Soft matematic

– Laboratorul nr. 7 & 8 –

Prenume NUME
Grupa ____

Cuprins

1 Metode de aproximare pentru ecuaţiile diferenţiale de tip eliptic

1.1 Forma variaţională a ecuaţiilor diferenţiale de tip eliptic

Acest capitol reamintim noţiuni şi rezultate importante ce vor fi utilizate ulterior în celelalte capitole ale acestei lucrări. Pentru prezentarea lor, au fost folosite[1], în principal, monografiile [1], [2] şi [3].

1.1.1 Ecuaţii variaţionale abstracte

În această secţiune vom aborda problemele eliptice în formă variaţională, formă care permite extinderea noţiunii de soluţie clasică. Formularea variaţională se pretează aplicării metodelor de aproximare de tip Galerkin.
Fie V un spaţiu Hilbert real cu produsul scalar $(\cdot,\cdot)$ şi norma indusă $\|\cdot\|$. Fie $a : V \times V \to \mathbb{R}$ o formă biliniară şi continuă, adică $\exists\, M > 0$ astfel încât:

$$|a(u,v)| \leq M\,\|u\| \cdot \|v\|\,, \quad \forall\, u,v \in V.$$

[1] Aceasta este prima notă de subsol. Deoarece am folosit comanda \renewcommand{\thefootnote}{\arabic{footnote}}, numerotarea se va face cu cifre arabe. Daca vom folosi comanda \renewcommand{\thefootnote}{\fnsymbol{footnote}} numerotarea se va face cu simboluri (prestabilite de LaTeX). Încearcă ambele variante !!

Fie $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţională liniară continuă (adica f este din spaţiul dual V^*) cu norma
$$\|f\| = \sup_{\substack{v\in V\\ v\neq 0}} \frac{|f(v)|}{\|v\|}.$$

Definiţia 1.1 *Vom numi ecuaţie variaţională problema determinării lui $u \in V$ astfel încât*

$$a(u,v) = f(v), \quad \text{pentru orice } v \in V. \tag{1.1}$$

Pentru a asigura existenţa şi unicitatea soluţiei impunem o condiţie suplimentară asupra formei a.

Definiţia 1.2 *Forma $a : V \times V \to \mathbb{R}$ este $V-$ eliptică dacă există o constantă $\alpha > 0$[2] astfel încât*
$$a(v,v) \geq \alpha \|v\|^2, \quad \forall\, v \in V.$$

Teorema 1.3 (Lema lui Lax – Milgram) *Dacă forma biliniară şi continuă a este $V-$ eliptică, atunci oricare ar fi funcţionala $f \in V^*$, există $u \in V$ soluţia unică a ecuaţiei variaţionale (1.1). Mai mult, aplicaţia liniară*
$$V^* \ni f \longrightarrow u \in V$$
este continuă de la V^* la V.

Demonstraţie. Din teorema lui Riesz de reprezentare[3], $\exists g \in V$, unic, astfel încât funcţionala $f \in V^*$ se reprezintă ca
$$f(v) = (g,v), \quad \text{pentru orice } v \in V$$
şi
$$\|g\| = \sup_{\substack{v\in V\\ v\neq 0}} \frac{|(g,v)|}{\|v\|} = \sup_{\substack{v\in V\\ v\neq 0}} \frac{|f(v)|}{\|v\|} = \|f\|. \tag{1.2}$$

Se obţine astfel un operator liniar $A : V \to V$, astfel încât:
$$a(u,v) = (Au,v), \quad \forall\, v \in V.$$

Operatorul A este mărginit deoarece
$$\|Au\| = \sup_{\substack{v\in V\\ v\neq 0}} \frac{|a(u,v)|}{\|v\|} \leq M\|u\|.$$

Aşadar, ecuaţia variaţională (1.1) este echivalentă cu ecuaţia
$$(Au,v) = (g,v), \quad \forall\, v \in V,$$
deci cu ecuaţia operatorială
$$Au = g. \tag{1.3}$$

[2] Aceasta este a doua notă de subsol. Ea este produsă în cadrul unui text scris în modul matematic

[3] Aceasta este a treia notă de subsol.

Arătăm, în continuare, că operatorul A este bijectiv.

Din condiţia de $V-$ elipticitate (vezi Definiţia 1.2) rezultă:

$$\alpha \|v\|^2 \leq a(v,v) = (Av,v) \leq \|Av\| \|v\|, \quad \forall v \in V,$$

adică

$$\|Av\| \geq \alpha \|v\|, \quad \text{pentru orice } v \in V. \tag{1.4}$$

Remarca 1.4

Menţiune legata de redactare: *Putem scrie şi sub forma:*

$$\begin{aligned} \alpha \|v\|^2 &\leq a(v,v) \\ &= (Av,v) \\ &\leq \|Av\| \|v\|, \quad \forall v \in V. \end{aligned}$$

Cum A este liniar, rezulă că A este injectiv, adică $Av_1 = Av_2 \quad \Leftrightarrow \quad A(v_1 - v_2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = \|A(v_1 - v_2)\| \geq \alpha \|v_1 - v_2\| \quad \Leftrightarrow \quad \|v_1 - v_2\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v_1 = v_2$.

Remarca 1.5

Menţiune legata de redactare: *Putem scrie şi sub forma:* $Av_1 = Av_2$ *este echivalent cu*

$$\begin{aligned} & A(v_1 - v_2) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 0 = \|A(v_1 - v_2)\| \geq \alpha \|v_1 - v_2\| \\ \Leftrightarrow \quad & \|v_1 - v_2\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v_1 = v_2\,. \end{aligned}$$

Pentru a demonstra că A este surjectiv, demonstrăm mai întâi că spaţiul imagine $A(V)$ este închis. Fie $(Av_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir din $A(V)$ a.î. $Av_n \to w \in V$.

Din (1.3) urmează că

$$\|Av_k - Av_p\| \geq \alpha \|v_k - v_p\|, \quad \text{pentru orice } v \in V,$$

ceea ce demonstrează că şirul $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este şir Cauchy şi deci convergent, $v_n \to v \in V$. Dar A este mărginit şi deci continuu, rezultă că $Av_n \to Av = w$. Aşadar, spaţiul $A(V)$ este închis.

Dacă $v_0 \in (A(V))^{\perp}$, avem

$$\alpha \|v_0\|^2 \leq a(v_0, v_0) = (Av_0, v_0) = 0,$$

de unde $v_0 = 0$.

Aşadar, spaţiul complementar $(A(V))^{\perp} = \{0\}$ şi deci $A(V) = V$, rezultă că A este surjectiv.

Deci A este bijectiv şi atunci ecuaţia (1.4) are soluţie unică $u = A^{-1}g$. Pentru orice $v \in V, w = Av$ avem, după (1.3), $\|w\| \geq \alpha \left\|A^{-1}w\right\|$. Rezultă

$$\left\|A^{-1}w\right\| \leq \frac{1}{\alpha} \|w\|, \quad \text{pentru orice } w \in V$$

şi deci operatorul invers este mărginit. Aşadar, din (1.2) rezultă

$$\|u\| = \left\|A^{-1}g\right\| \leq \frac{1}{\alpha} \|g\| = \frac{1}{\alpha} \|f\|,$$

ceea ce arată că aplicaţia $f \in V^* \to u \in V$ este mărginită.

Cum este şi liniară rezultă că este continuă. ■

Introducem funcţionala $J : V \to \mathbb{R}$ definită prin

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - f(v), \quad \text{pentru orice } v \in V. \tag{1.5}$$

Teorema 1.6 *Dacă forma biliniară, continuă şi V-eliptică a este simetrică, adică*

$$a(u, v) = a(v, u), \quad \forall u, v \in V,$$

atunci soluţia u a ecuaţiei variaţionale (1.1) este soluţia unică a problemei de minimizare

$$J(u) = \min_{v\in V} J(v)^{4}. \tag{1.6}$$

Demonstraţie. Fie u soluţia ecuaţiei variaţionale (1.1) şi $v \in V$ oarecare. Notând $w = v - u$, obţinem

$$\begin{aligned} J(v) &= J(u + w) = \frac{1}{2}\{a(u, u) + 2a(u, w) + a(w, w)\} \\ &\quad -f(u) - f(w) = J(u) + a(u, w) - f(w) + \frac{1}{2}a(w, w) \\ &\geq J(u) + \frac{\alpha}{2}\|w\|^2, \end{aligned}$$

de unde urmează concluzia teoremei.

Menţiune legata de redactare: Putem scrie şi sub forma:

$$\begin{aligned} J(v) = J(u + w) &= \frac{1}{2}\{a(u, u) + 2a(u, w) + a(w, w)\} - f(u) - f(w) \\ &= J(u) + a(u, w) - f(w) + \frac{1}{2}a(w, w) \\ &\geq J(u) + \frac{\alpha}{2}\|w\|^2. \end{aligned}$$

■

[4] Aceasta este a patra nota de subsol. Ea este scrisă în cadrul unui mediu care produce text în modul matematic care nu permite inserarea notelor de subsol cu comanda `\footnote` (mediul `equation` este o exceptie; el permite comanda `\footnote`).

Pentru a insera totuşi note de subsol se scrie, in cadrul mediului, comanda `\footnotemark` iar apoi, în afara mediului, imediat după, comanda `\footnotetext` cu textul efectiv al notei de subsol.

Aceleaşi comenzi sunt utile şi în cazul în care se doreşte inserarea unei note de subsol în cadrul celulei unui tabel (produs de mediul `tabular`)

2 Formulări variaţionale pentru probleme eliptice

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ un domeniu mărginit cu frontiera Γ netedă (de clasă C^1 pe porţiuni).

Exemplul 2.1 *Considerăm problema Dirichlet omogenă asociata ecuaţii lui Poisson:*

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{dacă suntem în } \Omega, \\ u = 0, & \text{dacă suntem pe } \mathrm{Fr}\,(\Omega) =: \Gamma, \end{cases} \tag{2.1}$$

unde $f \in L^2(\Omega)$.

Menţiune legata de redactare: *Putem scrie şi sub forma:*

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{în } \Omega \\ u = 0, & \text{pe } \Gamma, \end{cases} \tag{2.2}$$

Presupunem că $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. *Înmulţind ambii membri ai ecuaţiei cu o funcţie oarecare* $v \in H_0^1(\Omega)$ *şi integrând pe* Ω, *obţinem*

$$-\int_\Omega v\Delta u\, dx = \int_\Omega fv\, dx, \quad \forall\ v \in H_0^1(\Omega).$$

Utilizând formula lui Green şi ţinând cont că $v\big|_\Gamma = 0$, *avem*

$$\int\limits_\Omega \sum\nolimits_{i=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx = \int\limits_\Omega fv\, dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.3}$$

Considerând

$$a(u,v) = \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx$$

şi

$$f(v) = \int\limits_\Omega fv dx, \tag{2.4}$$

(2.3) se poate rescrie

$$a(u,v) = f(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.5}$$

Am obţinut astfel o formulare variaţională a problemei (2.2). Funcţionala biliniară a satisface condiţiile Teoremei 1.3 a lui Lax–Milgram, deoarece

$$a(u,v) = (u,v)_{1,\Omega} \leq |u|_{1,\Omega}\, |v|_{1,\Omega} \leq \|u\|_{1,\Omega}\, \|v\|_{1,\Omega}\, ,$$

iar, după inegalitatea lui Poincaré,

$$a(v,v) = (v,v)_{1,\Omega} = |v|_{1,\Omega}^2 \geq \frac{1}{1+C\,(\Omega)^2}\, \|v\|_{1,\Omega}^2\, .$$

De asemenea,

$$f(v) \leq \|f\|_{0,\Omega} \|v\|_{0,\Omega} \leq \|f\|_{0,\Omega} \|v\|_{1,\Omega} \,. \tag{2.6}$$

Aplicând Teorema 1.3 a lui Lax–Milgram, problema (2.5) are soluţie unică.

Dacă $u \in H_0^1(\Omega)$ *este soluţie a ecuaţiei variaţionale, cum* $H_0^1(\Omega)$ *este aderenţa lui* $\mathcal{D}(\Omega)$ *(care este* $C_0^\infty(\Omega)$*) în* $H^1(\Omega)$*, vom avea*

$$\int_\Omega \sum\nolimits_{i=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx = \int_\Omega f \varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\,,$$

ceea ce înseamnă că u *este soluţie în sensul distribuţiilor pentru ecuaţia lui Poisson. Deci putem considera soluţia ecuaţiei variaţionale ca o soluţie slabă a problemei (2.2). Dacă* $u \in H^2(\Omega)$*, ecuaţia variaţională este echivalentă cu problema (2.2).*

Exemplul 2.2 *Considerăm problema Neumann omogenă pentru ecuaţia lui Poisson*

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u + u = f, & \textit{dacă suntem în } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & \textit{dacă suntem pe } \mathrm{Fr}\,(\Omega) =: \Gamma \end{array} \right. \tag{2.7}$$

Remarca 2.3

Menţiune legata de redactare *(în legatură cu Exemplul 2.2): Problema (2.7) o putem scrie tot folosind mediul* `array`*, dar cu altfel de aliniere:*

$$\left\{ \begin{array}{rll} -\Delta u + u & = f, & \textit{în } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} & = 0, & \textit{pe } \Gamma. \end{array} \right. \tag{2.8}$$

Remarca 2.4

Menţiune legata de redactare *(în legatură cu Exemplul 2.2): Problema (2.8) o putem scrie folosind şi mediul* `aligned` *(cu acelaşi rezultat):*

$$\left\{ \begin{aligned} -\Delta u + u &= f, \ \textit{în } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0, \ \textit{pe } \Gamma. \end{aligned} \right.$$

Presupunem că $u \in H^2(\Omega)$*. Înmulţind ambii membri ai ecuaţiei cu o funcţie oarecare* $v \in H^1(\Omega)$ *şi integrând pe* Ω*, obţinem după utilizarea formulei lui Green*

$$\int_\Omega \left(\sum\nolimits_{i=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} + uv \right) dx = \int_\Omega f v dx, \quad \forall \ v \in H^1(\Omega). \tag{2.9}$$

Considerând

$$a(u,v) = \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} + uv \right) dx$$

şi f *dată de (2.4), (2.9) se poate rescrie*

$$a(u,v) = f(v), \quad \forall v \in H^1(\Omega). \tag{2.10}$$

Aceasta este formularea variaţională a problemei (2.9). Funcţionala biliniară a este continuă deoarece

$$a(u,v) = ((u,v))_{1,\Omega} \le \|u\|_{1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega} \, ,$$

şi V– eliptică întrucât

$$a(v,v) = \|v\|^2_{1,\Omega} \, .$$

Ţinând cont şi de (2.6) putem aplica Teorema 1.3 a lui Lax–Milgram şi deci problema (2.10) are soluţie unică.

Reciproc, dacă $u \in H^1(\Omega)$ este soluţie a ecuaţiei variaţionale, avem

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, dx + \int_\Omega u\varphi \, dx = \int_\Omega f\varphi \, dx, \quad \forall \, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \, ,$$

ceea ce înseamnă că u este soluţie în sensul distribuţiilor pentru ecuaţia $-\Delta u + u = f$ (u şi φ sunt în $L^2(\Omega)$). Dacă $u \in H^2(\Omega)$, aplicăm formula lui Green în (2.9) şi obţinem

$$-\int_\Omega v\Delta u \, dx + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} v \, d\sigma + \int_\Omega vu \, dx = \int_\Omega fv \, dx.$$

Cum $-\Delta u + u = f$ în $L^2(\Omega)$, rezultă

$$\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} v \, d\sigma = 0, \quad \forall v \in H^1(\Omega),$$

de unde, cum spaţiul urmelor pe Γ este dens în $L^2(\Gamma)$,

$$\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} w \, d\sigma = 0, \quad \forall w \in L^2(\Gamma) \, ,$$

şi deci $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$, a.p.t. în Γ. Avem astfel o echivalenţă în sens generalizat a ecuaţiei variaţionale cu problema (2.9).

Bibliografie selectivă

[1] Gheorghe Aniculăesei, Constantin Ilioi, *Ecuaţii cu derivate parţiale şi aproximare numerică*, Editura Universităţii „Alexandru Ioan Cuza”, Iaşi, 2005.

[2] Viorel Arnăutu, *Metode numerice pentru probleme variaţionale. Teorie şi algoritmi*, Editura Universităţii „Alexandru Ioan Cuza”, Iaşi, 2001.

[3] Viorel Barbu, *Partial Differential Equations* and *Boundary Value Problems*, Kluwer Academic, Dordrecht, 1998.