

```
. % acesta este al saselea document LaTeX
.
. \documentclass[a4paper,leqno]{article} % daca se adauga optiunea "leqno", atunci numerotarea
ecuatiilor va fi la stanga (implicit este numerotarea la dreapta)
. % !! incerca ambele variante: cu "leqno" si fara "leqno"
-
. \usepackage{amsmath,amssymb,amsfonts}
. \usepackage{fancyhdr}
. \usepackage{hyperref}
. \hypersetup{colorlinks=true, linkcolor=cyan, citecolor=green, filecolor=black,
10 urlcolor=blue}
. % ATENTIE la scrierea acestei comenzi !! ; daca este scrisa gresit, eroarea nu apare imediat
ci apare abia la folosirea ei ulterioara, cand apare primul link
. % (de exemplu, cand un Capitol va trebui sa apara in Cuprins)
.
. \usepackage{tocloft} % daca se foloseste acest pachet impreuna cu comanda de mai jos vom
face sa apara linia punctata in cadrul Cuprinsului si la Capitole (ea nu apare implicit la
capitole)
. \renewcommand{\cftsecleader}{\cftdotfill{\cftdotsep}} % daca suntem in clasa Book sau
Report, atunci comanda este alta: \renewcommand{\cftchappleader}{\cftdotfill{\cftdotsep}}
- % ATENTIE la scrierea acestei comenzi !! ; daca este scrisa gresit, eroarea nu apare imediat
ci apare abia la folosirea ei ulterioara
. % (cand un Capitol va trebui sa apara in Cuprins)
.
. % In cazul in care, in WinEdt, consola de compilare este blocata, se poate folosi si
% combinatia de taste SHIFT + ESCAPE (pentru a inchide compilatorul blocat)
20
. \renewcommand{\contentsname}{Cuprins}
. \renewcommand{\refname}{B\lowercase{ibliografie} selectiv\u{a}}
.
. \newtheorem{theo}{Teorema}[section] % nu folosi numele ,, \th' drept nume scurt; acesta este
deja o comanda predefinita in LaTeX
- % in aceasta varianta (cu optiunea "[section]"), numerotarea va fi consecutiva in cadrul
sectiunii; primul numar va fi numarul sectiunii, apoi urmeaza numerotarea consecutiva
.
. % exista si varianta \newtheorem{theo}{Teorema} (fara optiunea "[section]"); ea va produce
numerotare consecutiva in cadrul intregului document
. % !! incerca si varianta \newtheorem{theo}{Teorema} !!
30
. \newtheorem{defin}[theo]{Defini\c{t}ia} % nu folosi numele ,, \def' drept nume scurt; acesta
este deja o comanda predefinita in LaTeX
. % daca nu am fi adaugat optiunea "[theo]" in cadrul comenzii, atunci numerotarea
Definitiiilor si a Teoremelor s-ar fi facut separat
.
. \newtheorem{corol}[theo]{Corolarul}
. \newtheorem{exem}[theo]{Exemplul}
- \newtheorem{exer}[theo]{Exerci\c{t}iul}
. \newtheorem{lema}[theo]{Lema}
. \newtheorem{notat}[theo]{Nota\c{t}ia}
. \newtheorem{prop}[theo]{Propozi\c{t}ia}
. \newtheorem{rem}[theo]{Remarca}
40
. % am adaugat optiunea "[theo]" la toate comenzile de mai sus deoarece am dorit ca
numerotarea tuturor mediilor de mai sus sa fie in continuu (indiferent de ordinea lor de
aparitie)
.
. % avem si urmatoarele variantele de medii de tip "teorema":
. %\newtheorem{acknowledgement}[theo]{Acknowledgement}
- %\newtheorem{algorithm}[theo]{Algorithm}
. %\newtheorem{axiom}[theo]{Axioma}
. %\newtheorem{case}[theo]{Cazul}
. %\newtheorem{claim}[theo]{Claim}
. %\newtheorem{concl}[theo]{Concluzia}
50 %\newtheorem{condition}[theo]{Condi\c{t}ia}
. %\newtheorem{conjecture}[theo]{Conjecture}
. %\newtheorem{problem}[theo]{Problema}
. %\newtheorem{solution}[theo]{Solu\c{t}ie}
. %\newtheorem{summary}[theo]{Summary}
- %\newtheorem{criterion}[theo]{Criterion}
.
. \newenvironment{proof}{\noindent\textbf{Demonstra\c{t}ie.}}{\rule{0.5em}{0.5em}} % aceasta
```

```
este o comanda de redefinire a cuvintului PROOF (apare cand folosesti mediul "proof")
· %\newenvironment{proof}{\noindent\textbf{Demonstra\c{t}ie.}}{\rule{1ex}{1ex}} % aceasta este
o varianta cu altfel de "patrat" ce se pune automat la sfarsitul mediului
60 · \renewcommand{\thefootnote}{\arabic{footnote}}% aceasta comanda va face ca numerotarea
notelor de subsol sa fie cu cifre arabe
· %\renewcommand{\thefootnote}{\fnsymbol{footnote}}
· % aceasta comanda va face ca numerotarea notelor de subsol sa fie cu simboluri
· % !! incerca si aceasta modalitate de numerotare a notelor de subsol !!
-
· % mai exista si varianta cu ,,litere mici'': \renewcommand{\thefootnote}{\alph{footnote}}
· % mai exista si varianta cu ,,cifre romane mici'':
\renewcommand{\thefootnote}{\roman{footnote}}
·
· % la toate notele de subsol exista si optiunea sa indicam exact ce simbol sa apara:
70 % daca, de exemplu alegem \renewcommand{\thefootnote}{\fnsymbol{footnote}} si apoi scriem o
nota cu \footnote[5]{Nota}, atunci va apare simbolul corespunzator cifrei 5 in dreptul notei
de subsol (sunt 9 simboluri, numerotate de la 1 la 9)
·
·
·
· \numberwithin{equation}{section}% daca se adauga aceasta comanda atunci numerotarea
ecuatiilor in cadrul articolului va include numarul sectiunii si apoi numarul de ordine din
cadrul sectiunii
- % daca nu o scriu, atunci numerotarea ecuatiilor se va face in continuu, indiferent de
sectiuni
· % scoate instructiunea si vezi ce se intampla !
·
· \pagestyle{fancy}
· \lhead{Soft matematic\\ Laborator 7 \& 8}
80 · \rhead{Prenume NUME\\ Grupa \_\_\_\_\}
· \cfoot{\thepage}
·
·
· \title{\Huge{Soft matematic}\\[0.2cm]
- \large{-- Laboratorul nr. 7 \& 8 --}}
· \author{Prenume NUME\\ Grupa \_\_\_\_\}
· \date{}
·
· \begin{document}
90 · \maketitle
·
· \pdfbookmark[1]{Cuprins}{Cuprins} %Daca se doreste includerea Cuprinsului în semnele de
carte (Bookmarks) ale PDF-ului (alaturi de celelalte structuri ale PDF-ului),
· %atunci se foloseste aceasta comanda
-
· \tableofcontents
·
· \bigskip
· \bigskip
100 ·
· \section[Metode de aprox. pt. ec. dif. eliptice]{Metode de aproximare pentru ecua\c{t}iile
di\fe-ren-\c{t}i-ale de tip eliptic}
·
· \subsection[Forma varia\c{t}ional\u{a}. a ec. dif. eliptice]{Forma varia\c{t}ional\u{a} a
ecua\c{t}iilor diferen\c{t}iale de tip eliptic}
- Acest capitol reamintim no\c{t}iuni \c{s}i rezultate importante ce vor fi utilizate ulterior
\^{}i\c{t}i in celelalte capitole ale acestei lucr\u{a}ri. Pentru prezentarea lor, au fost
folosite\footnote{Aceasta este prima not\u{a} de subsol. Deoarece am folosit comanda
\textbackslash renewcommand{\textbackslash thefootnote}\{\textbackslash
arabic{\footnote}\}, numerotarea se va face cu cifre arabe. Daca vom folosi comanda
\textbackslash renewcommand{\textbackslash thefootnote}\{\textbackslash
fnsymbol{\footnote}\} numerotarea se va face cu simboluri (prestabilite de \LaTeX).
\^{}I\ncerc\u{a} ambele variante !!}, \^{}i\c{t}i in principal, monografiile \cite{Anic-Ilioi/2005},
\cite{Arna/2001} \c{s}i \cite{Barbu/1998}.
·
· \subsubsection[Ec. varia\c{t}ionale abstracte]{Ecua\c{t}ii varia\c{t}ionale abstracte}
110 · \^{}I\ncerc\u{a} acest\u{a} sec\c{t}iune vom aborda problemele eliptice \^{}i\c{t}i in form\u{a}
```

```

varia\c{t}ional\u{a}, form\u{a} care permite extinderea no\c{t}iunii de solu\c{t}ie
clasic\u{a}. Formularea varia\c{t}ional\u{a} se preteaz\u{a} aplic\u{a}rii metodelor de
aproximare de tip Galerkin.\\
. Fie  $V$  un spa\c{t}iu Hilbert real cu produsul scalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  \c{s}i
norma indus\u{a}  $\| \cdot \|$ . Fie  $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  o
form\u{a} bilinar\u{a} \c{s}i continu\u{a}, adic\u{a}  $\exists M > 0$  astfel  $\forall u, v \in V$ :
.
. % ATENTIE la spatiile scrise in modul matematic (atat inline cat si displayed) !! ;
. % in modul matematic:
- %   spatiiile orizontale sunt permise, dar nu au nici un efect;
. %   pentru a obtine spatiile orizontale trebuie sa folosim anumite comenzi specifice;
. %   liniile goale nu sunt permise;
. %   pentru a obtine spatiile verticale trebuie sa folosim anumite comenzi specifice
.
120 \begin{equation*}
. \left| \left| a(u,v) \right| \right| \leq M \left| \left| u \right| \right| \left| \left| v \right| \right|, \quad \forall u, v \in V.
. \end{equation*}
.
. % Avem mai multe variante de a scrie modulul si norma:
- % \begin{equation*}
. % \left| \left| a(u,v) \right| \right| \leq M \left| \left| u \right| \right| \left| \left| v \right| \right|, \quad \forall u, v \in V
. % \end{equation*}
. % sau astfel
. % \begin{equation*}
130 % |a(u,v)| \leq M \|u\| \|v\|, \quad \forall u, v \in V.
. % \end{equation*}
.
. % cand scriem o pereche de delimitatori cu \left si cu \right in stanga lor, atunci ei se
. % maresc automat in functie de expresia scrisa intre ei
.
- Fie  $f: V \rightarrow \mathbb{R}$  o func\c{t}ional\u{a} linear\u{a} continu\u{a} (adica  $f$ 
este din spa\c{t}iul dual  $V^*$ ) cu norma
. \begin{equation*}
. \left| \left| f \right| \right| = \sup_{\substack{v \in V \\ v \neq 0}} \frac{\left| \left| f(v) \right| \right|}{\left| \left| v \right| \right|},
. \end{equation*}
. % mai sus impunem sa operatorul \sup sa aiba obligatoriu limitele scrise la drapta
140
. % Putem scrie si sub forma:
. % \begin{equation*}
. % \left| \left| f \right| \right| = \sup_{\substack{v \in V \\ v \neq 0}} \frac{\left| \left| f(v) \right| \right|}{\left| \left| v \right| \right|},
. % \end{equation*}
- % mai sus impunem ca operatorul \sup sa aiba obligatoriu limitele deasupra si dedesubt;
.
. % sau putem scrie operatorul \sup fara nici o informatie in plus:
. \begin{equation*}
. \left| \left| f \right| \right| = \sup_{\substack{v \in V \\ v \neq 0}} \frac{\left| \left| f(v) \right| \right|}{\left| \left| v \right| \right|},
150 % \end{equation*}
.
. \begin{defin}
. Vom numi ecua\c{t}ie varia\c{t}ional\u{a} problema determin\u{a}rii lui  $u \in V$  astfel
. \c{a}  $a(u,v) = f(v)$ , \quad \forall v \in V. \label{eq.var.}
. \end{equation*}
. \end{defin}
. Pentru a asigura existen\c{t}a \c{s}i unicitatea solu\c{t}iei impunem o condi\c{t}ie
suplimentar\u{a} asupra formei  $a$ .
. \begin{defin} \label{definElliptic}
160 Forma  $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  este  $V$ -eliptic\u{a} dac\u{a} exist\u{a} o
constant\u{a}  $\alpha > 0$  \footnote{Aceasta este a doua not\u{a} de subsol. Ea este produs\u{a}
\c{a}  $n$  cadrul unui text scris \c{a}  $n$  modul matematic} astfel  $\forall u, v \in V$ 
. \begin{equation*}
. a(v,v) \geq \alpha \left| \left| v \right| \right|^2, \quad \forall v \in V.
. \end{equation*}
. \end{defin}
- \begin{theo}[Lema lui Lax -- Milgram] \label{thLaxMilgram}
. Dac\u{a} forma bilinar\u{a} \c{s}i continu\u{a}  $a$  este  $V$ -eliptic\u{a}, atunci oricare
ar fi func\c{t}ionala  $f \in V^*$ , exist\u{a}  $u \in V$  solu\c{t}ia unic\u{a} a
```

```

ecua\c{t}iei varia\c{t}ionale (\ref{eq.var.}). Mai mult, aplica\c{t}ia liniar\u{a}
\left[V^{\ast}\ni f\longrightarrow u\in V\right]
este continu\u{a} de la $V^{\ast}$ la $V$.
\end{theo}
170 \begin{proof}
Din teorema lui Riesz de reprezentare\footnote{Aceasta este a treia not\u{a} de subsol.},
$\exists g\in V$, unic, astfel
\^{i}nc\^{a}t func\c{t}ionala $f\in V^{\ast}$ se reprezint\u{a} ca
\begin{equation*}
f(v)=\left( g,v\right),\quad\text{pentru orice }v\in V
\end{equation*}
\c{s}i%
\begin{equation}
\left|\left|g\right|\right|=\sup_{\substack{v\in V \\ v\neq 0}}\frac{\left|\left|
\left( g,v\right)\right|\right|}{\left|\left|v\right|\right|}=\sup_{\substack{v\in
V \\ v\neq 0}}\frac{\left|\left|f(v)\right|\right|}{\left|\left|v\right|\right|}
180 \quad\quad\quad\label{dem.eq1}
\end{equation}
\end{equation}
Se ob\c{t}ine astfel un operator liniar $A:V\rightarrow V$, astfel \^{i}nc\^{a}t:
\begin{equation*}
a(u,v)=\left(Au,v\right),\quad\forall u,v\in V.
\end{equation*}
Operatorul $A$ este m\u{a}rginit deoarece
\begin{equation*}
\left|\left|Au\right|\right|=\underset{\substack{v\in V \\ v\neq 0}}{\sup}\frac{\left|\left|
a\left(u,v\right)\right|\right|}{\left|\left|v\right|\right|}\leq M\left|\left|u\right|\right|.
190 \end{equation*}
A\c{s}adar, ecua\c{t}ia varia\c{t}ional\u{a} (\ref{eq.var.}) este echivalent\u{a} cu
ecua\c{t}ia%
\begin{equation*}
\left(Au,v\right)=\left(g,v\right),\quad\forall v\in V,
\end{equation*}
deci cu ecua\c{t}ia operatorial\u{a}
\begin{equation}
Au=g.\label{eq.oper.}
\end{equation}
200 Ar\u{a}t\u{a}m, \^{i}n continuare, c\u{a} operatorul $A$ este bijectiv.

Din condi\c{t}ia de $V$-- elipticitate (vezi Defini\c{t}ia \ref{definEliptic}) rezult\u{a}:
\begin{equation*}
\alpha\left|\left|v\right|\right|^2\leq a(v,v)=\left(Av,v\right)
\leq\left|\left|Av\right|\right|\left|\left|v\right|\right|,\quad\forall v\in V,
\end{equation*}
adic\u{a}
\begin{equation}
\left|\left|Av\right|\right|\geq\alpha\left|\left|v\right|\right|,\quad\text{pentru orice }v\in
210 V.\label{ineq.var.}
\end{equation}

\begin{rem}
\ % scriind "\ " am adaugat un spatiu orizontal si apoi am trecut la paragraful urmator
\indent\textbf{Men\c{t}iune legata de redactare}: Putem scrie \c{s}i sub forma:%
\begin{align*}
\alpha\left|\left|v\right|\right|^2&\leq a(v,v) \\
& \\
& \leq\left|\left|Av\right|\right|\left|\left|v\right|\right| \\
220 &\leq\left|\left|Av\right|\right|\left|\left|v\right|\right|,\quad\forall v\in V.
\end{align*}
\end{rem}
Cum $A$ este liniar, rezul\c{a} c\u{a} $A$ este injectiv, adic\u{a}
$Av_1=Av_2\rightarrow A(v_1-v_2)=0\rightarrow$
$0=\left|\left|A(v_1-v_2)\right|\right|\geq\alpha\left|\left|v_1-v_2\right|\right|$
$\rightarrow\left|\left|v_1-v_2\right|\right|=0\rightarrow v_1=v_2$.

\begin{rem}
\ % scriind "\ " am adaugat un spatiu orizontal si apoi am trecut la paragraful urmator

```

```
.
.
\noindent\textbf{Men\c{t}iune legata de redactare}: Putem scrie \c{s}i sub forma:
$Av_{1}=Av_{2}$
230 este echivalent cu%
.
\begin{equation*}
.
\begin{array}{l}
.
\displaystyle A(v_{1}-v_{2})=0\medskip \\
\displaystyle\Leftrightarrow 0=\left\Vert A(v_{1}-v_{2})\right\Vert \\
\geq \alpha \left\Vert v_{1}-v_{2}\right\Vert \medskip \\
\displaystyle\Leftrightarrow \left\Vert v_{1}-v_{2}\right\Vert =0\quad \\
\Leftrightarrow v_{1}=v_{2}\,,\%
\end{array}
.
\end{array}%
\end{equation*}
240 \end{rem}
.
Pentru a demonstra c\u{a} $A$ este surjectiv, demonstr\u{a}m mai \^{i}nt\^{a}i c\u{a}
spa\c{t}iul imagine $A(V)$ este \^{i}nchis. Fie $\left(Av_{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ un
\c{s}ir din $A(V)$ a.\^{i}. $Av_{n}\rightarrow w\in V$.
.
Din (\ref{eq.oper.}) urmeaz\u{a} c\u{a}
\begin{equation*}
\left\Vert Av_{k}-Av_{p}\right\Vert \geq \alpha \left\Vert v_{k}-v_{p}\right\Vert
\right\Vert, \quad \text{pentru orice } v\in V,
\end{equation*}
ceea ce demonstrez\u{a} c\u{a} \c{s}irul $\left(v_{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ este \c{s}ir
Cauchy \c{s}i deci convergent, $v_{n}\rightarrow v\in V$.
Dar $A$ este m\u{a}rginit \c{s}i deci continuu, rezult\u{a} c\u{a} $Av_{n}\rightarrow Av=w$.
A\c{s}adar, spa\c{t}iul $A(V)$ este \^{i}nchis.
250
.
Dac\u{a} $v_{0}\in(A(V))^{\perp}$, avem
\begin{equation*}
\alpha \left\Vert v_{0}\right\Vert ^{2} \leq a(v_{0},v_{0})=\left(Av_{0},v_{0}\right)=0,
\end{equation*}
de unde $v_{0}=0$.
.
A\c{s}adar, spa\c{t}iul complementar $(A(V))^{\perp}=\left\{0\right\}$ \c{s}i deci $A(V)=V$,
rezult\u{a} c\u{a} $A$ este surjectiv.\
.
Deci $A$ este bijectiv \c{s}i atunci ecua\c{t}ia (\ref{ineq.var.}) are solu\c{t}ie
unic\u{a} $u=A^{-1}g$. Pentru orice $v\in V, w=Av$ avem, dup\u{a} (\ref{eq.oper.}),
260 $\left\Vert w\right\Vert \geq \alpha \left\Vert A^{-1}w\right\Vert$.
Rezult\u{a}%
\begin{equation*}
\left\Vert A^{-1}w\right\Vert \leq \frac{1}{\alpha} \left\Vert w\right\Vert, \quad \text{pentru}
\text{ orice } w\in V
\end{equation*}
\c{s}i deci operatorul invers este m\u{a}rginit. A\c{s}adar, din (\ref{dem.eq1}) rezult\u{a}
\begin{equation*}
\left\Vert u\right\Vert =\left\Vert A^{-1}g\right\Vert \leq \frac{1}{\alpha}
\left\Vert g\right\Vert =\frac{1}{\alpha} \left\Vert f\right\Vert,
\end{equation*}
270 ceea ce arat\u{a} c\u{a} aplica\c{t}ia $f\in V^{\ast}\rightarrow u\in V$ este
m\u{a}rginit\u{a}.
.
Cum este \c{s}i liniar\u{a} rezult\u{a} c\u{a} este continuu\u{a}.\bigskip \hfill
\end{proof}
.
Introducem func\c{t}ionala $J:V\rightarrow\mathbb{R}$ definit\u{a} prin
\begin{equation*}
J(v)=\frac{1}{2}a(v,v)-f(v), \quad \text{pentru orice } v\in V.\label{functional}%
\end{equation*}
\end{equation*}
280 \begin{theo}
.
Dac\u{a} forma bilinar\u{a}, continuu\u{a} \c{s}i $V$-eliptic\u{a} $a$ este simetric\u{a},
adic\u{a}
\begin{equation*}
a(u,v)=a(v,u), \quad \text{forall } u,v\in V,
\end{equation*}
atunci solu\c{t}ia $u$ a ecua\c{t}iei varia\c{t}ionale (\ref{eq.var.}) este
solu\c{t}ia unic\u{a} a problemei de minimizare
\begin{align}
J(u)&=\underset{v\in V}{\min}J(v)\footnotemark.\label{eq.fct.}%
\end{align}
\end{align}
290 \footnotetext{Aceasta este a patra nota de subsol. Ea este scris\u{a} \^{i}n cadrul unui
mediu care produce text \^{i}n modul matematic care nu permite inserarea notelor de subsol
```



cu comanda `\texttt{\textbackslash footnote}` (mediul `\texttt{equation}` este o exceptie; el permite comanda `\texttt{\textbackslash footnote}`).

Pentru a insera totu\c{s}i note de subsol se scrie, in cadrul mediului, comanda `\texttt{\textbackslash footnotemark}` iar apoi, `\^{}i`n afara mediului, imediat dupa, comanda `\texttt{\textbackslash footnotetext}` cu textul efectiv al notei de subsol.

Acelea\c{s}i comenzi sunt utile \c{s}i `\^{}i`n cazul `\^{}i`n care se dore\c{s}te inserarea unei note de subsol `\^{}i`n cadrul celulei unui tabel (produs de mediul `\texttt{tabular}}`)

`\end{theo}`

`\begin{proof}`

Fie  $\$u\$$  solu\c{t}ia ecua\c{t}iei varia\c{t}ionale (`\ref{eq.var.}`) \c{s}i  $\$v\in V\$$  oarecare. Not\^{}a  $\$w=v-u\$$ , ob\c{t}inem

`\begin{equation*}`

`\begin{array}{l}`

300 `\displaystyle J(v)=J(u+w)=\frac{1}{2}\left\{ a(u,u)+2a(u,w)+a(w,w)\right\}\medskip \\\`

`\displaystyle \quad -f(u)-f(w)=J(u)+a(u,w)-f(w)+\frac{1}{2}a(w,w)\medskip \\\`

`\displaystyle \geq J(u)+\frac{\alpha}{2}\left\Vert w\right\Vert^2,`

`\end{array}`%

`\end{equation*}`

de unde urmeaza concluzia teoremei.

`\textbf{Men\c{t}iune legata de redactare}`: Putem scrie \c{s}i sub forma:

`\begin{align*}`

310 `J(v) \&=J(u+w)=\frac{1}{2}\left\{ a(u,u)+2a(u,w)+a(w,w)\right\} -f(u)-f(w) \\\`

`\&=J(u)+a(u,w)-f(w)+\frac{1}{2}a(w,w) \\\`

`\&\geq J(u)+\frac{\alpha}{2}\left\Vert w\right\Vert^2.`

`\end{align*}`

`\bigskip\hfill`

`\end{proof}`

*% !! Observatie: mediul ,, \texttt{align}'' arata mai bine decat mediul  
 ,, \texttt{eqnarray}''; deci scrierea in mediul ,, \texttt{align}'' este de preferat !!  
 % !! Folosirea mediului ,, \texttt{align}'' este o modalitate de scriere des intalnita pentru  
 o expresie matematica, pe mai multe linii:  
 % astfel indicam foarte usor unde vrem sa se faca alinierea prin inserarea semnului ,, \&''  
 (ce trebuie pus in stanga locului unde vrem sa se faca alinierea).*

320 `\section{Formul\c{a}ri varia\c{t}ionale pentru probleme eliptice}`

Fie  $\$\Omega\subset\mathbb{R}^m\$$  un domeniu  $m$ \u{a}rginit cu frontiera  $\$\Gamma\$$  neted\u{a} (de clas\u{a}  $\$C^1\$$  pe por\c{t}iuni).

`\begin{exam}` Consider\u{a}m problema Dirichlet omogen\u{a} asociata ecua\c{t}iei lui Poisson:

`\begin{equation}`

`\left\{`

`\begin{array}{ll}`

`-\Delta u=f, \& \text{dac}\u{a} \text{ suntem } \^{}i\Omega,`

`\medskip \\\`

`u=0, \& \text{dac}\u{a} \text{ suntem pe } \mathrm{Fr}\left(\Omega\right) =:\Gamma,`

330 `\end{array}`

`\right.`

`\end{equation}`%

unde  $\$f\in L^2\left(\Omega\right)\$.$

*% !! este o modalitate de scriere des intalnita pentru o expresie matematica, cu ramuri, pe  
 mai multe linii, cu eventual text: folosim mediul ,,equation'', apoi mediul ,,array'',  
 aliniam ambele coloane la stanga*

*% !! seamana cu mediul ,,align'' (scriem pe mai multe linii), dar putem avea si mai multe  
 coloane (este ca o matrice)*

`\textbf{Men\c{t}iune legata de redactare}`: Putem scrie \c{s}i sub forma:

`\begin{equation}`

`\left\{`

`\begin{aligned}`

`-\Delta u \& = f, \text{ in } \Omega \\\`

`u \& = 0, \text{ pe } \Gamma, \quad \text{\label{ProblDirichlet}}`

`\end{aligned}`

`\right.`

`\end{equation}`

Presupunem  $c\u{a} \ \$u\in H^2(\Omega)\cap H_{0}^1(\Omega).\$ \ \wedge\{I\}$ nmul\c{t}ind ambii membri



```

        -\Delta u+u=f, & \text{dac}\u{a} suntem \^{i}n \Omega \medskip \\
        \\
        \displaystyle\frac{\partial u}{\partial \nu}=0, & \text{dac}\u{a} suntem pe } \\
        \mathrm{Fr}\left( \Omega \right) =:\Gamma \\
    \end{array}% \\
    \right. \\
\end{equation}

420 \begin{rem}
    \ % scriind "\ " am adaugat un spatiu orizontal si apoi am trecut la paragraful urmator

    \textbf{Men\c{t}iune legata de redactare} (\^{i}n legatur\u{a} cu Exemplul
    \ref{ProblemaNeumann}): Problema (\ref{ProblemaNeumann1}) o putem scrie tot folosind mediul
    \texttt{array}, dar cu altfel de aliniere:
    \begin{equation}\label{ProblemaNeumann2}
    \left\{
    \begin{array}{rl}
    -\Delta u+u & = f,\quad\text{\^{in} } \Omega \quad \medskip \\
    \displaystyle \frac{\partial u}{\partial \nu} & = 0,\quad\text{pe } \Gamma.
    \end{array}
    \right.
    \end{equation}
    \end{rem}

430 \begin{rem}
    \ % scriind "\ " am adaugat un spatiu orizontal si apoi am trecut la paragraful urmator

    \textbf{Men\c{t}iune legata de redactare} (\^{i}n legatur\u{a} cu Exemplul
    \ref{ProblemaNeumann}): Problema (\ref{ProblemaNeumann2}) o putem scrie folosind \c{s}i
    mediul \texttt{aligned} (cu acela\c{s}i rezultat):
    \begin{equation}
    \left\{
    \begin{aligned}
    \label{ProblemaNeumann3}
    -\Delta u+u & \quad = f,\text{ \^{in} } \Omega \quad \nonumber \\
    \frac{\partial u}{\partial \nu} & \quad = 0,\text{ pe } \Gamma.
    \end{aligned}
    \right.
    \end{equation}
    \end{rem}

440 \begin{rem}
    \ % scriind "\ " am adaugat un spatiu orizontal si apoi am trecut la paragraful urmator

    \textbf{Men\c{t}iune legata de redactare} (\^{i}n legatur\u{a} cu Exemplul
    \ref{ProblemaNeumann}): Problema (\ref{ProblemaNeumann2}) o putem scrie folosind \c{s}i
    mediul \texttt{aligned} (cu acela\c{s}i rezultat):
    \begin{equation}
    \left\{
    \begin{aligned}
    \label{ProblemaNeumann3}
    -\Delta u+u & \quad = f,\text{ \^{in} } \Omega \quad \nonumber \\
    \frac{\partial u}{\partial \nu} & \quad = 0,\text{ pe } \Gamma.
    \end{aligned}
    \right.
    \end{equation}
    \end{rem}

    % intr-un fel, mediul \texttt{aligned} este mai bun ca mediul \texttt{array} deoarece nu mai
    % trebuie sa adaugam comanda \texttt{\displaystyle} pentru a mari operatorii si nici
    % \texttt{\medskip} pentru a crea o distanta mai mare intre linii

450 Presupunem c\u{a}  $u \in H^2(\Omega)$ .  $\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v$ 
    ecua\c{t}iei cu o func\c{t}ie oarecare  $v \in H^1(\Omega)$  \c{s}i
    integr\^{a}nd pe  $\Omega$ , ob\c{t}inem dup\u{a} utilizarea formulei lui Green%
    \begin{equation}
    \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v + \int_{\partial \Omega} u \frac{\partial v}{\partial \nu} - \int_{\partial \Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu}
    \end{equation}
    Consider\^{a}nd%
    \begin{equation*}
    a(u,v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\partial \Omega} u \frac{\partial v}{\partial \nu} - \int_{\partial \Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu}
    \end{equation*}
    \c{s}i  $a(u,v)$  de (\ref{def.f}), (\ref{Form.Green2}) se poate rescrie%
    \begin{equation}
    a(u,v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\partial \Omega} u \frac{\partial v}{\partial \nu}
    \end{equation}
    Aceasta este formularea varia\c{t}ional\u{a} a problemei (\ref{Form.Green2}).
    Func\c{t}ionala bilinar\u{a}  $a(u,v)$  este continu\u{a} deoarece%
    \[
    a(u,v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\partial \Omega} u \frac{\partial v}{\partial \nu}
    \]
    \c{s}i  $a(u,v)$  -- eliptic\u{a} \^{i}ntruc\^{a}t%
    \[
    a(v,v) = \int_{\Omega} |\nabla v|^2 + \int_{\partial \Omega} v^2.
    \]
    \c{T}in\^{a}nd cont \c{s}i de (\ref{ineq.f}) putem aplica Teorema \ref{thLaxMilgram} a lui

```



```
Lax--Milgram
· \c{s}i deci problema (\ref{eq.var2}) are solu\c{t}ie unic\u{a}.
·
480 Reciproc,
· dac\u{a}  $\$u \in H^1(\Omega)\$$  este solu\c{t}ie a ecua\c{t}iei
· varia\c{t}ionale, avem%
· \[
· \int\limits_{\Omega}\sum\limits_{i=1}^m\frac{\partial u}{\partial x_i}
- \}\, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, dx + \int\limits_{\Omega} u \varphi
· \, dx = \int\limits_{\Omega} f \varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)
· \]
· ceea ce \^{i}nseamn\u{a} c\u{a}  $\$u\$\$  este solu\c{t}ie \^{i}n sensul
490 distribu\c{t}iilor pentru ecua\c{t}ia  $\$-\Delta u + u = f\$\$  ( $\$u\$\$  \c{s}i  $\$\varphi\$\$ 
· sunt \^{i}n  $\$L^2(\Omega)\$\$ ). Dac\u{a}  $\$u \in H^2(\Omega)\$\$ ,
· aplic\u{a}m formula lui Green \^{i}n (\ref{Form.Green2}) \c{s}i ob\c{t}inem
· \[
· -\int\limits_{\Omega} v \Delta u \, dx + \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu}
- u \}\{ \frac{\partial v}{\partial \nu} \, d\sigma + \int\limits_{\Omega} v u \, dx = \int\limits_{\Omega} f v \, dx.
· \]
· Cum  $\$-\Delta u + u = f\$\$  \^{i}n  $\$L^2(\Omega)\$\$ , rezult\u{a}%
· \[
· \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} \, v \, d\sigma = 0, \quad \forall v \in
500  $H^1(\Omega)$ ,
· \]
· de unde, cum spa\c{t}iul urmelor pe  $\$\Gamma\$\$  este dens \^{i}n  $\$L^2(\Gamma)\$\$ ,
· \[
· \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} \, w \, d\sigma = 0, \quad \forall w \in
-  $L^2(\Gamma)$ ,
· \]
· \c{s}i deci  $\$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0\$\$ , a.p.t. \^{i}n  $\$\Gamma.\$\$  Avem
· astfel o echivalen\c{t}\u{a} \^{i}n sens generalizat a ecua\c{t}iei
510 varia\c{t}ionale cu problema (\ref{Form.Green2}).
· \end{exem}
·
· %\clearpage % eventual putem folosi aceasta comanda pentru a scrie bibliografia pe o pagina
· noua; sunt mai multe variante de a rupe pagina si de a trece pe pagina urmatoare; \clearpage
· este una dintre ele
·
- \bigskip
·
· \begin{thebibliography}{99}
·
· \bibitem{Anic-Ilioi/2005} Gheorghe Anicul\u{a}esei, Constantin Ilioi, \textit{Ecua\c{t}ii cu
· derivate
520 par\c{t}iale \c{s}i aproximare numeric\u{a}}, Editura Universit\u{a}\c{t}ii
· ,\hspace{-0.02cm},Alexandru Ioan Cuza'',
· Ia\c{s}i, 2005.
· \bibitem{Arna/2001} Viorel Arn\u{a}utu, \textit{Metode numerice pentru probleme
· varia\c{t}ionale. Teorie \c{s}i algoritmi}, Editura Universit\u{a}\c{t}ii
· ,\hspace{-0.02cm},Alexandru Ioan Cuza'', Ia\c{s}i, 2001.
· \bibitem{Barbu/1998} Viorel Barbu, \textit{Partial Differential Equations \emph{and}
· Boundary Value Problems}, Kluwer Academic, Dordrecht, 1998.
·
- \end{thebibliography}
·
· \addcontentsline{toc}{section}{Bibliografie}
·
· \end{document}
530
```