Observaţia .10** Dacă $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$, atunci
$$\mathbb{Z}_n \simeq \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \times \mathbb{Z}_{p_2^{\alpha_2}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_k^{\alpha_k}}.$$

**6.** $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n) = \mathbb{Z}_d$ *cu* $d = (m, n)$.

**Soluţie.** Fie $A = \{\hat{a} \in \mathbb{Z}_n \mid m\hat{a} = \hat{0}\}$, $m\hat{a} = \hat{0} \Longleftrightarrow n|ma$. Avem $m = dm_1$, $n = dn_1$ cu $(m_1, n_1) = 1$. Din $n|ma$ obţinem $n_1|m_1 a$, deci $a \in (n_1) = \left(\frac{n}{d}\right)$. Rezultă că $A = \left(\frac{\hat{n}}{d}\right) \simeq \mathbb{Z}_d$. Definim
$$\varphi : \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n) \longrightarrow \mathbb{Z}_d = A, \quad \varphi(f) = f(\hat{1}).$$
Avem
$$mf(\hat{1}) = f(\hat{m}) = f(\hat{0}) = \hat{0},$$
deci $f(\hat{1}) \in A \simeq \mathbb{Z}_d$. Mai mult, $\varphi$ este izomorfism.

**7.** *Fie* $_RM$ *un* $R$*-modul. Arătaţi că următoarele afirmaţii sunt echivalente.*

$1^\circ$. $M = 0$.

$2^\circ$. $|\mathrm{Hom}_R(M, N)| = 1$, *pentru orice modul* $_RN$.

$3^\circ$. $|\mathrm{Hom}_R(M, N)| = 1$, *oricare ar fi modulul* $_RN$.

**Soluţie.** $1^\circ \Longrightarrow 2^\circ$ Fie $f \in \mathrm{Hom}_R(0, N)$. Avem $f(0) = 0$, adică $f = 0$. Rezultă că $\mathrm{Hom}_R(0, N) = \{0\}$, deci $|\mathrm{Hom}_R(0, N)| = 1$.

$2^\circ \Longrightarrow 1^\circ$ Pentru $N = M$ avem morfismele 0 şi $1_M$ din $\mathrm{Hom}_R(M, N)$. Conform ipotezei, rezultă că $1_M = 0$, deci $x = 1_M(x) = 0$, $\forall x \in M$, adică $M = 0$.

$1^\circ \Longrightarrow 3^\circ$ Similar ca $1^\circ \Longrightarrow 2^\circ$.

**8.** *Fie* $n$ *un număr natural* $n \geq 2$. *Arătaţi că următoarele afirmaţii sunt echivalente.*

$1^\circ$. *$n$ este prim.*

$2^\circ$. *Orice morfism nenul* $f : \mathbb{Z}_n \longrightarrow G$ *de* $\mathbb{Z}$*-module este monomorfism.*

$3^\circ$. *Orice morfism nenul* $g : G \longrightarrow \mathbb{Z}_n$ *de* $\mathbb{Z}$*-module este epimorfism.*

**Soluţie.** Amintim că $\mathbb{Z}$-modulele sunt grupurile abeliene.

$1^\circ \Longrightarrow 2^\circ$ Din $f \neq 0$, rezultă că $\ker f \neq \mathbb{Z}_n$. Pe de altă parte, $|\ker f| \mid n$, care este prim (teorema lui Lagrange), deci $|\ker f| = 1$, adică avem $\ker f = 0$. Deci $f$ este monomorfism.

$2^\circ \Longrightarrow 3^\circ$ Considerăm şirul

$$G \xrightarrow{g} \mathbb{Z}_n \xrightarrow{p} \mathbb{Z}_n/\operatorname{Im} g$$

unde $p$ este proiecţia canonică.

Dacă $p = 0$, atunci $\operatorname{Im} g = \mathbb{Z}_n$, adică $g$ este un epimorfism.

Dacă $p \neq 0$, atunci din $2^\circ$ rezultă că $p$ este un monomorfism. Deci $\ker p = \operatorname{Im} g = 0$, adică $g = 0$, contradicţie. Deci $g$ este un epimorfism.

$3^\circ \Longrightarrow 1^\circ$ Presupunem prin absurd că $n$ nu este prim. Rezultă că $\exists m|n$, $m \neq 1$, $m \neq n$. Fie $G = \hat{m}\mathbb{Z}_n$ şi fie $g : G \longrightarrow \mathbb{Z}_n$ morfismul incluziune. Din $g \neq 0$ rezultă din $3^\circ$ că $g$ este un epimorfism, contradicţie. Deci $n$ este prim.

**9.** *Orice grup abelian cu n elemente poate fi înzestrat cu o structură de $\mathbb{Z}_n$-modul.*

**Soluţie.** Fie $(G, +)$ un grup abelian cu $|G| = n$. Definim

$$\varphi : \mathbb{Z}_n \times G \longrightarrow G,$$
$$\varphi(\hat{a}, x) = ax$$

$\varphi$ este bine definit. Într-adevăr, dacă $\hat{a}_1 = \hat{a}_2$, atunci $n|(a_1 - a_2)$, adică $a_1 - a_2 = nk$, $k \in \mathbb{N}$. Avem $a_1x - a_2x = nkx = 0$, deci $a_1x = a_2x$. Sunt satisfăcute condiţiile din definiţia unui $\mathbb{Z}_n$-modul.

**10.** *Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, următorul şir este exact*

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \xrightarrow{g} \mathbb{Z}_n \longrightarrow 0$$

*cu $f(x) = nx$ şi $g(x) = \bar{x}$.*

**Soluţie.** Se verifică faptul că $f$ este monomorfism, $g$ este epimorfism şi $\ker g = \operatorname{Im} g = n\mathbb{Z}$.

**11.** *$\mathbb{Z}$-modulul $\mathbb{Z}_n$ nu este liber.*

**Soluţie.** Pentru orice $\hat{x}$ din $\mathbb{Z}_n$, $n\hat{x} = \hat{0}$, deci orice submulţime a lui $\mathbb{Z}_n$ este liniar dependentă. Aşadar, $\mathbb{Z}_n$ nu este liber.

12. *Fie $M_R$ un $R$-modul aşa încât există $x_1 \in M$ încât $x_1a = 0 \Longrightarrow a = 0$, unde $a \in R$. Considerăm funcţia $f_a : M \longrightarrow M$, $f_a(x) = xa$. Să se arate că următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. $f_a$ *este morfism de module.*
2. $a \in Z(R)$.

**Soluţie.** $1 \Longrightarrow 2$ Pentru orice $b, c \in R$ şi $y, z \in M$, avem

$$f_a(yb + zc) = f_a(y)b + f_a(z)c,$$

adică $(yb + zc)a = (ya)b + (za)c$. Considerăm $y = x_1$ şi $z = 0$ şi obţinem

$$x_1 ba = x_1 ab$$

şi, conform ipotezei, $ba = ab$, $\forall b \in R$, adică $a \in Z(R)$.

$2 \Longrightarrow 1$ Imediată.

**13.** *Fie $R$ un inel unitar, $I$ un ideal al său şi $M$ un $R$-modul. Fie*

$$IM = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \mid n \in \mathbb{N}^*,\ a_i \in I, x_i \in M, \forall i = \overline{1, m} \right\}.$$

*Atunci*

1. $IM$ *este $R$-submodul al lui $M$.*
2. $(R/I) \otimes_R M \simeq M/IM$.

**Soluţie.** 1. Se verifică definiţia unui $R$-modul.

2. Fie $f : (R/I) \times M \longrightarrow (R/I) \otimes_R M$ aplicaţia canonică a produsului tensorial. Definim $g : (R/I) \times M \longrightarrow M/IM$, $g(a + I, x) = ax + IM$, $\forall a \in R$, $\forall x \in M$.

$g$ este bine definită şi balansată.

Considerăm diagrama

$$\begin{tikzcd}
(R/I) \times M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & (R/I) \otimes_R M \arrow[dl, dashed, "\exists! \varphi"] \\
& M/IM &
\end{tikzcd}$$

$\varphi f = g$, deci

$$\varphi((a + I) \otimes x) = ax + IM, \quad \forall a \in R,\ \forall x \in M.$$

Construim acum inversa lui $\varphi$. Fie

$$\psi : M/IM \longrightarrow (R/I) \otimes_R M,$$
$$\psi(x + IM) = (1 + I) \otimes x, \ \forall x \in M.$$

Se verifică faptul că $\psi$ este bine definită şi mai mult este morfism de module.

Verificăm că $\psi\varphi = 1_{(R/I)\otimes_R M}$. Avem

$$(\psi\varphi)((a + I) \otimes x) = \psi(ax + IM) = (1 + I) \otimes ax = a(1 + I) \otimes x = (a + I) \otimes x.$$

Pe de altă parte,

$$(\varphi\psi)(x + IM) = \varphi((1 + I) \otimes x) = x + IM,$$

deci $\varphi\psi = 1_{M/IM}$. Aşadar, are loc izomorfismul

$$(R/I) \otimes_R M \simeq M/IM.$$

**14.** *Are loc izomorfismul de grupuri abeliene $\mathbb{Z}_n \otimes_{\mathbb{Z}} G \simeq G/n\mathbb{Z}$.*

**Soluţie.** Considerăm în problema precedentă $R = \mathbb{Z},\ I = n\mathbb{Z}$ şi $M = G$.

**15.** *Fie $R$ un inel comutativ unitar şi fie $I$ şi $J$ ideale ale lui $R$. Să se arate că are loc izomorfismul de $R$-module*

$$(R/I) \otimes_R (R/J) \simeq R/(I + J).$$

**Soluţie.** Considerăm în problema precedentă $M = R/J$. Obţinem $(R/I) \otimes R/J \simeq (R/J)/I(R/J)$. Pe de altă parte, $I(R/J) \simeq (I + J)/J$ şi, conform teoremei a treia de izomorfism la inele, obţinem

$$(R/I) \otimes_R (R/J) \simeq R/(I + J).$$

**Cazuri particulare:**

a. $R = \mathbb{Z},\ I = m\mathbb{Z},\ J = n\mathbb{Z}$.

   Obţinem $\mathbb{Z}_m \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n \simeq \mathbb{Z}/(m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} = \mathbb{Z}d,$ cu $d = (m, n)$.

b. $R = Z,\ I = m\mathbb{Z},\ J = n\mathbb{Z}$ cu $(m, n) = 1$.

   Obţinem $\mathbb{Z}_m \otimes \mathbb{Z}_n = 0$.

c. $R = \mathbb{Z},\ I = J = \mathbb{Z}_n$.

   Obţinem $\mathbb{Z}_n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n \simeq \mathbb{Z}_n$.

**16.** *Fie K corpul de fracţii al unui domeniu de integritate R. Atunci*

$$K \otimes_R K \simeq K.$$

**Soluţie.** Considerăm diagrama

$$\begin{tikzcd} K \times K \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & K \otimes_R K \arrow[dl, dashed, "\exists! h"] \\ & K & \end{tikzcd}$$

unde $f$ este aplicaţia canonică şi $g(k_1, k_2) = k_1 \cdot k_2$.

$g$ este $R$-balansată, deci $\exists! h : K \otimes_R K \longrightarrow K$

$h(k_1 \otimes k_2) = k_1 k_2$

Definim $h' : K \longrightarrow K \otimes_k K$, $h'(k) = 1 \otimes k$. Avem $hh' = 1_K$ şi $h'h = 1_{K \otimes_R K}$. Aşadar, $K \otimes_R K \simeq K$.

În particular, $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \simeq \mathbb{Q}$.

# 11 Cursuri şi seminarii 9,10 - Algebre universale şi morfisme. Algebre factor

Algebrele universale au fost introduse în 1933 de Birkhoff.

**Definiţie 11.1** *Fie $A$ o mulţime, $n \in \mathbb{N}$. $\omega : A^n \to A$ se numeşte* ***operaţie*** *$n-$**ară** în $A$, iar $n$ este tipul (aritatea) lui $\omega$). Dacă $\omega : B \subsetneq A^n \to A$, atunci $\omega$ este* ***operaţie*** *$n-$**ară parţială** în $A$.*

**Exemplu 11.1** *1.* ***Operaţie nulară:*** *$\omega : A^\circ = \{\emptyset\} \to A$,*

*$\omega$ este determinat de $\omega(\emptyset) \in A$.*

*De exemplu, $1, 0$ sunt operaţii nulare în $\mathbb{R}$.*

*2.* ***Operaţie unară:*** *$\omega : A \to A$.*

*De exemplu,*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x;$$

*este operaţie unară, iar*

$$g : \mathbb{R} \backslash \{0\} \to \mathbb{R}, g(x) = x^{-1}$$

*este operaţie unară parţială.*

*3.* ***Operaţie binară:*** *$\omega : A^2 \to A$.*

*De exemplu, $+, \cdot$ sunt operaţii binare, iar $:$ este o operaţie binară parţială în $\mathbb{R}$.*

Unei operaţii $n-$are $\omega$, i se asociază o relaţie $(n+1)-$ară:

$$\left\{(a_1, \ldots, a_n, \omega(a_1, \ldots, a_n)) \in A^{n+1} \mid \forall i, a_i \in A\right\}.$$

**Definiţie 11.2** *Fie $A$ o mulţime suport şi $\Omega$ o mulţime de operaţii în $A$. Atunci $(A, \Omega)$ se numeşte* ***algebră universală****.*

*Dacă $\Omega$ conţine şi operaţii parţiale, atunci $(A, \Omega)$ este o* ***algebră universală parţială****.*

**Observaţie 11.1** *Mulţimile sunt algebre universale cu $\Omega = \emptyset$.*

**Tipul algebrei.**

Fie $(A, \Omega)$ o algebră universală, $\tau : \Omega \to \mathbb{N}$ se numeşte *tipul algebrei*, unde $\tau(\omega)$ este tipul lui $\omega$.

**Exemple de algebre universale:** $(\mathcal{P}(M), \cup, \cap, C)$, grupoizi, inele, module.

**Definiţie 11.3** *Spunem că* $(A, \Omega)$ *este* ***similară*** *cu* $(A', \Omega')$, *dacă* $\exists \theta : \Omega \to \Omega'$ *operaţie de similaritate, astfel încât diagrama*

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[rr] \arrow[dr, "\tau"] & & \Omega' \arrow[dl, "\tau'"] \\ & \mathbb{N} & \end{tikzcd}$$

*este diagramă comutativă, adică* $\tau'\theta = \tau$.

Relaţia de similaritate este o preordine. Dacă $\theta$ este surjectivă, atunci $\forall \omega \in \Omega$, $\omega$ şi $\theta(\omega)$ au acelaşi tip.

**Subalgebră**

**Definiţie 11.4** *Fie* $(A, \Omega)$ *o algebră universală de tipul* $\tau$. $B \subseteq A$ *se numeşte* ***subalgebră*** *a algebrei* $(A, \Omega)$ *dacă:*

$$\forall \omega \in \Omega, \forall \left(a_1, \ldots, a_{\tau(\omega)}\right) \in B^{\tau(\omega)}, \omega\left(a_1, \ldots, a_{\tau(\omega)}\right) \in B.$$

**Notaţie.** $B \leq A$.

Fie $S(A, \Omega)$ mulţimea subalgebrelor algebrei $(A, \Omega)$.

Avem $\emptyset \in S(A, \Omega)$, doar dacă $\Omega$ nu are operaţie nulară, altfel constantele ar trebui să aparţină lui $\emptyset$.

Avem $A \in S(A, \Omega)$.

**Exemplu 11.2**

1. *Fie* $N \subseteq M$. *Atunci* $\mathcal{P}(N)$ *este subalgebră a lui* $(\mathcal{P}(M), \cup, \cap)$.

   $\mathcal{P}(N)$ *nu este subalgebră a lui* $(\mathcal{P}(M), \cup, \cap, C)$.

2. *Fie* $(\mathcal{F}(M), \circ)$ *algebra universală a funcţiilor de la* $M$ *la* $M$. *Mulţimea aplicaţiilor surjective, injective, respectiv bijective, sunt subalgebre ale lui* $(\mathcal{F}(M), \circ)$.

**Produs direct de algebre universale**

Produsul direct de algebre universale se face pe componente.

Fie $(A_1, \Omega), (A_2, \Omega)$ algebre universale de tipul $\tau$.

Definim pe $A_1 \times A_2$ operaţiile:

$$\omega\left(\left(a_1^1, a_1^2\right), \ldots, \left(a_{\tau(\omega)}^1, a_{\tau(\omega)}^2\right)\right) = \left(\omega\left(a_1^1, \ldots, a_{\tau(\omega)}^1\right), \omega\left(a_1^2, \ldots, a_{\tau(\omega)}^2\right)\right) \tag{**}$$

Rezultă că pentru $i = 1, 2$, $p_i : A_1 \times A_2 \to A_i$ este morfism surjectiv.

Într-adevăr, verificăm pentru $i = 1$

$$p_1\left(\omega\left(\left(a_1^1,a_1^2\right),\ldots,\left(a_{\tau(\omega)}^1,a_{\tau(\omega)}^2\right)\right)\right)\overset{(**)}{=}$$
$$=p_1\left(\omega\left(a_1^1,\ldots,a_{\tau(\omega)}^1\right),\omega\left(a_1^2,\ldots,a_{\tau(\omega)}^2\right)\right)=$$
$$=\omega\left(a_1^1,\ldots,a_{\tau(\omega)}^1\right)=\omega\left(p_1\left(a_1^1,a_1^2\right),\ldots,p_1\left(a_{\tau(\omega)}^1,a_{\tau(\omega)}^2\right)\right).$$

**Generalizare**

Fie $\{(A_i,\Omega)\}_{i\in I}$ o familie de $\Omega-$algebre şi fie produsul cartezian $\prod\limits_{i\in I} A_i$.
Definim pe $\prod\limits_{i\in I} A_i$ o structură de $\Omega-$algebră astfel:

$$\omega\left(\left(a_1^i\right)_{i\in I},\ldots,\left(a_{\tau(\omega)}^i\right)_{i\in I}\right)=\left(\omega\left(a_1^i,\ldots,a_{\tau(\omega)}^i\right)\right)_{i\in I}$$
$p_j : \prod\limits_{i\in I} A_i \to A_j$ morfism surjectiv cu
$p_j\left((a_i)_{i\in I}\right) = a_j, \forall j \in I.$

**Definiţie 11.5** *Spunem că* $\left(\prod\limits_{i\in I} A_i,\Omega\right)$ *este* ***produs direct*** *al familiei de algebre universale* $\{(A_i,\Omega)\}_{i\in I}$.

Propunem următorul

**Exerciţiu.** Să se evidenţieze proprietatea de universalitate a produsului direct.

**Exemple de algebre universale**

- Grupoizi, semigrupoizi: au operaţii binare.
- Grupurile: $\begin{cases}\text{o operaţie nulară } 1;\\ \text{o operaţie unară } x\to x^{-1};\\ \text{o operaţie binară, notata uzual cu } \cdot\ .\end{cases}$
- Quasigrupurile: grupoizi în care ecuaţiiile $xa = b$, $ay = b$ au soluţii unice, $\forall a, b$.
- Loop: quasigrup cu element neutru.
- Inele.
- Module peste inele:

$$\begin{cases}(M,+)\ \text{grup abelian;}\\ \forall a\in R,\quad \begin{array}{c}\omega_a : M\to M\\ x\rightsquigarrow ax\end{array}\quad \text{operaţie unară}\\ \omega_a\ \text{endomorfism şi}\ \begin{cases}\omega_{ab}=\omega_a\omega_b\\ \omega_{a+b}=\omega_a+\omega_b\end{cases},\ \forall a,b\in R.\end{cases}$$

- $A$ algebră $K-$liniară dacă:

$$\begin{cases} A \text{ inel} \\ {}_K A \text{ modul cu unitate, încât} \\ (ab)\,\alpha = (a\alpha)\,b = a\,(\alpha b)\,,\ \forall a, b \in A \end{cases}$$

- Mulţimile: $\emptyset-$algebre.

- Mulţimea numerelor naturale poate fi văzută ca o algebră universală, pentru care $\Omega = \{0, *\}$, unde $*$ este operaţia unară de succesiune.

- Laticile: algebre cu două operaţii binare. O latice completă implică operaţii infinite, deci nu este o algebră în sensul dat.

- Câmpurile: algebre parţiale $\_^{-1} : K \backslash \{0\} \to K$. Ar putea deveni algebre, dacă vom considera $\theta : K \to K$ operaţie unară, $\theta(k) = \begin{cases} k^{-1}, & k \neq 0 \\ 0, & k = 0. \end{cases}$ Atunci ecuaţia $\theta(x)\,x = 1$ are soluţie doar pentru $x \neq 0$.

**$\theta-$morfisme**

**Definiţie 11.6** *Fie $(A, \Omega)$ o algebră universală $\theta-$similară cu $(A', \Omega')$ şi $f : A \to A'$.*

*$f$ se numeşte $\theta-$morfism dacă $\forall \omega \in \Omega$, $\forall \left(a_1, \ldots, a_{\tau(\omega)}\right) \in A^{\tau(\omega)}$*

$$f\left(\omega\left(a_1, \ldots, a_{\tau(\omega)}\right)\right) = \theta(\omega)\left(f(a_1), \ldots, f\left(a_{\tau(\omega)}\right)\right), \text{ adică} \qquad (*)$$

$$f\omega = \theta(\omega)\, f^{\tau(\omega)},\ \forall \omega \in \Omega.$$

**Observaţie 11.2** *1. Dacă $\theta-$morfismul $f$ este surjectiv, atunci $(A', \Omega')$ este o imagine $\theta-$omomorfă a lui $(A, \Omega)$.*

*2. Dacă $\theta, f$ sunt bijective, atunci $f$ este $\theta-$izomorfism şi $f^{-1}$ este $\theta^{-1}-$izomorfism. $(A, \Omega)$ şi $(A', \Omega')$ se numesc $\theta-$izomorfe.*

*3. Dacă $\omega$ este nulară, iar $a_0 \in A$ este element pus în evidenţă de $\omega$ şi $a'_0 \in A'$ este element pus în evidenţă de $\theta(\omega)$, atunci $f(a_0) = a'_0$.*

*4. Dacă $\theta : \Omega \to \Omega'$, $\theta' : \Omega \to \Omega'$ sunt aplicaţii de similaritate între $(A, \Omega)$ şi $(A', \Omega')$, atunci pot exista aplicaţii $f$ care sunt $\theta-$morfisme, dar nu sunt $\theta'-$morfisme.*

*De exemplu, $1_{\mathbb{Z}} : (\mathbb{Z}, +, \cdot) \to (\mathbb{Z}, +, \cdot)$ este $1_\Omega-$morfism, dar nu este $\theta-$morfism, unde $\theta(+) = \cdot$ şi $\theta(\cdot) = +$.*

5. *Dacă* $f : (A, \Omega) \to (A', \Omega')$ *este* $\theta-$*morfism şi* $B \leq A$, *atunci* $f/B$ *este* $\theta-$*morfism.*

6. *Dacă* $B \leq (A, \Omega)$, *atunci* $\begin{array}{c} i : B \to A \\ x \rightsquigarrow x \end{array}$ *este* $1_\Omega-$*morfism.*

În cele ce urmează, considerăm $\theta(\omega) = \omega$ şi $\Omega' = \Omega$.

**Definiţie 11.7** *Dacă* $(A, \Omega), (A', \Omega)$ *sunt algebre universale de tipul* $\tau$, *atunci* $f : A \to A'$ *este morfism dacă* $\forall \omega \in \Omega$,

$$\forall a_1, \ldots, a_{\tau(\omega)} \in A,\ f\left(\omega\left(a_1, \ldots, a_{\tau(\omega)}\right)\right) = \omega\left(f(a_1), \ldots, f\left(a_{\tau(\omega)}\right)\right).$$

**Exerciţii**

1. Fie $(A, \Omega), (B, \Omega)$ algebre universale de tipul $\tau$, $f : A \to B$ o aplicaţie. Atunci $f$ este morfism dacă şi numai dacă

   $G_f \leq (A \times B, \Omega)$, unde $G_f = \{(a, f(a)) \mid a \in A\}$.

   **Soluţie.** " $\Longrightarrow$ " Fie $(a_1, b_1), \ldots, \left(a_{\tau(\omega)}, b_{\tau(\omega)}\right) \in G_f$.

   Din $f$ morfism rezultă că

   $$f\left(\omega\left(a_1, \ldots, a_{\tau(\omega)}\right)\right) = \omega\left(f(a_1), \ldots, f\left(a_{\tau(\omega)}\right)\right) =$$

   $$= \omega\left(b_1, \ldots, b_{\tau(\omega)}\right), \text{adică}$$

   $$\left(\omega\left(a_1, \ldots, a_{\tau(\omega)}\right), \omega\left(b_1, \ldots, b_{\tau(\omega)}\right)\right) \in G_f \text{ de unde}$$

   $$G_f \leq A \times B.$$

   " $\Longleftarrow$ " Avem

   $$\left(\omega\left(a_1, \ldots, a_{\tau(\omega)}\right), \omega\left(f(a_1), \ldots, f\left(a_{\tau(\omega)}\right)\right)\right) \in G_f, \text{ de unde}$$

   $$\omega\left(f(a_1), \ldots, f\left(a_{\tau(\omega)}\right)\right) = f\left(\omega\left(a_1, \ldots, a_{\tau(\omega)}\right)\right), \text{ deci}$$

   $f$ este un morfism. ■

2. Fie $(A, \Omega), (B, \Omega), (C, \Omega)$ algebre universale de tipul $\tau$ şi fie

   $A' \leq (A, \Omega)$, $\phi \leq (A \times B, \Omega)$, $\psi \leq (B \times C, \Omega)$.

   Atunci

(a) $\phi(A') \leq (B, \Omega)$;

(b) $\phi^{-1} \leq (B \times A, \Omega)$;

(c) $\psi \circ \phi \leq (A \times C, \Omega)$.

**Soluţie.**

(a) Fie $\omega \in \Omega$, $b_i \in \phi(A')$, $\forall i = \overline{1, \tau(\omega)}$.
Rezultă că $\exists a_i \in A' : (a_i, b_i) \in \phi$ şi cum $A' \leq A$ obţinem
$\omega\left(a_1, \ldots, a_{\tau(\omega)}\right) \in A'$.
Avem şirul de implicaţii:

$$\left.\begin{array}{r} (a_i, b_i) \in \phi \\ \phi \leq A \times B \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left(\omega\left(a_1, \ldots, a_{\tau(\omega)}\right), \omega\left(b_1, \ldots, b_{\tau(\omega)}\right)\right) \in \phi \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \omega\left(b_1, \ldots, b_{\tau(\omega)}\right) \in \phi(A').$$

Deci, $\phi(A') \leq B$.

(b) Fie $\omega \in \Omega$, $(b_i, a_i) \in \phi^{-1}$, $i = \overline{1, \tau(\omega)}$ adică $(a_i, b_i) \in \phi$. Cum $\phi \leq A \times B$ rezultă

$$\left(\omega\left(a_1, \ldots, a_{\tau(\omega)}\right), \omega\left(b_1, \ldots, b_{\tau(\omega)}\right)\right) \in \phi, \text{ de unde}$$

$$\left(\omega\left(b_1, \ldots, b_{\tau(\omega)}\right), \omega\left(a_1, \ldots, a_{\tau(\omega)}\right)\right) \in \phi^{-1}.$$

Deci, $\phi^{-1} \leq (B \times A, \Omega)$.

(c) Fie $\omega \in \Omega$, $(a_i, c_i) \in \psi \circ \phi$, $i = \overline{1, \tau(\omega)}$. Rezultă că $\exists b_i$ astfel încât $(a_i, b_i) \in \phi$, $(b_i, c_i) \in \psi$ şi din $\phi \leq A \times B$,

$\psi \leq B \times C$, obţinem

$$\left.\begin{array}{l} \left(\omega\left(a_1, \ldots, a_{\tau(\omega)}\right), \omega\left(b_1, \ldots, b_{\tau(\omega)}\right)\right) \in \phi \\ \left(\omega\left(b_1, \ldots, b_{\tau(\omega)}\right), \omega\left(c_1, \ldots, c_{\tau(\omega)}\right)\right) \in \psi \end{array}\right\} \text{de unde}$$

$$\left(\omega\left(a_1, \ldots, a_{\tau(\omega)}\right), \omega\left(c_1, \ldots, c_{\tau(\omega)}\right)\right) \in \psi \circ \phi,$$

$$\text{deci } \psi \circ \phi \leq (A \times C, \Omega).$$

**Consecinţe:** Au loc implicaţiile:

i. $\left.\begin{array}{r} f : A \to B \text{ morfism} \\ (A', \Omega) \leq (A, \Omega) \end{array}\right\} \Longrightarrow f(A') \leq (B, \Omega);$

ii. $\left.\begin{array}{r} f : A \to B \text{ morfism} \\ (B', \Omega) \leq (B, \Omega) \end{array}\right\} \implies f^{-1}(B') \leq (A, \Omega);$

iii. $\left.\begin{array}{r} f : A \to B \text{ morfism} \\ g : B \to C \text{ morfism} \end{array}\right\} \implies gf : A \to C \text{ morfism}.$

■

3. Fie $(A, \Omega)$ algebră universală de tip $\tau$, $\rho$ o relaţie de echivalenţă pe $A$. Are loc echivalenţa:

$$\rho \leq \left(A^2, \Omega\right) \iff$$
$$\iff \left[\forall \omega \in \Omega, \forall a_i \rho b_i \implies \omega\left(a_1, \ldots, a_{\tau(\omega)}\right) \rho \omega\left(b_1, \ldots, b_{\tau(\omega)}\right)\right],$$

adică $\rho$ este o congruenţă.

**Soluţie.** " $\implies$ " Fie $\omega \in \Omega, i = \overline{1, \tau(\omega)}$, $a_i \rho b_i$. Din $\rho \leq A^2$ rezultă $\omega\left(a_1, \ldots, a_{\tau(\omega)}\right) \rho \omega\left(b_1, \ldots, b_{\tau(\omega)}\right)$.

Deci, $\rho$ este o congruenţă.

" $\impliedby$ " Fie $\omega \in \Omega$, $(a_i, b_i) \in \rho$, $\forall i = \overline{1, \tau(\omega)}.$ Rezultă $\omega\left(a_1, \ldots, a_{\tau(\omega)}\right) \rho \omega\left(b_1, \ldots, b_{\tau(\omega)}\right)$ adică $\rho \leq \left(A^2, \Omega\right)$.

■

4. Fie $(A, \Omega)$ algebră universală, $B \leq A$ şi $B' \overset{\theta}{\simeq} B$. Atunci $\exists! (A', \Omega)$ algebră universală astfel încât

$$\begin{cases} A' \simeq A \\ B' \leq A' \end{cases}$$

adică $\exists \overline{\theta} : A' \overset{\sim}{\to} A$ astfel încât $\overline{\theta}/B' = \theta$.

**Soluţie**. Presupunem că $A \cap B' = \phi$, altfel luăm în loc de $A$ pe $A \times \{u\}$, cu $\{u\}$ ales convenabil.

Fie $A' = B' \cup (A \backslash B)$. Definim

$\overline{\theta} : A' \to A$

$a' \rightsquigarrow \theta(a') \in B$ pentru $a' \in B'$

$a' \rightsquigarrow a'$ pentru $a' \in A \backslash B$.

Avem $B'$ subalgebră în $A'$ şi există o unică structură de algebră universală pe $A'$ astfel încât $\overline{\theta}$ să fie izomorfism. ■

5. Interpretarea congruenţelor în cazul grupurilor şi al inelelor.

**Soluţie.** Congruenţele sunt relaţii de echivalenţă regulate pe grupuri (pe inele) şi ele sunt în corespondenţă bijectivă cu divizorii normali (respectiv, cu idealele).

$$\begin{cases} q \text{ congruenţă pe } G \text{ implică } q(1) \lhd G, \\ \text{unde } (G,\cdot) \text{ grup şi } q(1) \text{ este clasa elementului neutru.} \\ \text{Invers, din } N \lhd G \text{ obţinem relaţia de echivalenţă} \\ \text{regulată } q, \text{definită astfel: } xqy \iff x^{-1}y \in N. \end{cases}$$

Similar,

$$\begin{cases} q \text{ congruenţă pe } (R,+,\cdot) \text{ implică } q(0) \text{ ideal în } R, \\ \text{unde } q(0) \text{ este clasa lui } 0. \\ \text{Invers, din } I \text{ ideal în } R \text{ obţinem relaţia de echivalenţă} \\ \text{regulată } q, \text{definită astfel: } xqy \iff x-y \in I. \end{cases}$$

■

**Congruenţe**

**Definiţie 11.8** *Fie $(A,\Omega)$ o algebră universală de tip $\tau$, $\rho$ o echivalenţă pe $A$. $\rho$ este* ***congruenţă*** *pe $(A,\Omega)$ dacă:*

$$\begin{gathered} \forall \omega \in \Omega, \forall a_1,\ldots,a_{\tau(\omega)}, b_1,\ldots,b_{\tau(\omega)} \in A, \\ a_i \ \rho \ b_i, i=\overline{1,\tau(\omega)} \text{ implică } \omega\left(a_1,\ldots,a_{\tau(\omega)}\right) \rho \ \omega\left(b_1,\ldots,b_{\tau(\omega)}\right) \end{gathered} \tag{$*$}$$

**Notaţie.** $E(A)$ : mulţimea relaţiilor de echivalenţă pe $A$; $C(A,\Omega)$ : mulţimea congruenţelor pe $(A,\Omega)$.

Avem $\left\{\Delta_A, A^2\right\} \subset C(A,\Omega)$.

**Definiţie 11.9** *Spunem că $(A,\Omega)$ este* ***simplă*** *dacă*

$$C(A,\Omega) = \left\{\Delta_A, A^2\right\}.$$

**Exemplu 11.3** *Fie $f: A \to B$ morfism de algebre universale. Atunci $\ker f$ este congruenţă pe $A$.*

**Soluţie.** Avem $a \ker f \ b \iff f(a) = f(b)$.

Observăm că $\ker f = G_f^{-1} \circ G_f$ pentru că

$$\begin{cases} (a,c) \in G_f^{-1} \circ G_f \iff \exists b : (a,b) \in G_f, (b,c) \in G_f^{-1} \\ (a,c) \in \ker f \iff f(a) = f(c) \end{cases} \iff$$

$b = f(a) = f(c)$. Conform exerciţiului anterior, are loc şirul de implicaţii:

$f$ morfism $\iff G_f \leq A \times B \Longrightarrow G_f^{-1} \leq B \times A \Longrightarrow G_f^{-1} \circ G_f = \ker f \leq A \times A = A^2$, adică $\ker f$ este o congruenţă. ■

**Algebră factor**

**Teorema 11.1** *Fie $\rho \in C(A, \Omega)$. Atunci $\exists! (A/\rho, \Omega)$ astfel încât $p_\rho : A \to A/\rho$ morfism.*

**Demonstraţie.** Fie $\omega \in \Omega$.

Definim următoarea operaţie pe $A/\rho$:

$$\forall \rho(x_1), \ldots, \rho\left(x_{\tau(\omega)}\right) \in A/\rho,$$

$$\omega\left(\rho(x_1), \ldots, \rho\left(x_{\tau(\omega)}\right)\right) = \rho\left(\omega\left(x_1, \ldots, x_{\tau(\omega)}\right)\right).$$

*Buna definire*:

Fie $\rho(x_i') = \rho(x_i), \forall i = \overline{1, \tau(\omega)}$ adică $x_i \rho x_i', \forall i = \overline{1, \tau(\omega)}$, de unde

$$\omega\left(x_1, \ldots, x_{\tau(\omega)}\right) \rho \omega\left(x_1', \ldots, x_{\tau(\omega)}'\right) \text{ deci}$$

$$\rho\left(\omega\left(x_1', \ldots, x_{\tau(\omega)}\right)\right) = \rho\left(\omega\left(x_1, \ldots, x_{\tau(\omega)}'\right)\right).$$

*Arătăm că $p_\rho$ este morfism.*

$\forall \omega, \forall x_1, \ldots, x_{\tau(\omega)} \in A$ :

$$\begin{aligned} p_\rho\left(\omega\left(x_1, \ldots, x_{\tau(\omega)}\right)\right) &\overset{\text{def. } p_\rho}{=} \rho\left(\omega\left(x_1, \ldots, x_{\tau(\omega)}\right)\right) \\ &\overset{\text{def. } \omega \text{ pe } A/\rho}{=} \omega\left(\rho(x_1), \ldots, \rho\left(x_{\tau(\omega)}\right)\right) \\ &= \omega\left(p_\rho(x_1), \ldots, p_\rho\left(x_{\tau(\omega)}\right)\right). \end{aligned}$$

*Unicitatea lui $\omega$*:

Fie $\omega'$ o altă operaţie pe $A/\rho$ astfel încât

$$p_\rho\left(\omega\left(x_1, \ldots, x_{\tau(\omega)}\right)\right) = \omega'\left(p_\rho(x_1), \ldots, p_\rho\left(x_{\tau(\omega)}\right)\right).$$

Rezultă că $\forall \rho(x_i) \in A_{/_\rho}$ avem:

$$\omega\left(\rho(x_1), \ldots, \rho\left(x_{\tau(\omega)}\right)\right) = \omega\left(p_\rho(x_1), \ldots, p_\rho\left(x_{\tau(\omega)}\right)\right) =$$
$$= p_\rho\left(\omega\left(x_1, \ldots, x_{\tau(\omega)}\right)\right) = \omega'\left(\rho(x_1), \ldots, \rho\left(x_{\tau(\omega)}\right)\right), \text{ de unde}$$
$$\omega = \omega'.$$

$\blacksquare$

**Consecinţă.** Orice congruenţă este nucleul unui morfism ($\rho = \ker p_\rho$).

$$\begin{cases} (A/\rho, \Omega) \text{ se numeşte } \textit{algebră cât}, \text{ iar} \\ p_\rho \text{ morfism natural (canonic).} \end{cases}$$

**Observaţie 11.3** *Avem $A/\Delta_A \simeq A$, iar $A/A^2$ este o $\Omega-$algebră formată dintr-un singur element.*

**Teorema 11.2** *Fie $f : A \to B$ morfism de algebre universale, $\rho$ o congruenţă pe $A$ astfel încât $\rho \subseteq \ker f$.*

*Atunci $\exists! \overline{f} : A/\rho \to B$ morfism, astfel încât $\overline{f} p_\rho = \rho$. În plus,*

$$f \textit{ surjectiv} \Longrightarrow \overline{f} \textit{ surjectiv;}$$
$$\rho = \ker f \Longrightarrow \overline{f} \textit{ injectiv.}$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p_\rho"'] & & B \\ & A_\rho \arrow[ur, dashed, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

**Demonstraţie.** Definim $\overline{f}(\rho(x)) = f(x)$. $\overline{f}$ este bine definit din $\rho \subseteq \ker f$.
Arătăm că $\rho$ este morfism.
Fie $\omega \in \Omega$ şi
$\rho(x_1), \ldots, \rho\left(x_{\tau(\omega)}\right) \in A/\rho$. Avem şirul de implicaţii:

$$\overline{f}\left(\omega\left(\rho(x_1), \ldots, \rho\left(x_{\tau(\omega)}\right)\right)\right) \overset{A/\rho \text{ alg.}}{=} \overline{f}\left(\rho\left(\omega\left(x_1, \ldots, x_{\tau(\omega)}\right)\right)\right)$$
$$\overset{\text{def. } f}{=} f\left(\omega\left(x_1, \ldots, x_{\tau(\omega)}\right)\right) \overset{f \text{ morf.}}{=} \omega\left(f(x_1), \ldots, f\left(x_{\tau(\omega)}\right)\right)$$
$$\overset{\text{def. } \overline{f}}{=} \omega\left(\overline{f}(\rho(x_1)), \ldots, \overline{f}\left(\rho\left(x_{\tau(\omega)}\right)\right)\right) \Longrightarrow \overline{f} \text{ morfism.}$$

*Unicitatea* lui $\overline{f}$: Presupunem că

$$\overline{\overline{f}} p_\rho = f = \overline{f} p_\rho \text{ de unde } \overline{\overline{f}}(\rho(x)) = \overline{f}(\rho(x)) = f(x) \text{ deci } \overline{\overline{f}} = \overline{f}.$$

*Injectivitatea* lui $\overline{f}$ pentru $\rho = \ker f$ rezultă din şirul de implicaţii:

$$\overline{f}\left(\rho\left(x\right)\right) = \overline{f}\left(\rho\left(y\right)\right) \Longrightarrow f\left(x\right) = f\left(y\right) \Longrightarrow \left.\begin{array}{c} x(\ker f)y \\ \ker f = \rho \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow\ \rho\left(x\right) = \rho\left(y\right) \Longrightarrow \overline{f}$ injectiv.

■

**Teorema 11.3** *Fie* $\left(A,\Omega\right),\left(B,\Omega\right),\left(C,\Omega\right)$ *algebre universale şi considerăm diagrama*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & B \\ C \arrow[ur, dashed, "\exists h"'] & \end{tikzcd}$$

*cu* $\ker g \subseteq \ker f$.
*Atunci*

$$\begin{cases} \exists h \textit{ morfism } : hg = f; \\ f \textit{ surjectiv } \Longrightarrow h \textit{ surjectiv;} \\ \ker g = \ker f \Longrightarrow h \textit{ injectiv.} \end{cases}$$

**Demonstraţie.** Fie diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, "p_{\ker g}"] & B \arrow[d, "\bar{f}"] \\ C & A/\ker g \arrow[l, dashed, "\exists \bar{g}"'] \end{tikzcd}$$

Din teorema anterioară, $\exists\overline{g},\exists\overline{f}$ morfisme, astfel încât

$$\begin{cases} \overline{g}p_{\ker g} = g \\ \overline{f}p_{\ker g} = f. \end{cases}$$

Cum $g$ surjectiv, rezultă $\overline{g}$ bijectiv, deci există $\overline{g}^{-1}$ morfism, pentru care

$$p_{\ker g} = \overline{g}^{-1}g \text{ de unde } f = \overline{f}\overline{g}^{-1}g.$$

În plus, din $f$ surjectiv rezultă $\overline{f}$ surjectiv şi cum $\overline{f}\overline{g}^{-1} = h$ obţinem $h$ surjectiv.
Din $\ker f = \ker g$ rezultă $\overline{f}$ injectiv, deci $h$ este injectiv. ■

**Teorema 11.4** ***(Teorema duală).*** *Fie* $\left(A,\Omega\right),\left(B,\Omega\right),\left(C,\Omega\right)$ *algebre universale şi considerăm diagrama*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, shift left, "g"] & B \arrow[l, "f"'] \\
C \arrow[u, dashed, shift left, "r"] \arrow[ur, dashed, "\exists h"'] &
\end{tikzcd}$$

*unde* $f(B) \subseteq g(C)$*. Atunci există* $h$ *morfism* : $gh = f$*.*

**Demonstraţie.** Din $g$ injectiv rezultă că $\exists r : A \to C : rg = 1_C$; $r$ retractă a lui $g$.

Fie $h = rf$. Arăt că $h$ este morfism.

$$\begin{aligned}
&g(C) \leq (A, \Omega) \\
&g_1 : C \to g(C) \ \text{ izomorfism} \\
&g_1(c) = g(c) \\
&\forall a \in g(C),\ r(a) = g_1^{-1}(a).
\end{aligned}$$

Din $f(B) \leq g(C)$ rezultă că $\forall b \in B,\ h(b) = (rf)(b) = r(f(b)) = g_1^{-1}(f(b)) = \left(g_1^{-1}f\right)(b)$ deci $h$ este morfism ($h$ morfism pentru că $r/\operatorname{Im} g$ este morfism).

Arătăm că $h = rf$ implică $gh = g\ rf = f$. Avem:

$$(g\ rf)(b) = g\ r(f(b)) = gg_1^{-1}(f(b)) = f(b) \ \text{ de unde } g\ rf = f.$$

■

**Teoreme de izomorfism**

**Teorema 11.5** ***(Teorema 1 de izomorfism)*** *Dacă* $f : (A, \Omega) \to (B, \Omega)$ *este un morfism, atunci* $\exists \overline{f} : A/\ker f \longrightarrow f(A)$ *izomorfism astfel încât următoarea diagramă este comutativă:*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p_{kerf}"'] & B \\
A/kerf \arrow[r, dashed, "\bar{f}"] & f(A) \arrow[u, "i"']
\end{tikzcd}$$

**Demonstraţie**. Avem $A/\ker f = \{\widehat{a} \mid a \in A\}$.

Considerăm graficul $G_f = F$.

Avem $\ker f = F^{-1} \circ F$ şi $F^{-1}F(a) = F^{-1}(f(a)) = f^{-1}(f(a))$.

Deci, $A/\ker f = \left\{f^{-1}(y) \mid y \in f(A)\right\}$. Definim

$$\begin{aligned} \overline{f} : A/\ker f &\to f(A) \\ f^{-1}(y) &\rightsquigarrow y \end{aligned}$$ , care este bijectivă.

Arătăm că $\overline{f}$ morfism.

Fie $\omega \in \Omega,\ f^{-1}(y_1), \ldots, f^{-1}\left(y_{\tau(\omega)}\right) \in A/\ker f$.

Atunci

$$\overline{f}\left(\omega\left(f^{-1}\left(y_1\right),\ldots,f^{-1}\left(y_{\tau(\omega)}\right)\right)\right) \overset{A/\ker f \text{ algebră}}{=}$$

$$= \overline{f}\left(f^{-1}\left(\omega\left(y_1,\ldots,y_{\tau(\omega)}\right)\right)\right) \overset{\text{def. } \overline{f}}{=}$$

$$= \omega\left(y_1,\ldots,y_{\tau(\omega)}\right) \overset{\text{def. } \overline{f}}{=} \omega\left(\overline{f}\left(f^{-1}\left(y_1\right)\right),\ldots,\overline{f}\left(f^{-1}\left(y_{\tau(\omega)}\right)\right)\right).$$

■

**Teorema 11.6** ***(Teorema 2 de izomorfism)*** *Fie $A_1 \le (A,\Omega)$ şi $\rho \in C(A,\Omega)$ o congruenţă. Au luc afirmaţiile:*

1. $\rho(A_1) \le (A,\Omega)$;
2. $\rho_1 = \rho \cap A_1^2 \le C(A,\Omega)$;
3. $\rho' = \rho \cap [\rho(A_1)]^2 \in C(\rho(A_1),\Omega)$

*şi $(A_1)/\rho_1 \simeq \rho(A_1)/\rho'$, adică $(A_1)/(\rho \cap A_1^2) \simeq \rho(A_1)/(\rho \cap A_1^2)$.*

**Demonstraţie.**

1. Avem şirul de implicaţii:
$$\rho \in C(A,\Omega) \Longrightarrow \left.\begin{array}{c}\rho \le \left(A^2,\Omega\right)\\ A_1 \le (A,\Omega)\end{array}\right\} \Longrightarrow \rho(A_1) \le (A,\Omega).$$
2. $\rho_1 = \ker(p_\rho/A_1)$ este o congruenţă.
$$\begin{array}{l} p_\rho : A \to A_{/\rho} \\ p_\rho/A_1 : A_1 \to A/\rho \\ \rho_1 = \ker(p_\rho/A_1) = \rho \cap A_1^2 \end{array}$$
3. Din Teorema 1 de izomorfism rezultă că
$$A_1/\ker(p_\rho/A_1)\,(= A_1/\rho_1) \simeq \mathrm{Im}(p_\rho/A_1) = \{\widehat{x} \mid x \in A_1\} =$$
$$= \{\widehat{y} \mid y \in \rho(A_1)\}, \text{ deoarece } x\rho y \iff \widehat{x} = \widehat{y}.$$
Deci, $A_1/\rho_1 \simeq \rho(A_1)/\rho'$.

■

Să vedem cum se transcrie acest rezultat în cazul grupurilor.

$$\begin{cases} A_1 \leq A \\ (A,\Omega) \text{ algebră universală} \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} S \leq G \\ (G,\cdot) \text{ grup} \end{cases}.$$

$\rho$ congruenţă pe $(A,\Omega) \rightsquigarrow N = \widehat{0} \lhd G$.

Conform celei de-a doua teoreme de izomorfism la algebre universale,

$$A_1/\left(\rho \cap A_1^2\right) \simeq \rho\left(A_1\right)/\rho \cap \left[\rho\left(A_1\right)\right]^2.$$

Avem $\rho\left(A_1\right) = \{a \in G \mid \exists a_1 \in S : a_1 \rho a\}$.
Mai mult,

$$a_1 \rho a \iff e \rho a_1^{-1} a \iff$$

$$\iff \left[a_1^{-1} a \in N \iff a \in a_1 N\right].$$

$\rho\left(A_1\right) \rightsquigarrow \rho\left(S\right) = \{a \mid \exists a_1 \in S : a \in a_1 N\} = SN$.
$\rho \cap A_1^2 \rightsquigarrow \left\{(a_1, a_2) \in S^2 \mid a_1 \rho a_2\right\} =$
$= \left\{(a_1, a_2) \in S^2 \mid a_1^{-1} a_2 \rho e \iff a_1^{-1} a_2 \in N\right\} \rightsquigarrow N \cap S$.
Deci, $A_1/\left(\rho \cap A_1^2\right) \rightsquigarrow S/N \cap S$.

Pe de altă parte,
$\rho \cap \left[\rho\left(A_1\right)\right]^2 \rightsquigarrow N \cap NS = N$, $(N = Ne \subset NS)$.
Deci, $\rho\left(A_1\right)/\rho \cap \left[\rho\left(A_1\right)\right]^2 \rightsquigarrow NS/N$.

Aşadar a doua teoremă de izomorfism la grupuri devine:

**Teorema 11.7** *Dacă $G$ este grup şi $S \leq G$, $N \lhd G$, atunci*

$$NS/N \simeq S/N \cap S.$$

**Teorema 11.8** ***(Teorema dublei factorizări)*** *Dacă $q, \rho \in C\left(A,\Omega\right)$, $q \subseteq \rho$, atunci $\left(A/\rho\right)/\left(\rho/q\right) \simeq A/\rho$.*

**Demonstraţie**. Considerăm diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "p_q"] \arrow[dr, "p_\rho"'] & A/q \arrow[r, "p_\rho/q"] \arrow[d, dashed, "\exists! g"] & (A/q)/(\rho/q) \arrow[dl, dashed, "\exists g'"] \\
 & A/\rho &
\end{tikzcd}$$

cu $q \subseteq \rho$. Atunci $\exists! g$ morfism $: g p_q = p_\rho$.

Dar, $\rho/q = \ker g$ de unde $\rho/q \in C(A/q, \Omega)$.

Aplicăm Teorema 1 pentru $g$ şi rezultă că $(A/q)/\ker g \simeq A/\rho$.

Deci, $(A/q)/(\rho/q) \simeq A/\rho$. ■

**Translaţii**

$\omega \in \Omega(n)$ determină operaţia $n-$ară:

$$(x_1, \ldots, x_n) \longrightarrow \omega(x_1, \ldots, x_n).$$

Fixăm toate argumentele, cu excepţia unuia:

$$\begin{aligned} &\tau : A \to A \\ &x \rightsquigarrow \omega(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_i, \ldots, a_{n-1}) \end{aligned}$$

$a_j$ fixate, $\forall j \neq i$.

Spunem că $\tau$ *este o translaţie elementară.*

**Definiţie 11.10** *$\theta$ se numeşte* ***translaţie*** *dacă $\theta = 1_A$ sau $\theta$ este produs de un număr finit de translaţii elementare.*

**Exerciţii**

1. Fie $(A, \Omega)$ algebră universală şi $\rho_1, \rho_2 \in C(A, \Omega)$.

   Atunci $\rho_1\rho_2 \in C(A, \Omega) \iff \rho_1\rho_2 = \rho_2\rho_1$.

   **Soluţie.** " $\Longleftarrow$ " Dacă $R_1, R_2$ echivalenţe pe $A$, atunci

   $$R_1R_2 \text{ echivalenţă } \iff R_1R_2 = R_2R_1. \ (*)$$

   Deci, $\rho_1\rho_2$ este o echivalenţă pe $A$.

   În plus, avem implicaţiile:

   $$\left.\begin{array}{l} \rho_1 \in C(A, \Omega) \iff \rho_1 \leq \left(A^2, \Omega\right) \\ \rho_2 \in C(A, \Omega) \iff \rho_2 \leq \left(A^2, \Omega\right) \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

   $$\Longrightarrow \rho_1\rho_2 \leq \left(A^2, \Omega\right) \Longrightarrow \rho_1\rho_2 \in C(A, \Omega).$$

   " $\Longleftarrow$ " Din $\rho_1\rho_2$ congruenţă rezultă $\rho_1\rho_2$ echivalenţă, deci, conform cu $(*)$, $\rho_1\rho_2 = \rho_2\rho_1$.

   *Demonstraţia pentru* $(*)$:

" $\Longrightarrow$ " $R_1R_2$ echivalenţă implică $(R_1R_2)^{-1} = R_1R_2$, de unde $R_2^{-1}R_1^{-1} = R_1R_2$ deci $R_2R_1 = R_1R_2$.

" $\Longleftarrow$ " Avem $R_1R_2 = R_2R_1$ şi implicaţiile:

$$\begin{cases} \Delta_A \subseteq R_1, \Delta_A \subseteq R_2 \Longrightarrow \Delta_A \subseteq R_1R_2; \\ R_1^{-1} = R_1, R_2^{-1} = R_2 \Longrightarrow (R_1R_2)^{-1} = R_2R_1 \overset{\text{ip.}}{=} R_1R_2 \\ \Longrightarrow R_1R_2 \text{ simetrică;} \\ R_1^2 = R_1, R_2^2 = R_2 \Longrightarrow (R_1R_2)^2 \overset{\text{ip.}}{=} R_1^2R_2^2 = R_1R_2 \\ \Longrightarrow R_1R_2 \text{ tranzitivă.} \end{cases}$$

Deci, $R_1R_2$ este o echivalenţă. ■

2. Dacă $\rho_1, \rho_2 \in C(A, \Omega)$, $\rho_1\rho_2 = \rho_2\rho_1$ atunci

$$\sup_{C(A,\Omega)} \{\rho_1, \rho_2\} = \rho_1\rho_2.$$

Similar,

$$\rho_1, \rho_2 \in E(A), \rho_1\rho_2 = \rho_2\rho_1 \text{ implică } \sup_{E(A)} \{\rho_1, \rho_2\} = \rho_1\rho_2.$$

**Soluţie.** Din $\rho_1 \subseteq \rho_1, \Delta_A \subseteq \rho_2$ rezultă $\rho_1 \subseteq \rho_1\rho_2$ şi analog $\rho_2 \subseteq \rho_1\rho_2$.

Deci, $\rho_1\rho_2$ este majorant în $C(A, \Omega)$ pentru $\{\rho_1, \rho_2\}$.

Fie $q \in C(A, \Omega)$, $\rho_1 \subseteq q$ şi $\rho_2 \subseteq q$.

Atunci $\rho_1\rho_2 \subseteq q^2 = q$.

Deci, $\sup_{C(A,\Omega)} \{\rho_1, \rho_2\} = \rho_1\rho_2$. ■

3. Fie $(A, \Omega)$ algebră universală, astfel încât $\forall \rho_1, \rho_2 \in C(A, \Omega)$, $\rho_1\rho_2 = \rho_2\rho_1$ (pentru a fi congruenţă).

Să se arate că:

$$\forall \rho_1, \rho_2, \rho_3 \in C(A, \Omega) \text{ şi } \rho_1 \subseteq \rho_3 : \rho_1(\rho_2 \cap \rho_3) \supseteq (\rho_1\rho_2) \cap \rho_3.$$

(condiţia de modularitate).

**Soluţie.** Din $(a, b) \in (\rho_1\rho_2) \cap \rho_3$ rezultă $(a, b) \in \rho_1\rho_2$ şi $(a, b) \in \rho_3$ deci $\exists c \in A : (a, c) \in \rho_2, (c, b) \in \rho_1, (a, b) \in \rho_3$.

Din $\rho_1 \subseteq \rho_3$ rezultă $(c, b) \in \rho_3$, $(a, b) \in \rho_3$ deci $(a, c) \in \rho_3$.

Dar, $(a, c) \in \rho_2$, deci rezultă $(a, c) \in \rho_2 \cap \rho_3$.

Avem şi $(c, b) \in \rho_1$, deci $(a, b) \in \rho_1 (\rho_2 \cap \rho_3)$. ■

4. Fie $q$ echivalenţă pe $(A, \Omega)$. Atunci

   $q$ congruenţă $\iff$ $q$ admite toate translaţiile.

   **Soluţie**. " $\Longrightarrow$ " Verificăm că $q$ admite toate translaţiile elementare şi prin inducţie rezultă că admite toate translaţiile. Altfel spus, dacă

$$\tau : x \longrightarrow \omega (a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_i, \ldots, a_{n-1})$$

   este o translaţie elementară, atunci verificăm că

$$(a, b) \in q \Longrightarrow (\tau (a), \tau (b)) \in q, \ \forall a, b \in A.$$

   Din $(a, b) \in q$ şi $q$ congruenţă, rezultă

   $\omega (a_1, \ldots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \ldots, a_n) \, q \omega (a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots, a_n)$,

   de unde $\tau (a) \, q \tau (b)$, deci $(\tau (a), \tau (b)) \in q$.

   " $\Longleftarrow$ " Presupunem că $q$ admite toate translaţiile elementare şi fie $a_i, a_i' \in A$ astfel încât $a_i q a_i'$, $\forall i = \overline{1, n}$.

   Atunci,

$$\begin{aligned} \tau_1 (a_1) &= \omega (a_1, a_2, \ldots, a_n) \, q \omega (a_1', a_2, \ldots, a_n) = \tau_1 (a_1') \\ \tau_2 (a_2) &= \omega (a_1', a_2, \ldots, a_n) \, q \omega (a_1', a_2', \ldots, a_n) = \tau_2 (a_2') \\ &\ldots \\ \tau_n (a_n) &= \omega \left(a_1', \ldots, a_{n-1}', a_n\right) q \omega (a_1', a_2', \ldots, a_n') = \tau_n (a_n') \end{aligned}$$

   Obţinem $\omega (a_1, a_2, \ldots, a_n) \, q \omega (a_1', a_2', \ldots, a_n')$, $\forall \omega \in \Omega (n)$, deci $q$ este o congruenţă. ■

5. Fie $(A, \Omega)$ algebră universală.

   Dacă $\forall a, b \in A$, $\exists$ o translaţie pe $A$, care schimbă pe $a$ cu $b$, atunci congruenţele comută pe $A$.

   **Soluţie.** Fie $q_1, q_2 \in C (A, \Omega)$ şi fie $(a, b) \in q_2 q_1$ deci $\exists c \in A : (a, c) \in q_1$ şi $(c, b) \in q_2$.

   Din ipoteză, există o translaţie care schimbă pe $a$ cu $b$.

Conform Roblemei precedente, $q_i$ admit $\tau$, $i = 1, 2$. Avem

$$\begin{cases} (a, c) \in q_1 \text{ deci } (\tau(a), \tau(c)) \in q_1 \text{ de unde} \\ (b, \tau(c)) \in q_1 \text{ adică } (\tau(c), b) \in q_1; \\ (c, b) \in q_2 \text{deci } (\tau(c), \tau(c)) \in q_2 \text{ de unde} \\ (\tau(c), a) \in q_2 \text{ adică } (a, \tau(c)) \in q_2. \end{cases}$$

Rezultă $(a, b) \in q_1 q_2$.

Deci, $q_2 q_1 \subseteq q_1 q_2$ şi similar obţinem cealaltă incluziune.

Aşadar, $q_1 q_2 = q_2 q_1$. ■

# 12 Cursuri şi seminarii 11,12 - Latici. Clase de latici

Vom arăta că mulţimea subalgebrelor unei algebre universale, cât şi mulţimea congruenţelor sale au structură de latice, de aceea dedicăm acest capitol noţiunii de latice.

Noţiunea a fost introdusă de Charles Pierce, Ernst Schröder şi, independent, de Richard Dedekind.

**Definiţie 12.1** *O mulţime ordonată $(L, \leq)$ în care*

$$\forall x_1, x_2 \in L, \exists x_1 \vee x_2 = \sup(x_1, x_2), \exists x_1 \wedge x_2 = \inf(x_1, x_2)$$

*se numeşte* ***latice****.*

*Astfel, o latice $(L, \vee, \wedge)$ este o algebră universală.*

**Teorema 12.1** *Dacă $(L, \leq)$ este o latice, atunci au loc proprietăţile următoare:*
*$\forall a, b, c \in L$,*

$$\begin{cases} \textit{asociativitatea: } \begin{cases} a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c; \\ a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c. \end{cases} \\ \textit{comutativitatea: } \begin{cases} a \vee b = b \vee a; \\ a \wedge b = b \wedge a. \end{cases} \\ \textit{absorbţia: } a \vee (a \wedge b) = a \wedge (a \vee b) = a. \end{cases}$$

**Demonstraţie.**

1. Fie $x = a \vee (b \vee c)$ şi $y = (a \vee b) \vee c$. Obţinem

$$a \leq x, b \vee c \leq x \text{ de unde } a \leq x, b \leq x, c \leq x.$$

Dar $a \vee b \leq x$ implică $y \leq x$.

Similar $x \leq y$, deci avem egalitate.

2. Comutativitatea rezultă din definiţia lui sup şi inf.

3. Fie $w = a \vee (a \wedge b)$. Rezultă $a \leq w$.

   Din $a \leq a$ şi $a \wedge b \leq a$ obţinem $a \vee (a \wedge b) \leq a$ deci $w \leq a$.

   Avem deci $a = w$.

   Pentru a obţine celelalte egalităţi, permutăm " $\vee$ " cu " $\wedge$ ", iar " $\leq$ " cu " $\geq$ ".

■

**Teorema 12.2** ***(Reciprocă)***. *Fie $(L, \vee, \wedge)$ o algebră cu proprietăţile de asociativitate, comutativitate şi absorbţie. Definim " $\leq$ " pe $L$:*

$$a \leq b \iff a \vee b = b.$$

*Atunci, " $\leq$ " este o relaţie de ordine, iar $(L, \leq)$ este o latice, în care:*

$$a \wedge b = \inf(a, b);$$
$$a \vee b = \sup(a, b).$$

**Demonstraţie**. Observăm că

1. $a \vee b = b \iff a \wedge b = a$ pentru că, din $a \vee b = b$ rezultă

$$a = a \wedge (a \vee b) = a \wedge b.$$

2. $a \vee a = a = a \wedge a$, $\forall a \in L$, pentru că din $a = a \wedge (a \vee a)$ rezultă

$$a \vee a = a \vee [a \wedge (a \vee a)] = a \text{ deci } a \vee a = a.$$

Folosim prima observaţie şi obţinem $a \wedge a = a$.
Aşadar, " $\leq$ " e reflexivă.
*Tranzitivitatea.*
Fie $a \leq b$ şi $b \leq c$. Rezultă $a \vee b = b$ şi $b \vee c = c$.
Atunci

$$a \vee c = a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c = b \vee c = c \text{ deci } a \leq c.$$

*Antisimetria.*
Fie $a \leq b$ şi $b \leq a$ de unde $a \vee b = b$ şi $b \vee a = a$.

Din comutativitatea lui " $\vee$ " rezultă că $a = b$.

Aşadar, " $\leq$ " este relaţie de ordine.

Să verificăm

$$\begin{cases} a \vee b = \sup(a, b); \\ a \wedge b = \inf(a, b). \end{cases}$$

(folosim " $\leq$ ")

Din $a \vee (a \vee b) = (a \vee a) \vee b = a \vee b$ de unde $a \leq a \vee b$.

Prin simetrie, $b \leq a \vee b$.

Deci, $a \vee b$ este majorant pentru $a$ şi $b$.

Fie acum $a \leq c$ şi $b \leq c$. Obţinem $a \vee c = c$ şi $b \vee c = c$, de unde

$$c \vee c = c = (a \vee b) \vee c \text{ deci } a \vee b \leq c.$$

Rezultă $a \vee b = \sup(a, b)$. Conform cu observaţia 1, $a \leq b \iff a \wedge b = a$.

În demonstraţia anterioară, înlocuim " $\leq$ " cu " $\geq$ " şi " $\vee$" cu " $\wedge$" şi obţinem $a \wedge b = \inf(a, b)$.

■

**Observaţie 12.1** *Din simetria proprietăţilor operaţiilor " $\vee$" şi " $\wedge$" rezultă că dacă într-o teoremă schimbăm între ele relaţiile " $\leq$ " şi " $\geq$ " şi operaţiile " $\vee$" şi " $\wedge$", atunci se obţine duala teoremei.*

## 12.1 Sublatice. Morfisme

**Definiţie 12.2** *Fie $(L, \vee, \wedge)$ o latice şi $L' \subseteq L$. Spunem că $L'$ este o* ***sublatice*** *a lui $L$, dacă*

$$\forall a, b \in L', \;\; a \vee b, \; a \wedge b \in L'.$$

**Exemplu 12.1** 1. ***Idealele*** *unei latici:*

*Fie $(L, \vee, \wedge)$ o latice, $I \subseteq L$.*

*$I$* ***ideal*** *dacă:* $\begin{cases} 1) \; \forall x, y \in I, \; x \vee y \in I; \\ 2) \; \forall x \in I, \; t \leq x \Longrightarrow t \in I. \end{cases}$

*$I(x) = \{t \in L \mid t \leq x\}$ se numeşte ideal principal.*

*Idealul principal $I$ se mai notează $]\leftarrow, a]$ cu $a \in L$.*

2. *Noţiunea duală se numeşte* ***filtru****. Aşadar,*

   *$F$* ***filtru*** *dacă:* $\begin{cases} 1) \; \forall x, y \in I, \; x \wedge y \in I; \\ 2) \; \forall x \in I, \; t \geq x \Longrightarrow t \in I. \end{cases}$

3. *$\forall a, b \in L, \; a \leq b$, intervalul $[a, b] = \{x \in L \mid a \leq x \leq b\}$.*

**Definiţie 12.3** *Fie $f : L_1 \to L_2$ cu $L_1, L_2$ latici.$f$ se numeşte* ***morfism de latici*** *dacă* $\forall a, b \in L_1$,

$$f(a \vee b) = f(a) \vee f(b),$$
$$f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b).$$

*$f$ se numeşte* ***izomorfism de latici*** *dacă este morfism bijectiv de latici.*

**Observaţie 12.2** *Orice morfism de latici este morfism de ordine.*

**Demonstraţie.**
Are loc şirul de implicaţiii:
$a \leq b \Longrightarrow b = a \vee b \Longrightarrow f(b) = f(a) \vee f(b) \Longrightarrow f(a) \leq f(b)$.

■

Reciproca este falsă, aşa cum rezultă din următoarele exemple:

**Exemplu 12.2** *Notăm cu $D_n$ laticea divizorilor numărului natural nenul $n$. Definim $f : D_6 \to D_4$ astfel:*

$$f(1) = 1,\ f(2) = f(3) = 2,\ f(6) = 4.$$

*Atunci $f$ este un morfism de ordine, dar nu este morfism de latici. Într-adevăr,* $1 = f(1) = f(2 \wedge 3) \neq f(2) \wedge f(3) = 2$.

**Teorema 12.3** *$f$ izomorfism de ordine dacă şi numai dacă $f$ izomorfism de latici.*

**Demonstraţie.** Reamintim că un izomorfism de ordine este o bijecţie $f$, aşa încât $f$ şi $f^{-1}$ sunt morfisme de ordine. În baza observaţiei anterioare, este suficient sa arătăm că dacă $f$ este izomorfism de odine, atunci este şi izomorfism de latici.

Fie $f : L_1 \to L_2$ şi $a, b \in L_1$. Avem $a \leq a \vee b,\ b \leq a \vee b$, de unde $f(a) \leq f(a \vee b),\ f(b) \leq f(a \vee b)$. Fie acum $c' \in L_1$, astfel încât $f(a) \leq c',\ f(b) \leq c'$. Deoarece $f$ este bijectivă rezultă că există $c \in L_1$ încât $f(c) = c'$. Din faptul că $f^{-1}$ este morfism de ordine rezultă $a \leq c,\ b \leq c$, deci $a \vee b \leq c$ de unde $f(a \vee b) \leq f(c) = c'$.

Deci $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$. Prin dualitate, se obţine $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$. Împreună cu condiţia de bijectivitate, rezultă că $f$ este un izomorfism de latici.

■

**Exerciţii**

1. Orice element maximal dintr-o latice este maxim. (Orice element minimal dintr-o latice este minim).

   **Soluţie**. Fie $m$ maximal în $L$ şi $x \in L$, arbitrar.

   Avem $m \vee x \geq m$, $m$ maximal, de unde $m \vee x = m$ deci $x \leq m$, $\forall x$, adică $m$ este maxim. ■

2. Fie $\{I_k\}_k$ un lanţ de ideale din $L$. Atunci $I = \bigcup_k I_k$ ideal.

   **Soluţie**. Fie $x, y \in I$ deci $\exists k_1, k_2 : x \in I_{k_1}, y \in I_{k_2}$.

   Cum $\{I_k\}_k$ este lanţ, rezultă $I_{k_1} \subseteq I_{k_2}$ sau invers.

   Presupunem că $I_{k_1} \subseteq I_{k_2}$.

   Avem $x, y \in I_{k_2}$ deci $x \vee y \in I_{k_2} \subset I$.

   Fie $x \in I$ şi $y \leq x$. Rezultă $\exists k : x \in I_k$, deci $y \in I_k \subset I$.

   ■

3. $L$ are toate idealele principale dacă şi numai dacă $L$ satisface condiţia maximală, adică orice lanţ (crescător) este staţionar.

   **Soluţie.** " $\Longrightarrow$ " : Presupunem că $L$ nu satisface condiţia maximală, atunci $\exists c_0 < c_1 < c_2 < \ldots < c_n < \ldots$ infinit în $L$.

   Fie $I_k = ]\leftarrow, c_k]$. Rezultă $\{I_k\}_k$ lanţ, deci $\bigcup_k I_k = I$ ideal şi conform ipotezei, $I$ este principal, deci $\exists d \in L$ astfel încât $I = ]\leftarrow, d]$, contradicţie cu faptul că $\forall x \in L$, $\exists c_n > x$, $c_n \in I$.

   " $\Longleftarrow$ " : Fie $I$ ideal al lui $L$. Rezultă că în $I$ are loc condiţia maximală, deci $\exists \max I \stackrel{\text{not.}}{=} a$, de unde $I = ]\leftarrow, a]$, pentru că $\forall y \leq a$ , $y \in I$. ■

4. Idealele, filtrele sunt sublatici convexe ale lui $L$, adică satisfac condiţia: $\forall a, b \in I$ cu $a \leq b \Longrightarrow [a, b] \subset I$.

   **Soluţie.** Într-adevăr, dacă $I$ ideal şi $a, b \in I$, $a \leq b$, atunci $I \supseteq ]\leftarrow, b] \supset [a, b]$, deci $I$ este convex. Similar, se arată afirmaţia referitoare la filtre. ■

5. Orice sublatice convexă a lui $L$ este intersecţia dintre un ideal şi un filtru.

   **Soluţie**. Fie $L'$ o sublatice convexă a lui $l$.

   Definim $I = \{x \in L \mid \exists v \in L' : x \leq v\}$. Arătăm că $I$ este ideal.

   - $x, y \in I \Longrightarrow \exists v, w \in L' : x \leq v,\ y \leq w \Longrightarrow$

   $$\Longrightarrow\ x \vee y \leq v \vee w \in L' \Longrightarrow x \vee y \in I.$$

   - $x \in I,\ y \leq x \Longrightarrow y \in I.$

   Deci, $I$este ideal.

   Dualul lui $I : F = \{x \in L \mid \exists v \in L' : v \leq x\}$ este un filtru.

   Verificăm că $L' = I \cap F$.

" $\subset$ " : Rezultă din definiţia lui $I$ şi definiţia lui $F$.

" $\supset$ " : Fie $t \in I \cap F \Longrightarrow \exists u, v \in L'$ astfel încât $u \leq t \leq v$. Cum $L'$ este convexă rezultă $[u, v] \subset L'$, deci $t \in L'$. ∎

6. Fie $L$ o latice (mulţime ordonată) care satisface condiţia maximală. Atunci $L$ are maxim (element maximal).

   **Soluţie**. Este suficient, conform exerciţiului 1, să arătăm că $L$ are un element maximal.

   Fie $x_1 \in L$. Dacă $x_1$ maximal, am terminat.

   Dacă nu, $\exists x_2 > x_1$. Dacă $x_2$ maximal, am terminat.

   Dacă nu, $\exists x_3 > x_2 > x_1$.

   ...

   $L$ satisface condiţia maximală, deci şirul $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots$ este staţionar, adică se termină cu un $x_n$, pentru care $\nexists y$, $y > x_n$.

   Cu alte cuvinte, $x_n$ este maximal. ∎

7. Dacă $L$ este o latice, atunci există un morfism injectiv de ordine $f : L \to \mathcal{P}(L)$, încât

   $$\forall x, y \in L, \; f(x \wedge y) = f(x) \cap f(y).$$

   **Soluţie.** Definim $f$ astfel:

   $$f : L \to \mathcal{P}(L), \; f(x) = I_x = \{t \in L \mid t \leq x\}.$$

   f este injectiv: dacă $x, y \in L$ satisfac egalitatea $f(x) = f(y)$, atunci $x \in I_x = I_y$, de unde $x \leq y$ şi $y \in I_y = I_x$, de unde $y \leq x$.

   Apoi, $f$ este morfism de ordine; dacă $x, y \in L$, $x \leq y$, atunci $I_x \subseteq I_y$ adică $f(x) \subseteq f(y)$ şi reciproc, dacă $f(x) \subseteq f(y)$, atunci $x \in I_x \subseteq I_y$, deci $x \leq y$.

   În sfârşit, pentru orice $x, y \in L$ avem echivalenţa:

   $$z \in f(x \wedge y) \iff z \leq x \wedge y \iff z \in I_x \cap I_y \iff z \in f(x) \cap f(y).$$

   ∎

**Latici modulare**

**Definiţie 12.4** *Spunem că o latice $L$ este* ***modulară (dedekindiană)*** *dacă:*

$$\forall a, b, c \in L,\ a \leq c \Longrightarrow a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c.$$

**Observaţie 12.3** *O sublatice a unei latici modulare este modulară.*

**Exemplu 12.3** *Dacă $A = \{a, b, c\}$, atunci*

$$\mathcal{P}' = (\{A, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}\}, \subseteq)$$

*este o latice modulară.*

**Observaţie 12.4** *Laticea $L$ modulară dacă şi numai dacă*

$$[\forall a, b, c \in L,\ a \leq c \Longrightarrow a \vee (b \wedge c) \geq (a \vee b) \wedge c].$$

*Cealaltă inegalitate are loc mereu.*

**Teorema 12.4** ***(Teoremă de caracterizare).*** *Laticea $L$ este modulară dacă şi numai dacă*

$$\begin{cases} a \leq b \\ a \vee c = b \vee c \\ a \wedge c = b \wedge c \end{cases} \Longrightarrow a = b,$$

*unde $a, b, c \in L$.*

**Demonstraţie**. Să remarcăm mai întâi că ipoteza condiţiei trebuie satisfăcută de un anumit element $c$ din $L$, nu de orice element din $L$.

" $\Longrightarrow$ " Fie $a \leq b$, $a \vee c = b \vee c$, $a \wedge c = b \wedge c$.

Obţinem

$$\begin{cases} a \vee (b \wedge c) = a \vee (a \wedge c) = a \\ (a \vee c) \wedge b = (b \vee c) \wedge b = b. \end{cases}$$

Din $L$ modulară, rezultă pentru $a \leq b$, $a \vee (b \wedge c) = (a \vee c) \wedge c$.

Deci, $a = b$.

" $\Longleftarrow$ " Fie $a \leq c$ şi notăm $\begin{cases} a_1 = a \vee (b \wedge c) \\ c_1 = (a \vee b) \wedge c. \end{cases}$

În orice latice, pentru $a \leq c$ avem $a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge c$ (condiţia de submodularitate).

Deci, $a \leq a_1 \leq c_1 \leq c$.

Pentru a demonstra că $a_1 = c_1$, verificăm

$$\begin{cases} a_1 \vee b = c_1 \vee b; \\ a_1 \wedge b = c_1 \wedge b. \end{cases}$$

Din $a_1 \leq c_1$ rezultă $a_1 \vee b \leq c_1 \vee b$.
Din $a \leq a_1$ rezultă $c_1 = (a \vee b) \wedge c \leq a \vee b \leq a_1 \vee b$, deci $c_1 \leq a_1 \vee b$.
Dar $b \leq a_1 \vee b$, deci $c_1 \vee b \leq a_1 \vee b$. Aşadar, $a_1 \vee b = c_1 \vee b$.
Similar, $a_1 \wedge b = c_1 \wedge b$. Deci, $a_1 = c_1$. ■

**Teorema 12.5** ***(Teoremă de caracterizare).*** *Laticea $L$ este modulară dacă şi numai dacă $L$ nu conţine o sublatice formată din 5 elemente, izomorfă cu laticea pentagon.*

**Demonstraţie**.Rezultă din teorema precedentă.

■

**Exerciţii**

1. Arătaţi că mulţimea $\mathcal{N}(G)$ a subgrupurilor normale ale unui grup $G$ este latice modulară.

   **Soluţie**. În laticea $(\mathcal{N}(G), \cap, \vee)$ avem $N_1 \vee N_2 = N_1 \cdot N_2$.

   Verificăm condiţia de modularitate:

   $$\forall A \leq B,\ (C \cdot A) \cap B \subseteq (C \cap B) \cdot A.$$

   Fie $b \in (C \cdot A) \cap B$. Rezultă $b = c \cdot a$, $c \in C$, $a \in A$, de unde

   $$c = ba^{-1} \in B,\ \text{deci } c \in C \cap B.$$

   Dar, $a \in A$, deci $b \in (C \cap B) \cdot A$. ■

2. Laticea submodulelor unui $R-$modul este modulară.

**Latici distributive**

**Definiţie 12.5** *O latice $L$ este distributivă dacă*

$$\forall a, b, c \in L,\ (a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c).$$

**Observaţie 12.5** *Orice latice distributivă e modulară. Reciproca nu este valabilă.*

***Exemplu 12.4*** *Considerăm* $A = \{a, b, c\}$*. Atunci*

$$\mathcal{P}' = (\{A, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}\}, \subseteq)$$

*este o latice modulară, dar nu este distributivă:*

$$(\{a\} \vee \{b\}) \wedge \{c\} = A \wedge \{c\} = \{c\};$$
$$(\{a\} \wedge \{c\}) \vee (\{b\} \wedge \{c\}) = \emptyset \vee \emptyset = \emptyset.$$

**Observaţie 12.6** *O sublatice a unei latici distributive este distributivă.*

**Observaţie 12.7** *Laticea* $L$ *este distributivă dacă şi numai dacă*

$$\forall a, b, c \in L,\ (a \vee b) \wedge c \leq (a \wedge c) \vee (b \wedge c),$$

*pentru că în orice latice are loc inegalitatea inversă.*

***Exemplu 12.5*** *Tripletul* $(\mathcal{P}(M), \cup, \cap)$ *este o latice distributivă.*

**Teorema 12.6** ***(Teoremă de caracterizare)*** *Fie* $L$ *o latice. Are loc echivalenţa:*

*(a)* $L$ *distributivă;*

*(b)* $\forall a, b, c \in L$, $(a \wedge b) \vee c = (a \vee c) \wedge (b \vee c)$ *(duala egalităţii din definiţie).*

*(c)* $\forall a, b, c \in L$, $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c)$.

**Demonstraţie**. "1. $\Longrightarrow$ 2."

Din definiţie avem $(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$.

Notăm $(b \wedge c) = d$.

Deci,

$$(a \vee c) \wedge (b \vee c) = (a \wedge d) \vee (c \wedge d) = [a \wedge (b \vee c)] \vee [c \wedge (b \vee c)] =$$
$$\stackrel{\text{def.}}{=} (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee c = (a \wedge b) \vee c$$

(aplicăm 1. de două ori).

"2. $\Longrightarrow$ 3." Notăm $(a \wedge c) \vee (b \wedge c) = d$.

Avem

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c) \stackrel{2.}{=} (a \vee d) \wedge (b \vee d) =$$
$$= [a \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c)] \wedge [b \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c)] =$$

$$= [a \vee (b \wedge c)] \wedge [b \vee (b \wedge c)] \overset{2.}{=}$$

$$= (a \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee a) \wedge (b \vee c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c)\,.$$

"3. $\Longrightarrow$ 1." Presupunem $a \leq c$.

Atunci $a \wedge b \leq b \wedge c$.

Dar,

$$a \vee c = c \overset{3.}{\Longrightarrow} (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c) =$$

$$= (a \wedge c) \vee (b \wedge c) \overset{3.}{=} (a \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c) = (a \vee b) \wedge c,$$

deci obţinem 1. pentru $a \leq c$.

Notez cu $(*)$ egalitatea 1. pentu $a \leq c$.

În cazul general, notăm

$$\begin{cases} u = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c) \\ v = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c)\,. \end{cases}$$

Din 3., $u = v$ implică $c \wedge u = c \wedge v$.

Dar

$$c \wedge u = c \wedge [(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c)] \overset{(*)}{=}$$

$$= [c \wedge (a \wedge b)] \vee [c \wedge ((a \wedge c) \vee (b \wedge c))] = (a \wedge c) \vee (b \wedge c)\,.$$

Avem $c \vee v = c \wedge (a \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c) = c \wedge (a \vee b)$.

Deci, $\forall a, b, c \in L$, $(a \wedge b) \vee (b \wedge c) = c \wedge (a \vee b)$. ■

**Teorema 12.7** ***(Teoremă de caracterizare)***. *Fie $L$ o latice.*

*$L$ este distributivă* $\Longleftrightarrow$

$$\forall a, b, c \in L, \quad \left.\begin{matrix} a \vee c = b \vee c \\ a \wedge c = b \wedge c \end{matrix}\right\} \Longrightarrow a = b.$$

**Demonstraţie.** " $\Longrightarrow$ " Avem:

$a = a \wedge (a \vee c) = a \wedge (b \vee c) \overset{\text{ip.}}{=}$

$$= (a \wedge b) \vee (a \wedge c) = (a \wedge b) \vee (b \wedge c) \overset{\text{ip.}}{=} b \wedge (a \vee c) =$$

$$= b \wedge (b \vee c) = b.$$

" $\Longleftarrow$ " Conform teoremei anterioare, $L$ este modulară.

Avem

$a \wedge b \leq a \vee b \Longrightarrow (a \wedge b) \vee [c \wedge (a \vee b)] \stackrel{1.}{=} [(a \wedge b) \vee c] \wedge (a \vee b)$.

Avem

$b \wedge c \leq b \vee c \Longrightarrow (b \wedge c) \vee [a \wedge (b \vee c)] \stackrel{2.}{=} [(b \wedge c) \vee a] \wedge (b \vee c)$.

Vrem să arătăm că $u = v$.

Pentru aceasta verificăm că: $u \wedge b = v \wedge b$ şi $u \vee b = v \vee b$.

Avem

$$a \wedge b \leq b \stackrel{\text{mod.}}{\Longrightarrow} u \wedge b = [(a \wedge b) \vee (c \wedge (a \vee b))] \wedge b =$$

$$= (a \wedge b) \vee [c \wedge (a \vee b) \wedge b] = c \vee (b \wedge c)\,.$$

De asemenea,

$$b \wedge c \leq b \stackrel{\text{mod.}}{\Longrightarrow} v \wedge b = [(b \wedge c) \vee (a \wedge (b \vee c))] \wedge b =$$

$$= (b \wedge c) \vee [a \wedge (b \vee c) \wedge b] =$$

$$= (b \wedge c) \vee (b \wedge c) \vee\,.$$

Deci, $u \wedge b = v \wedge b$.

Similar, $u \vee b = v \vee b$.

Utilizând ipoteza, rezultă $u = v$, de unde $u \wedge a = v \wedge a$.

Dar,

$$u \wedge a = [(a \wedge b) \vee (c \wedge (a \vee b))] \wedge a \stackrel{\text{mod.}}{=}$$

$$= [(a \wedge b) \vee c] \wedge (a \vee b) \wedge a = a \wedge [(a \wedge b) \vee c] \stackrel{\text{mod.}}{=}$$

$$= (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

şi

$$v \wedge a = [(b \wedge c) \vee (a \wedge (b \vee c))] \wedge a \stackrel{\text{mod.}}{=}$$

$$= [(b \wedge c) \vee a] \wedge (b \vee c) \wedge a = (b \vee c) \wedge a.$$

Deci, $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$, $\forall a, b, c \in L$. ■

**Teorema 12.8** *Fie $L$ o latice. $L$ distributivă dacă şi numai dacă $L$ modulară şi $L$ nu conţine o sublatice izomorfă cu laticea diamant.*

**Latici Boole**

**Definiţie 12.6** *O latice se numeşte* ***Boole*** *sau* ***algebră Boole*** *dacă:*

$$\begin{cases} L \text{ distributivă;} \\ \exists 0 = \min L;\ \exists 1 = \max L; \\ \forall a \in L, \exists a' \in L : \begin{cases} a \vee a' = 1 \\ a \wedge a' = 0. \end{cases} \end{cases}$$

$a'$ *se numeşte* ***complementul*** *lui* $a$.

**Exemplu 12.6** *Tripletul* $(\mathcal{P}(M), \cup, \cap)$ *cu* $0 = \emptyset$, $1 = M$, $A' = CA$ *este o algebră Boole.*

**Observaţie 12.8** *Fie* $(M, \leq)$ *o mulţime total ordonată, astfel încât* $|M| > 2$ *şi* $M$ *are* $0$ *şi* $1$. *Nu rezultă de aici că toate elementele lui* $M$ *au complement.*

**Observaţie 12.9** *Dacă* $L$ *este latice Boole,* $\begin{cases} \wedge, \vee \text{ operaţii binare;} \\ 0, 1 \text{ operaţii nulare;} \\ x \to x' \text{ operaţie unară.} \end{cases}$

**Definiţie 12.7** *Fie* $L$ *o latice completă, adică* $\exists \bigwedge\limits_{i \in I} b_i, \exists \bigvee\limits_{i \in i} b_i$, *unde* $I$ *este o mulţime de indici arbitrară.*

$L$ *se numeşte* ***infinit distributivă*** *dacă* $\forall a \in L, \forall b_i \in L$, $i \in I$,

$$\begin{cases} a \wedge \left( \bigvee\limits_{i \in i} b_i \right) = \bigvee\limits_{i \in i} (a \wedge b_i); \\ a \wedge \left( \bigwedge\limits_{i \in I} b_i \right) = \bigwedge\limits_{i \in I} (a \vee b_i). \end{cases}$$

**Exemplu 12.7** *Orice sublatice completă a lui* $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$ *este infinit distributivă, pentru că:*

$$x \in A \cap \left( \bigcup_{i \in I} B_i \right) \iff \exists i : x \in A \cap B_i \iff x \in \bigcup_{i \in I} (A \cap B_i)$$

*şi cealaltă egalitate se obţine similar.*

**Exemplu 12.8** $(\mathbb{N}, |)$ *este latice completă cu:*

$$1 = \min(\mathbb{N}, |),\ 0 = \max(\mathbb{N}, |),\ \bigwedge_{x \in X \subseteq \mathbb{N}} x = cmmdc\ X$$

$$\bigvee_{x \in X \subseteq \mathbb{N}} x = \begin{cases} cmmmc\ X, & X \text{ finită} \\ 0, & X \text{ infinită.} \end{cases}$$

$(\mathbb{N}, |)$ *nu este infinit distributivă:*

$$\begin{cases} 2 \wedge \left[ \bigvee\limits_{k=1}^{\infty} (2k-1) \right] = 2 \wedge 0 = 2 \\ \bigvee\limits_{k=1}^{\infty} [2 \wedge (2k-1)] = 1. \end{cases}$$

*Să remarcăm că*

$$a \wedge \left( \bigvee_{i \in i} b_i \right) = \bigvee_{i \in i} (a \wedge b_i), \ a \vee \left( \bigwedge_{i \in I} b_i \right) = \bigwedge_{i \in I} (a \vee b_i)$$

*nu sunt echivalente, după cum se observă în exemplul dat mai sus.*

**Teorema 12.9** *Orice latice Boole completă este infinit distributivă.*

**Demonstraţie**. Avem

$$\bigvee_{i \in i} (a \wedge b_i) \leq \left( \bigvee_{i \in i} b_i \right) \wedge a.$$

Pentru inegalitatea inversă:

$$\begin{aligned} & b_i \leq a' \vee b_i = 1 \wedge (a' \vee b_i) = \\ & = (a' \vee a) \wedge (a' \vee b_i) \leq a' \vee \left[ \bigvee_{i \in i} (a \wedge b_i) \right] \text{ de unde} \\ & a \wedge \left( \bigvee_{i \in i} b_i \right) \leq a \wedge \left[ a' \vee \left[ \bigvee_{i \in i} (a \wedge b_i) \right] \right] = \\ & = (a \wedge a') \vee \left[ a \wedge \left[ \bigvee_{i \in i} (a \wedge b_i) \right] \right]. \end{aligned}$$

$$\text{Deci } a \wedge \left[ \bigvee_{i \in i} (a \wedge b_i) \right] \leq \bigvee_{i \in i} (a \wedge b_i), \text{ adică are loc egalitatea.}$$

Prin dualitate, se obţine cealaltă egalitate. ■

**Definiţie 12.8** *Fie $L' \subseteq L$ latice Boole. $L'$ se numeşte* ***sublatice Boole*** *a lui $L$, dacă:*

$$\begin{cases} a, b \in L' \text{ implică } a \vee b, a \wedge b \in L' \\ a \in L' \text{ implică } a' \in L'. \end{cases}$$

**Observaţie 12.10** *O sublatice a lui $\mathcal{P}(M)$ se numeşte inel de mulţimi.*

*O sublatice Boole a lui $\mathcal{P}(M)$ se numeşte corp de mulţimi.*

**Teorema 12.10** *Fie $(a_i)_{i\in I}$ o familie de elemente ale unei algebre Boolene $B$. Dacă, în egalităţi de mai jos, unul din cei doi membri există, atunci există şi celălalt membru şi au loc egalităţile:*

$$\left(\bigvee_{i\in i} a_i\right)' = \wedge a_i'; \; \left(\bigwedge_{i\in I} a_i\right)' = \vee a_i'.$$

**Demonstraţie**.

Presupunem că $\exists a = \vee a_i'$ deci $\forall i \in I$, $a_i \le a$, de unde $a' \le a_i'$, $\forall i \in I$.

Fie $b \le a_i'$, $\forall i \in I$. Obţinem $b' \ge a_i$, $\forall i \in i$ şi din definiţia lui $a$ rezultă $b' \ge a$ adică $b \le a'$.

Deci, $a' = \wedge a_i'$, adică are loc prima egalitate (dacă există primul membru).

Similar pentru egalitatea a doua.

Presupunem acum că există membrul drept din prima egalitate. Utilizând cea de a doua egalitate, $\exists \vee a_i'' = \vee a_i$, primul membru din prima egalitate şi suntem în situaţia anterioară. ■

**Definiţie 12.9** *O algebră Booleană $B$ este* ***complet distributivă*** *dacă $\forall\, (a_{ij})_{i\in I,\ j\in J}$ din $A$, ori de câte ori există un membru al egalităţi de mai josi, atunci există şi celălalt şi ele sunt egale.*

$$\bigwedge_{i\in I}\left(\bigvee_{j\in J} a_{ij}\right) = \bigvee_{\alpha : I\to J}\left(\bigwedge_{i\in I} a_{i\alpha(i)}\right),$$

**Exemplu 12.9** *$\mathcal{P}(A)$ este latice completă şi complet distributivă, pentru orice mulţime $A$.*

**Exemplu 12.10** *Orice algebră Boole finită este completă şi complet distributivă.*

**Teorema 12.11** ***(Tarski).*** *O algebră Booleană completă şi complet distributivă este izomorfă cu $\mathcal{P}(A)$, unde $A$ este o anume mulţime.*

*Indicaţie de demonstrare: Se consideră $B$ o algebră Booleană completă şi complet distributivă,*

$$f(C) = \left(\bigwedge_{a\in C} a\right) \wedge \left(\bigwedge_{a\notin C} a\right) \in B \text{ şi}$$

$$A = \{f(C) \mid C \subseteq B \ ,\ f(C) \ne 0\}.$$

**Exerciţii**

(a) Într-o latice Boole, complementul este unic.

**Soluţie**. Fie $\begin{cases} a \vee a' = 1 = a \vee a'' \\ a \wedge a' = 0 = a \wedge a'' \end{cases}$, unde $a$ este element al unei latici Boole.

Avem $a' = a' \wedge 1 = a' \wedge (a \vee a'') \overset{\text{distr.}}{=} (a' \wedge a) \vee (a' \wedge a'') = a' \wedge a''$ de unde $a' \leq a''$ şi similar obţinem cealaltă inegalitate.

Deci, $a' = a''$. ∎

(b) Într-o latice Boole, au loc proprietăţile următoare, pentru orice $a$ şi $b$:

- $0' = 1$; $1' = 0$,
- $(a')' = a$,
- formulele lui de Morgan: $\begin{cases} (a \vee b)' = a' \wedge b' \\ (a \wedge b)' = a' \vee b', \end{cases}$
- $a \leq b \Longrightarrow b' \leq a'$,
- $a \leq b \Longrightarrow a \wedge b' = 0$ şi $a' \vee b = 1$.

**Soluţie**. Avem $0 \vee 1 = 1; 0 \wedge 1 = 0$, deci $0' = 1$, $1' = 0$.

Apoi $a' \vee a = 1, a' \wedge a = 0$, de unde $(a')' = a$.

Pentru formulele lui De Morgan:

$$(a' \wedge b') \vee (a \vee b) = (a' \vee c) \wedge (b' \vee c) =$$

$$= (a' \vee a \vee c) \wedge (b' \vee a \vee b) = 1$$

şi

$$(a' \wedge b') \wedge (a \vee b) = a' \wedge [(a \vee b) \wedge b'] = a' \wedge (a \wedge b') \vee (b \wedge b') = 0.$$

Deci, $a' \wedge b' = (a \vee b)'$.

Similar, se obţine cealaltă egalitate.

Apoi, are loc şirul de implicaţii: $a \leq b \Longrightarrow a \wedge b = a \overset{\text{de Morgan}}{\Longrightarrow} a' \vee b' = a' \Longrightarrow b' \leq a'$.

În final, din $a \leq b$ rezultă $a \wedge b' \leq b \wedge b' = 0$ deci $a \wedge b' = 0$ şi
$a \vee a' \leq a' \vee b$ de unde $a' \vee b = 1$.

∎

(c) Laticile cu două elemente sunt algebre Boole.

**Soluţie.** Fie $L = \{a, b\}$ şi presupunem că $a \vee b = b$ adică $a \leq b$. Avem $a' = b$, $b' = a$. ∎

(d) Mulţimea propoziţiilor din logica propoziţională formează o algebră Boole.

**Soluţie.** Două propoziţii sunt egale dacă au aceeaşi valoare de adevăr. În această latice, elementul 0 este orice propoziţie falsă, iar elementul 1 este orice propoziţie adevărată.

Dacă $a, b$ sunt propoziţii, putem forma propoziţiile $a \vee b$, $a \wedge b$, iar $a'$ este negaţia lui $a$. ■

(e) Fie $L$ o latice distributivă şi $I = [a, b] \subseteq L$. Mulţimea elementelor din $I$ care au complement în $I$ formează o algebră Booleană.

(f) Fie $R$ un inel cu 1, în care orice element este idempotent, adică $\forall x \in R,\ x^2 = x$ ( un astfel de inel se numeşte *inel Boolean.*) Definim pe $R$ : $\begin{cases} x \wedge y = xy \\ x' = 1 - x \end{cases}$ de undeobţinem $x \vee y = x + y - xy$.

Atunci $(R, \vee, \wedge, \ ')$ este algebră Boole.

Să remarcăm că într-un inel Boolean $R$, avem $car\ R = 2$.

Într-adevăr, avem $(x+y)^2 = x + y$ de unde $xy + yx = 0$. Pentru $y = x$ obţinem $2x = 0$ deci $x = -x$. Aşadar, $xy = yx,\ \forall x, y \in R$ de unde $car\ R = 2$.

(g) Dacă într-o algebră Boole definim:

$$\begin{cases} xy = x \wedge y \\ x + y = (x \wedge y') \vee (x' \wedge y) \end{cases},$$

atunci $(R, +, \cdot)$ este inel Boolean. ■

(h) Fie $(L, \leq)$ o latice completă. Dacă $f : L \to L$ este un morfism de ordine, atunci există $a \in L$, astfel încât $f(a) = a$.

**Soluţie.** Notăm $P = \{x \in L \mid x \leq f(x)\}$. Mulţimea $P$ este nevidă, deoarece $infL \in P$. Dar, laticea $L$ este completă, deci există $supP$ pe care îl notăm cu $a$. Avem $x \leq a, \forall x \in P$. Rezultă $x \leq f(x) \leq f(a), \forall x \in P$, de unde $f(a)$ este majorant pentru $P$. Aşadar, $a \leq f(a)$, adică $a \in P$, de unde $f(a) \leq f(f(a))$. Deci, $f(a) \in P$, din care $f(a) \leq a$. Deci $f(a) = a$.

(i) Fie $(P, \leq)$ o mulţime parţial ordonată, în care există $\inf H,\ \forall H \subseteq P$. Să se arate că $(P, \leq)$ este o latice.

**Soluţie**. Din ipoteză, $\forall a, b \in P$, $\exists \inf\{a, b\}$.

Fie $H$ mulţimea tuturor mulţimilor majoranţilor mulţimii $\{a, b\}$.

Atunci $\sup\{a, b\} = \inf H$. Într-adevăr,

i. $a \leq h$, $b \leq h$, $\forall h \in H$ implică $a, b \leq \inf H$;

ii. Fie $c$ încât $a \leq c$, $b \leq c$, de unde $c \in H$, deci $\inf H \leq c$.

■

# 13 Curs şi seminar 13 - Sisteme şi operatori de închidere

Sistemele de închidere sunt latici complete particulare, pe care le vom analiza în acest capitol, în conexiune cu operatorii de închidere. În particular, mulţimea subalgebrelor unei algebre universale şi mulţimea congruenţelor sale sunt sisteme de închidere.

**Definiţie 13.1** *Numim **sistem de închidere** pe $A$ o submulţime $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(A)$, astfel încât orice intersecţie de elemente din $\mathcal{C}$ este tot în $\mathcal{C}$, adică:*

$$\forall \mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}, \ \bigcap_{A' \in \mathcal{D}} A' \in \mathcal{C}.$$

**Observaţie 13.1** *Dacă $\mathcal{D} = \emptyset$ atunci prin convenţie $\bigcap\limits_{A' \in \emptyset} A' = A \in \mathcal{C}$, deci $A \in \mathcal{C}$, pentru orice sistem de închidere $\mathcal{C}$. Cu alte cuvinte,* $\inf \emptyset$ *în $(\mathcal{C}, \subseteq)$ este $A \in \mathcal{C}$.*

**Teorema 13.1** *(a) $(\mathcal{C}, \subseteq)$ este o latice completă;*

*(b) $\mathcal{C}$ nu este în general o sublatice a lui $\mathcal{P}(A)$.*

**Demonstraţie.**

(a) Folosim rezultatul: " Mulţimea ordonată $(A, \leq)$ este o latice dacă şi numai dacă $\forall B \subseteq A$, $\exists \inf B$, iar în acest caz laticea este completă.".
Să arătăm că $\exists \sup B$.
Fie $C$ mulţimea majoranţilor lui $B$ în $A$.
Fie $a = \inf C$. Pe de altă parte, $\forall b \in B, \forall c \in C$, $b \leq c$, deci $\forall b \in B$, $b \leq a$; dacă $\forall b \in B$, $b \leq a'$ atunci $a' \in C$, de unde $a \leq a'$. Deci, $a = \sup B$.

(b) Fie $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$. Este posibil ca $\sup_{\mathcal{P}(A)} \mathcal{D} \neq \sup_{\mathcal{C}} \mathcal{D}$, pentru că $\sup_{\mathcal{C}} \mathcal{D}$ este infimul mulţimii majoranţilor lui $\mathcal{D}$ în $\mathcal{C}$, adică
$\sup_{\mathcal{C}} \mathcal{D} = \cap \{Y \in \mathcal{C} \mid \forall X \in \mathcal{D}, \quad X \subseteq Y\}$ deci $\sup_{\mathcal{C}} \mathcal{D} \in \mathcal{C}$, în timp ce $\sup_{\mathcal{P}(A)} \mathcal{D} = \bigcup\limits_{x \in \mathcal{D}} X$.
Pe de altă parte, $\inf_{\mathcal{C}} \mathcal{D} = \inf_{\mathcal{P}(A)} \mathcal{D} = \bigcap\limits_{x \in \mathcal{D}} X \in \mathcal{C}$.

■

**Exemplu 13.1** *Mulţimea relaţiilor reflexive (simetrice, tranzitive) pe $A$ sunt sisteme de închidere pe $A \times A$.*

**Exemplu 13.2** *Dacă $A$ este un spaţiu topologic, atunci mulţimea submulţimilor închise ale lui $A$ formează un sistem de închidere. Acest sistem este închis la reuniuni finite.*

*Orice sistem de închidere $\mathcal{C}$, care satisface condiţia $\forall A, B \in \mathcal{C}$, $A \cup B \in \mathcal{C}$, se numeşte **topologic**.*

## Operatori de închidere

**Definiţie 13.2** *$J : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ se numeşte* ***operator de închidere*** *pe mulţimea $A$, dacă satisface următoarele condiţii:*

*(a) extensivitate: $\forall X \in \mathcal{P}(A),\ X \subseteq J(X)$;*

*(b) monotonie: $X, Y \in \mathcal{P}(A),\ X \subseteq Y \Longrightarrow J(X) \subseteq J(Y)$;*

*(c) idempotenţă: $\forall X \in \mathcal{P}(A),\ J(J(X)) \subseteq J(X)$.*

*$J(X)$ se numeşte* ***închiderea*** *lui $X$.*

*$X$ se numeşte* ***închisă*** *dacă $J(X) = X$.*

**Observaţie 13.2** *Din definiţie rezultă $\forall X \in \mathcal{P}(A),\ J(J(X)) = X$.*

**Teorema 13.2** *Fie $\mathcal{C}$ un sistem de închidere pe $A$,*

$$\begin{cases} J : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A) \\ X \rightsquigarrow \cap \{Y \in \mathcal{C} \mid \forall x \in \mathcal{D}, \quad X \subseteq Y\} \end{cases}$$

*Atunci $J$ este operator de închidere.*

*$J(X)$ este cea mai mică submulţime din $\mathcal{C}$, în care $X$ este inclusă.*

**Demonstraţie**. Verificăm condiţiile definiţiei precedente.

**1.** Rezultă imediat.

**2.** Fie $X \subseteq Z$. Atunci

$J(Z) = \cap \{Y \in \mathcal{C} \mid \forall x \in \mathcal{D}, \quad X \subseteq Z \subseteq Y\} \supseteq J(X)$.

**3.** Arătăm că

$$J(X) = X \iff X \in \mathcal{C}. \qquad (*)$$

" $\Longrightarrow$ " : $J(X) = X$ implică $X = \cap \{Y \in \mathcal{C} \mid X \subseteq Y\}$ deci $X \in \mathcal{C}$.

" $\Longleftarrow$ " : $X \in \mathcal{C}$, deci $X$ este un $Y$, de unde $J(X) \subseteq X \subseteq J(X)$.

Cum $J(X) \in \mathcal{C}$ rezultă, în baza lui $(*)$, că $J(J(X)) = J(X)$.

■

**Teorema 13.3** *Fie $J : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ un operator de închidere. Dacă $\mathcal{C} = \{X \subseteq A \mid J(X) = X\}$, atunci $\mathcal{C}$ este sistem de închidere pe $A$.*

**Demonstraţie.**

Fie $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$ şi $X = \bigcap_{X' \in \mathcal{D}} X'$. Atunci $X \subseteq X'$, $\forall X' \in \mathcal{D}$, de unde $J(X) \subseteq J(X')$ deci $J(X) \subseteq \bigcap_{X' \in \mathcal{D}} X' = X \subseteq J(X)$, adică $J(X) = X$ de unde $X \in \mathcal{C}$. ■

**Teorema 13.4** *Fie $A$ o mulţime nevidă. Există o corespondenţă bijectivă între mulţimea sistemelor de închidere şi mulţimea operatorilor de închidere.*

**Demonstraţie.** " $\Longrightarrow$ " : Fie $\mathcal{C}$ un sistem de închidere pe $A$. Îi asociem operatorul:

$$\begin{cases} J : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A) \\ X \rightsquigarrow \cap \{Y \in \mathcal{C} \mid X \subseteq Y\} \end{cases}.$$

Avem $J(X) = X \iff X \in \mathcal{C}$. Asociem acum operatorului $J$ sistemul de închidere $\mathcal{C}' = \{X \subseteq A \mid J(X) = X\}$. Aşadar, $\mathcal{C}' = \mathcal{C}$.

" $\Longleftarrow$ " : Fie $J$ un operator de închidere şi îi asociem sistemul de închidere $\mathcal{C} = \{X \subseteq A \mid J(X) = X\}$, apoi acestuia operatorul $J' : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$.

$J'(X) = \{Y \in \mathcal{C} \mid X \subseteq Y\}$. Avem

$$J'(X) = X \iff X \in \mathcal{C} \overset{\text{def. } \mathcal{C}}{\iff} J(X) = X.$$

Dar $\forall X \subseteq A$, $J(J(X)) = J(X)$ de unde $J'(J(X)) = J(X)$.

Din $X \subseteq J(X)$ rezultă $J'(X) \subseteq J'(J(X)) = J(X)$, deci $J'(X) \subseteq J(X)$, $\forall X$.

Analog raţionăm pentru " $\supseteq$ ". Deci, $J = J'$. ■

**Definiţie 13.3** *Fie $J$ un operator de închidere pe $A$. $J$ se numeşte **algebric** dacă:*

*$\forall a \in A$, din $a \in J(X)$ rezultă că există o submulţime finită $X_f \subseteq X$, astfel încât $a \in J(X_f)$.*

*$\mathcal{C}$ este **sistem de închidere algebric** dacă $J$ (asociat lui $\mathcal{C}$) este algebric.*

**Teorema 13.5** *Dacă $J$ operator de închidere pe $A$, atunci $J$ este algebric dacă şi numai dacă $\forall X \subseteq A$, $J(X) = \cup \{J(X_f) \mid X_f \subseteq X\}$.*

**Demonstraţie.** " $\Longleftarrow$ ": Imediat.

" $\Longrightarrow$ ": Fie $a \in J(X)$. Rezultă că $\exists X_f \subseteq X : a \in J(X_f)$, de unde $J(X) \subseteq \cup \{J(X_f) \mid X_f \subseteq X\}$.

Invers, din $X_f \subseteq X$ rezultă $J(X_f) \subseteq J(X)$ deci

$$\cup \{J(X_f) \mid X_f \subseteq X\} \subseteq J(X).$$

Aşadar, are loc egalitatea. ■

**Teorema 13.6** *Fie $\mathcal{C}$ sistem de închidere pe $A$. Atunci $\mathcal{C}$ este algebric dacă şi numai dacă*

$$\forall \mathcal{D} \neq \emptyset,\ \mathcal{D} \subseteq \mathcal{C},\ \mathcal{D} \text{ dirijată la dreapta, } \bigcup_{X \in \mathcal{D}} X \in \mathcal{C}.$$

**Demonstraţie.** " $\Longrightarrow$ " : Fie $K = \bigcup_{X \in \mathcal{D}} X$.

Considerăm $J$ operatorul de închidere definit de $\mathcal{C}$.

Avem

$$J(K) = K \iff K \in \mathcal{C}.$$

Arătăm că $J(K) = K$ ( $\iff J(K) \subseteq K$).

Fie $x \in J(K)$. Cum $J$ este algebric, rezultă că

$$\exists K_f = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq K :\ x \in J(K_f).$$

Din $x_i \in K = \bigcup_{X \in \mathcal{D}} X$ rezultă că $\exists X_i \in \mathcal{D} : x_i \in X_i,\ \forall i = \overline{1,n}$, dar $\mathcal{D}$ este dirijată la dreapta, deci

$$\exists X \in \mathcal{D} : x_i \in X, \forall i = \overline{1,n} \text{ adică } K_f \subseteq X.$$

Din $x \in J(K_f)$ rezultă $x \in J(X) \overset{X \in \mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}}{=} X \subseteq K$ deci $x \in K$, adică $J(K) \subseteq K$.

" $\Longleftarrow$ " : Fie $X \subseteq A$ şi $\mathcal{D} = \{J(X_f) \mid X_f \subseteq X \text{ finită}\} \subseteq \mathcal{C}$, pentru că $J(J(X_f)) = J(X_f)$.

Arătăm că $\mathcal{D}$ este dirijată la dreapta. Din $J(X_f), J\left(X'_f\right) \in \mathcal{D}$ rezultă $J\left(X_f \cup X'_f\right) \subseteq \mathcal{D}$, unde $J\left(X_f \cup X'_f\right)$ include $J(X_f), J\left(X'_f\right)$.

Rezultă din ipoteză că $Y = \bigcup_{J(X_f) \in \mathcal{D}} J(X_f) \in \mathcal{C}$, dar $J(X_f) \subseteq J(X)$ deci $Y \subseteq J(X)$.

Cum $X = \bigcup_{X_f \subseteq X} X_f \subseteq \bigcup_{X_f \subseteq X} J(X_f) = Y$ avem $X \subseteq Y$ şi deci $J(X) \subseteq J(Y) = Y \subseteq J(X)$, pentru că $Y \in \mathcal{C}$.

Deci, $J(X) = Y = \bigcup_{J(X_f) \in \mathcal{D}} J(X_f) = \bigcup_{X_f \subseteq X} J(X_f)$ de unde $J(X) = \bigcup_{X_f \subseteq X} J(X_f)$ adică $J$ este un operator algebric. ■

**Laticea subalgebrelor unei algebre universale**

Fie $(A, \Omega)$ o algebră universală, iar $S(A, \Omega)$ mulţimea subalgebrelor sale.

**Teorema 13.7** *$S(A,\Omega)$ este un sistem de închidere algebric pe $A$.*

**Demonstraţie.** Fie $\mathcal{C} \subseteq S(A,\Omega)$, $C = \bigcap_{B\in\mathcal{C}} B$.

Arătăm că $C$ este o subalgebră a lui $(A,\Omega)$.

Fie $\omega \in \Omega$; $x_1,\ldots,x_{\tau(\omega)} \in C \subseteq B$, $\forall B \in \mathcal{C}$.

Cum $B$ este o subalgebră, rezultă că

$$\omega(x_1,\ldots,x_{\tau(\omega)}) \in B,\ \forall B \in \mathcal{C},$$

de unde $\omega(x_1,\ldots,x_{\tau(\omega)}) \in C$. Deci, $S(A,\Omega)$ este un sistem de închidere pe $A$.

Verificăm algebricitatea sistemului de închidere, adică arătăm că $\forall \mathcal{D} \subseteq S(A,\Omega)$, unde $\mathcal{D}$ este nevidă şi dirijată la dreapta,

$$E = \bigcup_{B\in\mathcal{D}} B \in S(A,\Omega).$$

Fie $\omega \in \Omega$; $x_1,\ldots,x_{\tau(\omega)} \in E$, adică $\forall i \in \overline{1,\tau(\omega)}, \exists B_i \in \mathcal{D} : x_i \in B_i$. Din faptul că $\mathcal{D}$ este dirijată la dreapta, rezultă că există $B' \in \mathcal{D} : \forall i, B_i \subseteq B'$. Astfel, $\forall i, x_i \in B'$, de unde $\omega(x_1,\ldots,x_{\tau(\omega)}) \in B' \subseteq E$.

Deci, $E \in S(A,\Omega)$, adică $S(A,\Omega)$ este un sistem de închidere algebric pe $A$.

■

**Observaţie 13.3** *$S(A,\Omega)$ nu este sublatice a lui $(\mathcal{P}(A),\subseteq)$, pentru că sup$(S_1,S_2) \neq S_1 \cup S_2$.*

**Observaţie 13.4** *Fie $\mathcal{C}$ un sistem de închidere algebric pe $A$. Atunci $\mathcal{C}$ este sublatice a lui $(\mathcal{P}(A),\subseteq)$ dacă şi numai dacă $\mathcal{C}$ este sistem de şinchidere topologic.*

Fie $J_\Omega : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ operatorul de închidere corespunzător lui $S(A,\Omega)$ . Atunci

$$\forall X \subseteq A,\ J_\Omega(X) = \cap\{B \in S(A,\Omega) \mid X \subseteq B\}.$$

este *subalgebra generată* de $X \subseteq A$.

$X$ se numeşte *mulţime de generatori.*

$J_\Omega(\emptyset)$ este subalgebra minimală a lui $(A,\Omega)$.

$J_\Omega(\emptyset) = \emptyset$ dacă şi numai dacă $\Omega$ nu are operaţii nulare.

**Laticea congruenţelor unei algebre universale**

Fie $(A, \Omega)$ o algebră universală, iar $C(A, \Omega)$ mulţimea congruenţelor sale.

**Teorema 13.8** *$C(A, \Omega)$ este un sistem de închidere algebric pe $A^2$.*

**Demonstraţie.** Fie $\mathcal{C} \subseteq C(A, \Omega)$, $q = \bigcap\limits_{\rho \in \mathcal{C}} \rho$. Deci $q$ este o echivalenţă. Arătăm că $q$ este o congruenţă, adică verificăm că

$$q \underset{\text{subalg.}}{\leq} \left(A^2, \Omega\right).$$

Din $\rho \leq \left(A^2, \Omega\right)$ şi $S\left(A^2, \Omega\right)$ sistem de închidere pe $A^2$, rezultă

$$\bigcap_{\rho \in \mathcal{C}} \rho = q \leq \left(A^2, \Omega\right),$$

deci $q$ este o congruenţă.

Verificăm algebricitatea sistemului de închidere, adică arătăm că $\forall \mathcal{D} \subseteq C(A, \Omega)$, unde $\mathcal{D}$ este nevidă şi dirijată la dreapta, $\delta = \bigcup\limits_{\rho \in \mathcal{D}} \rho \in C(A, \Omega)$.

Avem echivalenţa $\rho \in \mathcal{D} \subseteq C(A, \Omega) \iff \rho \leq \left(A^2, \Omega\right)$ şi cum $S\left(A^2, \Omega\right)$ este sistem de închidere algebric pe $A^2$, rezultă $\delta = \bigcup\limits_{\rho \in \mathcal{D}} \rho \leq \left(A^2, \Omega\right)$.

Mai rămâne de arătat că $\delta$ este o echivalenţă. Din $\delta = \bigcup\limits_{\rho \in \mathcal{D}} \rho$, $\rho$ echivalenţă, rezultă că $\delta$ este reflexivă şi simetrică.

Să verificăm acum că $\delta$ este tranzitivă.

Fie $x\delta y$, $y\delta z$ deci $\exists \rho_1, \rho_2 \in \mathcal{D} : x\rho_1 y$, $y\rho_2 z$; pe de altă parte, $\exists \rho : \rho_1 \subseteq \rho$, $\rho_2 \subseteq \rho$. Obţinem $x\rho z$, de unde $x\delta z$. Deci, $\delta \in C(A, \Omega)$, adică $C(A, \Omega)$ este un sistem de închidere algebric pe $A^2$. ■

$C(A, \Omega)$ este o latice completă, iar cel mai mare element al său este $A^2$. Cel mai mic element este $\Delta_A = \{(x, x) \mid x \in A\}$.

**Exerciţii**

(a) Mulţimea $\mathcal{F}$ a filtrelor unei latici $L$ este un sistem de închidere algebric pe $L$.

**Soluţie.**

**1.** Fie $F_i \in \mathcal{F}$, $\forall i \in I$ şi $F = \bigcap\limits_{i \in I} F_i$.

Arătăm că $F \in \mathcal{F}$.

Reamintim definiţia unui filtru:

$$\begin{cases} x, y \in F \Longrightarrow x \wedge y \in F \\ x \in F, y \geq x,\ y \in L \Longrightarrow y \in F \end{cases} \iff$$

$$[x, y \in F \iff x \wedge y \in F]\,.$$

Avem şirul de echivalenţe :
$x, y \in F \iff \forall i \in I,\, x, y \in F_i$ filtru $\iff \forall i \in I,\, x \wedge y \in F_i \iff x \wedge y \in F = \bigcap\limits_{i \in I} F_i$.
Deci, $F$ este un filtru.
Rezultă că $\mathcal{F}$ este un sistem de închidere pe $L$.
**2.** Algebricitatea: Fie $(F_i)_{i \in I}$ o familie de filtre dirijată la dreapta şi $\overline{F} = \bigcup\limits_{i \in I} F_i$. Arătăm că $\overline{F} \in \mathcal{F}$.
Fie $x, y \in \overline{F}$. Rezultă că $\exists i_1, i_2$ astfel încât $x \in F_{i_1}$, $y \in F_{i_2}$ şi cum familia este dirijată la dreapta, rezultă $\exists F_j$ astfel încât $F_{i_1} \subset F_j$, $F_{i_2} \subset F_j$.
Deci $x, y \in F_j$ de unde $x \wedge y \in F_j \subset \overline{F}$.
Fie acum $x \in F_i$, $y \geq x$ de unde $y \in F_i$. Deci, $\overline{F} \in \mathcal{F}$. ■

(b) Fie $L$ o latice distributivă şi $(\mathcal{F}, \subseteq)$ laticea filtrelor sale. Atunci $\forall F_1, F_2 \in \mathcal{F}$,

$$F_1 \vee F_2 = \{x \wedge y \mid x \in F_1, y \in F_2\}\,.$$

**Soluţie.**
**1.** Notăm $A = \{x \wedge y \mid x \in F_1, y \in F_2\}$.
Arătăm că $A \in \mathcal{F}$.

- $x_1 \wedge y_1, x_2 \wedge y_2 \in A$ implică

$$(x_1 \wedge y_1) \wedge (x_2 \wedge y_2) = (x_1 \wedge x_2) \wedge (y_1 \wedge y_2) \in A.$$

- $x \wedge y \in A$, $z \geq x \wedge y$ implică $z \in A$. Într-adevăr, din $z \geq x \wedge y$ rezultă

$$z = z \vee (x \wedge y) \overset{\text{distr.}}{=} (z \vee x) \wedge (z \vee y) \in A.$$

**2.** $A$ majorantă în $\mathcal{F}$ pentru $F_1$ şi $F_2$. Într-adevăr,
dacă $x \in F_1, y \in F_2$ atunci $x \wedge y \in A$, $x \wedge y \leq x$ de unde $x \in A$ adică $F_1 \subseteq A$. Analog, $F_2 \subseteq A$.
**3.** Fie $F \in \mathcal{F}$, $F_1 \subseteq F$, $F_2 \subseteq F$. Arătăm că $A \subseteq F$. Fie $x \in F_1,\ y \in F_2$. Avem $x \wedge y \in A$, de unde $x \wedge y \in F$ deci $A \subseteq F$.

Aşadar, $A = F_1 \vee F_2$. ■

**Observaţie 13.5** *$F_1 \wedge F_2 = F_1 \cap F_2$.*

# 14 Curs şi seminar 14 - Algebra $\Omega-$cuvintelor

Fie $\Omega$ o mulţime de operaţii, iar $X$ o altă mulţime. În cele ce urmează, considerăm $X \cap \Omega = \emptyset$.

**Definiţie 14.1** *Un $\Omega-$şir în $X$ este un* ***şir finit*** *(adică o $n-$uplă pentru $n \geq 1$) de elemente ale reuniuii (disjuncte) $\Omega \cup X$.*

*Notăm cu $W(\Omega, X)$ mulţimea tuturor $\Omega$-şirurilor în $X$.*

Definim pe $W(\Omega, X)$ o structură de $\Omega-$algebră, prin **juxtapunere**.

Fie $\omega \in \Omega(n)$ (adică $\omega$ are tipul $n$) , $a_i \in W(\Omega, X)$, $i = \overline{1,n}$, $a_i = (a_{i1}, \ldots, a_{ik_i})$, $a_{ij} \in \Omega \cup X$, $j = \overline{1, k_i}$ şi notăm

$$\omega(a_1, \ldots, a_n) = (\omega, a_{11}, \ldots, a_{1k_1}, \ldots, a_{n1}, \ldots, a_{nk_n}).$$

Se identifică $\Omega-$şirurile care au un singur element cu acel element din $\Omega \cup X$, deci $\Omega \cup X \subseteq W(\Omega, X)$.

**Definiţie 14.2** *$W(\Omega, X)$ se numeşte* ***algebra** $\Omega-$**cuvintelor*** *pe $X$, notată şi $W_\Omega(X)$.*

*Elementele acestei algebre se numesc $\Omega-$**cuvinte** în $X$.*

*$X$ este* ***alfabetul*** *algebrei.*

**Teorema 14.1** *Fie $X, Y$ mulţimi. Atunci $W_\Omega(X) \simeq W_\Omega(Y)$ dacă şi numai dacă $X$ este echipotent cu $Y$.*

**Demonstraţie**. " $\Longleftarrow$ " : Fie $\theta : X \to Y$ o bijecţie.

În fiecare $\Omega-$şir înlocuim $x \in X$ cu $\theta(x) \in Y$.

Obţinem o bijecţie $f$ între $W(\Omega, X)$ şi $W(\Omega, Y)$.

Să verificăm condiţiile de morfism:

$$f(\omega(x_1, \ldots, x_n)) \overset{\text{def. } f}{=} \omega(\theta(x_1), \ldots, \theta(x_n)) =$$

$$= \omega(f(x_1), \ldots, f(x_n))$$

.

Deci $f$ este un izomorfism.

" $\Longrightarrow$ " : Fie acum $W_{\Omega}(X) \simeq W_{\Omega}(Y)$.

Pe orice algebră $(A, \Omega)$ putem defini congruenţa:

$$aqb \iff \begin{array}{l} a = b \text{ sau} \\ \left[ \begin{array}{ll} a = \omega(x), & x \in A^n,\ \omega \in \Omega(n) \\ b = \overline{\omega}(y), & y \in A^m,\ \overline{\omega} \in \Omega(m). \end{array} \right. \end{array}$$

Notăm $A^{\circ} = A/q$, deci $W^{\circ} = W_{\Omega}(X)/q$.

$W^{\circ}$ constă în:

$$\begin{cases} \text{-clase cu câte un element din } X; \\ \text{-într-o altă clasă, ce conţine toate celelalte elemente} \end{cases}$$

Rezultă că $|W^{\circ}| = |X| + 1$.

Cum $W_{\Omega}(X) \simeq W_{\Omega}(Y)$ rezultă $\left|W_{\Omega}(X)^{\circ}\right| = \left|W_{\Omega}(Y)^{\circ}\right|$ de unde

$|X| + 1 = |Y| + 1$, deci $|X| = |Y|$. ■

**Observaţie 14.1** *Izomorfismul $f : W_{\Omega}(X) \to W_{\Omega}(Y)$ este unic determinat de $\theta$.*

**Teorema 14.2** *Fie $(A, \Omega)$ o algebră universală şi $X$ o mulţime de generatori pentru $(A, \Omega)$. Atunci, pentru orice morfism de algebre universale $\theta : A \to B$ , $\theta$ este complet determinat de restricţia $\theta/X$.*

**Demonstraţie**.

Presupunem că $\exists \theta_1, \theta_2 : A \to B$, $\theta_1 \neq \theta_2$, dar $\theta_1/X = \theta_2/X$.

Fie $A' = \{x \in A \mid \theta_1(x) = \theta_2(x)\}$.

Arătăm că $A' = A$. Mai întâi, verificăm că $A' \leq A$ :

Fie $(x_1, \ldots, x_n) \in (A')^n$. Rezultă că $\theta_1(x_i) = \theta_2(x_i)$, $\forall i = \overline{1, n}$ şi cum $\theta_1, \theta_2$ sunt morfisme, obţinem

$$\theta_1(\omega(x_1, \ldots, x_n)) = \omega(\theta_1(x_1), \ldots, \theta_1(x_n)) = \theta_2(\omega(x_1, \ldots, x_n)).$$

Deci $\omega(x_1, \ldots, x_n) \in A'$ de unde $A' \leq A$.

Dar $X \subseteq A' \leq A = \langle X \rangle$, aşadar $A' = A$, contradicţie cu $\theta_1 \neq \theta_2$.

■

**Teorema 14.3** *Orice algebră universală $(A, \Omega)$ poate fi privită ca imaginea homomorfică a unei algebre de $\Omega-$cuvinte $W_{\Omega}(X)$, unde $X$ e o mulţime convenabil aleasă.*

**Demonstraţie**.

Fie $X$ o mulţime de generatori pentru $A$. Extindem $i : X \to A$ la $\theta : W_{\Omega}(X) \to A$. Avem $X \subset \operatorname{Im}\theta \leq A = \langle X \rangle$ de unde $\operatorname{Im}\theta = A$.

$X$ este bază în $W_{\Omega}(X)$ şi $X$ este totodată o mulţime de generatori în $A$.

■

Algebra universală $W_{\Omega}(X)$ se mai numeşte *algebră universală liberă* de baza $X$.

**Functorul universal** Mai întâi, considerăm diagrama următoare:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d] & U(X) \arrow[dl, dashed, "\exists!"] \\
A &
\end{tikzcd}$$

ce satisface *proprietatea de universalitate*:

$\forall A \in \Omega$, $\forall \theta : X \to A$, $\exists! \overline{\theta} : W_{\Omega}(X) \to A$ astfel încât $\overline{\theta} i = \theta$.

Fie $U : \mathrm{Set} \to \Omega$, definit astfel $U(X) = W_{\Omega}(X)$ şi considerăm diagrama:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "i_X"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, "i_Y \alpha"'] & W_{\Omega}(X) \arrow[d, "U(\alpha)"] \\
Y \arrow[r, "i_Y"] \arrow[d, "\beta"'] & W_{\Omega}(Y) \arrow[d, "U(\beta)"] \\
Z \arrow[r, "i_Z"] & W_{\Omega}(Z)
\end{tikzcd}$$

Verificăm că $U$ este functor. Avem

$\begin{cases} U(\alpha)\, i_X = i_Y \alpha \\ U(\beta)\, i_Y = i_Z \beta \end{cases}$ deci $U(\beta)\, i_Y \alpha = i_Z \beta\alpha$, dar $i_Y \alpha = U(\alpha)\, i_X$.

Rezultă că $U(\beta)\, U(\alpha)\, i_X = i_Z \beta\alpha$.

Pe de altă parte $U(\beta\alpha)\, i_X = i_Z \beta\alpha$.

Din unicitatea lui $\overline{\theta}$ rezultă $U(\beta)\, U(\alpha) = U(\beta\alpha)$.

Pentru $\alpha = 1_X$ avem $U(1_X)\, 1_X = 1_X$.

Folosind unicitatea lui $\overline{\theta}$ obţinem $U(1_X) = 1_{U(X)} = 1_{W_\Omega(X)}$.

Deci, $U$ este functor.

**Teorema 14.4** *Fie $X$ o mulţime şi $q$ o echivalenţă pe $X$. Dacă $\overline{q}$ este congruenţa pe $U(X) = W_\Omega(X)$ generată de $q$, atunci $\overline{q} \cap X^2 = q$ şi $W_\Omega(X)/\overline{q} \simeq W_\Omega(X/q)$.*

**Demonstraţie.**

Considerăm diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "\pi"'] & U(X) \arrow[d, "U(\pi)"] \\ X/q \arrow[r] & U(X/q) \end{tikzcd}$$

Să determinăm $\ker U(\pi) = \{(w, w') \mid U(\pi)(w) = U(\pi)(w')\}$.

Fie $(x, x') \in q$, deci $\pi(x) = \pi(x')$.

Avem $U(\pi)(x) = \pi(x) = \pi(x') = U(\pi)(x')$, de unde $(x, x') \in \ker U(\pi)$. Aşadar, $q \subseteq \ker U(\pi)$.

Cum $\overline{q}$ este congruenţa generată de $q$, rezultă $\overline{q} \subseteq \ker U(\pi)$.

Verificăm că

$$\ker U(\pi) \cap X^2 = q.$$

Fie $(x, y) \in \ker U(\pi) \cap X^2$. Avem $U(\pi)(x) = U(\pi)(y)$, dar cum $(x, y) \in X^2$ rezultă $\pi(x) = \pi(y)$ deci $(x, y) \in q$.

Prin urmare, $\ker U(\pi) \cap X^2 \subseteq q$.

Dar, $q \subseteq \ker U(\pi)$, $q \subseteq X^2$ de unde $q \subseteq \ker U(\pi) \cap X^2$.

Rezultă deci egalitatea $\ker U(\pi) \cap X^2 = q$.

Fie $\left\{ \begin{array}{l} \phi : U(X)/\overline{q} \to U(X/q) \\ \overline{\omega(x_1, \ldots, x_n)} \rightsquigarrow \omega(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n) \end{array} \right.$.

$\phi$ e bine definit, pentru că $\overline{q} \subseteq \ker U(\pi)$.

Pe de altă parte,

$$\left\{ \begin{array}{l} X/q \xrightarrow{\psi} U(X)/\overline{q} \\ \widehat{x} \rightsquigarrow \overline{x} \end{array} \right.$$

se prelungeşte unic la

$$\begin{cases} U\left(X/q\right) \xrightarrow{\psi_1} U\left(X\right)/\overline{q} \\ \omega\left(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n\right) \rightsquigarrow \overline{\omega\left(x_1, \ldots, x_n\right)} \end{cases}.$$

$\psi_1$ este inversa lui $\phi$, deci $\phi$ este izomorfism.

În plus, $U(X/q) \simeq U(X)/\ker U\left(\pi\right)$, conform primei teoreme de izomorfism, deci $\bar{q} = \ker U\left(\pi\right)$. Prin urmare, are loc egalitatea $\overline{q} \cap X^2 = q$. ■

**Observaţie 14.2** *Dacă $A$ este o algebră liberă pe $X = \{a, b, c\}$ şi dacă $(b, c) \in \overline{q}$, atunci obţinem o algebră liberă $A/\overline{q}$ pe $\left\{\hat{a}, \hat{b}\right\}$.*