Soft matematic

– Laboratorul nr. 9 & 10 –

Prenume NUME
Grupa ____

Cuprins

1 Şiruri de variabile aleatoare. Tipuri de convergenţe[1]

Fie în continuare o v.a. X şi un şir $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de v.a. definite pe acelaşi spaţiu de probabilitate $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Definiţia 1.1. *Fie $p \in (0, +\infty)$. Spunem că şirul $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$* ***converge în L^p*** *la X, şi scriem*

$$X_n \xrightarrow{L^p} X, \text{ pentru } n \to +\infty,$$

dacă

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\,|X_n - X|^p = 0.$$

Propoziţia 1.1. *Dacă $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{L^p} X$, atunci $\mathbb{E}\left(|X_n|^p\right) \longrightarrow \mathbb{E}\left(|X|^p\right)$, pentru orice $p > 1$.*

Remarca 1.2. *Spaţiile $L^p(\Omega)$, al v.a. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ astfel încât $\mathbb{E}\,|X|^p < +\infty$, sunt spaţii complete şi normate (dacă $p \geq 1$), cu norma definită de*

$$\|X\|_{L^p} = \left(\mathbb{E}\,|X|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \int_\Omega X^p(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) = \int_\mathbb{R} x^p\,\mathbb{P}_X(dx)^{2}.$$

[1] Rezultatele din aceasta sectiune au fost preluate din https://www.math.uaic.ro/~maticiuc/didactic/Probability_Theory.pdf. Demonstraţiile complete pot fi cerute prin e-mail, utilizând adresa lucian.maticiuc@uaic.ro

Folosind inegalitatea lui Hölder se obţine

$$\|X\|_{L^q} \leq \|X\|_{L^p}, \quad \text{pentru orice } q < p.$$

Deci, dacă $X \in L^p$, *atunci* $X \in L^q$, *pentru orice* $q < p$, *iar dacă* $X_n \xrightarrow{L^p} X$, *atunci* $X_n \xrightarrow{L^q} X$, *când* $n \to +\infty$, *pentru orice* $q < p$.

Definiţia 1.2. *Spunem că şirul* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ***converge aproape sigur*** *la* X, *şi scriem*

$$X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X, \text{ pentru } n \to +\infty,$$

dacă

$$\mathbb{P}\left(\{\omega : \lim_{n\to+\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}\right) = 1.$$

Remarca 1.3. *Explicând definiţia putem scrie că* $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{a.s.}} X$, *dacă pentru orice* $\epsilon > 0$, *există o mulţime* N_ϵ *astfel încât şirul* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge punctual la* X *pe* N_ϵ^c, *adică*

$$\mathbb{P}\left(\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \epsilon, \text{ pentru orice } n \geq n_\epsilon(\omega)\}\right) = \mathbb{P}(N) = 0.$$

Deci $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$ *dacă mulţimea punctelor* ω *pentru care nu are loc convergenţa punctuală* $X_n(\omega) \longrightarrow X(\omega)$ *este o mulţime neglijabilă.*

Are loc[3] următoarea caracterizare precum şi o condiţie suficientă care asigură convergenţa aproape sigură.

Teorema 1.1. *Au loc urmatoarele afirmatii:*

(i) $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$, *pentru* $n \to +\infty$, *dacă şi numai dacă*

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{m\geq n} \{\omega : |X_m(\omega) - X(\omega)| \geq \epsilon\}\right) = 0, \text{ pentru orice } \epsilon > 0.$$

(ii) Dacă seria $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \epsilon)$ *este convergentă pentru orice* $\epsilon > 0$, *atunci* $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$, *pentru* $n \to +\infty$.

(iii) Dacă familia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *este independentă în ansamblu şi* $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$, *pentru* $n \to +\infty$, *atunci seria* $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \epsilon)$ *este convergentă pentru orice* $\epsilon > 0$.

Demonstraţie. Să notăm mai întâi $B_m^\epsilon = \{\omega : |X_m(\omega) - X(\omega)| < \epsilon\}$.

(i) Se arată mai întâi că

$$A = \bigcap_{\epsilon>0} \bigcup_{n\geq1} \bigcap_{m\geq n} B_m^\epsilon, \tag{1.1}$$

unde $A = \{\omega : \lim_{n\to+\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}$.

[2] Măsura de probabilitate $\mathbb{P}_X$ reprezintă **legea** variabilei aleatoare X

[3] Pentru demonstrarea rezultatelor din acest capitol vezi, de exemplu, [1].

(ii) Deoarece $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\bar{B}_m^{\epsilon}\right) < +\infty$ şi

$$0 \leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{m\geq n} \bar{B}_m^{\epsilon}\right) \leq \sum_{m\geq n} \mathbb{P}\left(\bar{B}_m^{\epsilon}\right),$$

obţinem că $X_n \xrightarrow{a.s.} X$, pentru $n \to +\infty$.

(iii) Conform punctului (i),

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{m\geq n} \bar{B}_m^{\epsilon}\right) = 0, \text{ pentru orice } \epsilon > 0.$$

Folosind Lema lui Borel Cantelli[4] deducem că $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\bar{B}_m^{\epsilon}\right) < +\infty$.

□

Definiţia 1.3. *Spunem că şirul* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ***converge în probabilitate*** *la* X*, şi scriem*

$$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X, \text{ pentru } n \to +\infty,$$

dacă pentru orice $\epsilon > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(|X_n - X| > \epsilon\right) = 0.$$

Definiţia 1.4. *Fie* X *o v.a. definită pe spaţiul de probabilitate* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *şi un şir* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *de v.a. astfel încât fiecare v.a.* X_n *este definită pe spaţiul de probabilitate* $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}_n)$*. Spunem că şirul* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ***converge în funcţia de repartiţie*** *la* X*, şi scriem*

$$X_n \xrightarrow{F} X, \text{ pentru } n \to +\infty,$$

dacă

$$\lim_{n\to+\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x),$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$ *în care* F_X *este continuă.*

Următorul rezultat ne oferă o caracterizare a convergenţei în distribuţie.

Teorema 1.2. *Fie v.a.* X_n *definite pe spaţiul de probabilitate* $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}_n)$ *şi v.a.* X *definită pe spaţiul* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*. Atunci* $X_n \xrightarrow{F} X$, *pentru* $n \to +\infty$ *dacă şi numai dacă*

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left(h\left(X_n\right)\right) = \mathbb{E}\left(h\left(X\right)\right), \tag{1.2}$$

pentru orice funcţie $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continuă şi mărginită.*

[4] **Lema lui Borel Cantelli**: (*i*) dacă $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este un şir de evenimente astfel încât $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) < +\infty$, atunci $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{m\geq n} A_m\right) = 0$.

(*ii*) dacă $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este un şir de evenimente care formează o familie independentă în ansamblu iar $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) = +\infty$, atunci $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{m\geq n} A_m\right) = 1$.

Corolarul 1.4. *Având în vedere (1.2) şi Formula de Transfer, deducem că* $X_n \xrightarrow{F} X$, *pentru* $n \to +\infty$ *dacă şi numai dacă*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} h(x)\, \mathbb{P}_{X_n}(dx) = \int_{\mathbb{R}} h(x)\, \mathbb{P}_X(dx)^{5}, \tag{1.3}$$

pentru orice funcţie $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continuă şi mărginită.*

Pe de altă parte, relaţia (1.3) reprezintă chiar definiţia ***convergenţei slabe a măsurilor de probabilitate*** $\mathbb{P}_{X_n}$ *la* $\mathbb{P}_X$, *când* $n \to +\infty$.

Remarca 1.5. *Observaţia precedentă justifică astfel denumirile alternative ale convergenţei în funcţia de repartiţie: astfel acest tip de convergenţă se mai numeşte şi* ***convergenţa în distribuţie***, *notată* $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$, *sau* ***convergenţa în lege***, *notată* $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, *sau convergenţa slabă, notată* $X_n \xrightarrow{\mathrm{w}} X$.

Următoarele rezultatele stabilesc legăturile dintre diversele tipuri de convergenţe (pentru demonstraţii sau alte rezultate similare vezi [1, Capitolul V, VI].

Teorema 1.3.

$$(i)\quad X_n \xrightarrow{a.s.} X \quad \Longrightarrow \quad X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X.$$

$$(ii)\quad X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \quad \Longrightarrow \quad \text{există } (n_k)_{k\in\mathbb{N}^*} \text{ astfel încât } X_{n_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{a.s.} X.$$

Teorema 1.4. *Având în vedere inegalitatea lui Markov, obţinem, pentru* $\epsilon > 0$ *arbitrar,*

$$\mathbb{P}\left(|X_n - X|^p \geq \epsilon\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left(|X_n - X|^p\right)}{\epsilon^p},$$

deci

$$X_n \xrightarrow{L^p} X \quad \Longrightarrow \quad X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X.$$

Teorema 1.5 (Teorema Convergenţei Dominate a lui Lebesgue)**.**

$$\text{În condiţii suplimentare, } X_n \xrightarrow{a.s.} X \quad \Longrightarrow \quad X_n \xrightarrow{L^p} X.$$

Mai precis, dacă v.a. $X_n \xrightarrow{a.s.} X$, *când* $n \to +\infty$, *şi dacă există v.a.* $Y \in L^p(\Omega)$, $p \geq 1$, *astfel încât* $|X_n| \leq Y$ *a.s., pentru orice* $n \in \mathbb{N}^*$, *atunci* $X \in L^p(\Omega)$ *şi* $X_n \xrightarrow{L^p} X$, *când* $n \to +\infty$.

Teorema 1.6. *Au loc urmatoarele afirmaţii:*

(a) În condiţii suplimentare,

$$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \quad \Longrightarrow \quad X_n \xrightarrow{L^p} X.$$

Mai precis, dacă $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ *când* $n \to +\infty$ *şi dacă există v.a.* $Y \in L^p(\Omega)$ *astfel încât* $|X_n| \leq Y$ *a.s., pentru orice* $n \in \mathbb{N}^*$, *atunci* $X_n \xrightarrow{L^p} X$ *când* $n \to +\infty$.

[5] Masura de probabilitate $\mathbb{P}_X$ reprezintă **legea** variabilei aleatoare X

(b)

$$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \quad \Longrightarrow \quad X_n \xrightarrow{F} X$$

(v.a. X, X_n sunt definite pe acelaşi spaţiu de probabilitate $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$).

(c)

$$X_n \xrightarrow{F} c \quad \Longrightarrow \quad X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c,$$

unde c este o v.a. constantă.

(d) În condiţii suplimentare,

$$X_n \xrightarrow{F} X \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{E}(X_n) \longrightarrow \mathbb{E}(X).$$

Mai precis, dacă v.a. $X_n \xrightarrow{F} X$, când $n \to +\infty$, şi dacă există v.a. $Y \in L^1(\Omega)$ astfel încât $|X_n| \leq Y$ a.s., pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $X \in L^1(\Omega)$ şi $\mathbb{E}(X_n) \longrightarrow \mathbb{E}(X)$, când $n \to +\infty$.

(e) În condiţii suplimentare,

$$X_n \xrightarrow{F} X \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{E}(X_n) \longrightarrow \mathbb{E}(X).$$

Mai precis, dacă v.a. $X_n \xrightarrow{F} X$, când $n \to +\infty$, şi dacă există $p > 1$ astfel încât $\sup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{E}|X_n|^p < +\infty$, atunci $X \in L^1(\Omega)$ şi $\mathbb{E}(X_n) \longrightarrow \mathbb{E}(X)$, când $n \to +\infty$.

2 Tabele. Exemple diverse[6]

Exemplul 2.1. Tabelul

Nume	Matematică	Fizică	Chimie	Total
Ana-Maria	35	40	45	120
Robert	50	45	40	135
Vlad	9	20	30	59

reprezintă situaţia punctajului …

Exemplul 2.2. Există şi varianta de scriere:

Tabelul

Nume	Matematică[7]	Fizică	Chimie	Total
Ana-Maria	35	40	45	120
Robert	50	45	40	135
Vlad	9	20	30	59

reprezintă situaţia punctajului …

[6] Aceste exemple sunt preluate din [2]

[7] Este vorba de punctajele obtinute la testarile finale la disciplinele respective

Exemplul 2.3. Tabelul

Nume	Matematică	Fizică	Chimie	Total
Ana-Maria	35	40	45	120
Robert	50	45	40	135
Vlad	9	20	30	59

reprezintă situaţia punctajului . . .

Exemplul 2.4. Tabelul urmator este exact tabelul de mai sus dar am obţinut alinerea pe orizontală a elementelor primelor două linii folosind comanda `\hfil`

Nume	Matematică	Fizică	Chimie	Total
Ana-Maria	35	40	45	120
Robert	50	45	40	135
Vlad	9	20	30	59

Exemplul 2.5. Tabelul

Nume	Disciplina			Total
	Matematică	Fizică	Chimie	
Ana-Maria	35	40	45	120
Robert	50	45	40	135
Vlad	9	20	30	59

reprezintă situaţia punctajului . . .

Exemplul 2.6. Tabelul

		Regimul disciplinei		Număr de ore/săpt.		
		Obligatorie	Opţională	Curs	Sem.	Lab.
Sem. I	Disciplina 1	✓	–	3	2	1
	Disciplina 2	✓	–	2	1	1
	Disciplina 3	–	✓	2	2	–
Sem. II	Disciplina 4	✓	–	2	–	3
	Disciplina 5	–	✓	2	2	–

reprezintă programa de învaţământ . . .

Exemplul 2.7. Tabelul

		Regimul disciplinei		Număr de ore/săpt.		
		Obligatorie	Opţională	Curs	Sem.	Lab.
Sem. I	Disciplina 1	✓	–	3	2	1
	Disciplina 2	✓	–	2	1	1
	Disciplina 3	–	✓	2	2	–
Sem. II	Disciplina 4	✓	–	2	–	3
	Disciplina 5	–	✓	2	2	–

reprezintă programa de învaţământ . . .

Exemplul 2.8. Tabelul

Nume	Matematică	Fizică	Chimie
Ana-Maria	35	40	45
Robert	50	45	40
Vlad	9	20	30

reprezintă situaţia punctajului . . .

Exemplul 2.9. Tabelul

Nume	Matematică	Fizică	Chimie
Ana-Maria	35	40	45
Robert	50	45	40
Vlad	9	20	30

reprezintă situaţia punctajului . . .

Exemplul 2.10. Avem tabelul

Tabelul 1: Situaţia punctajului

Nume	Matematică	Fizică	Chimie
Ana-Maria	35	40	45
Robert	50	45	40
Vlad	9	20	30

Acum putem sa il apelam: vezi Tabelul 1

3 Tipuri de liste. Exemple diverse[8]

Exemplul 3.1. Folosim doar mediul `enumerate` şi etichetăm şi ne şi referim la elementele listei:

1. Procese Poisson

[8] Aceste exemple sunt preluate din [2]

   (a) Definiţii
   (b) Timpii dintre două evenimente
      i. Independenţa
      ii. Distribuţia exponenţială
         A. Definiţia
         B. Proprietatea „Lipsa de memorie”
   (c) Procese Poisson generale
      i. Procese Poisson neomogene
      ii. Procese Poisson compuse

2. Lanţuri Markov
   (a) Noţiuni introductive
   (b) Ecuaţia Chapman–Kolmogorov
   (c) Clasificarea stărilor
      i. Periodicitate
      ii. Stări recurente
      iii. Stări tranzitorii

În cadrul temei 2 se pot face şi reprezentări sub formă de grafuri. În special în cazul clasificărilor 2(c)ii şi 2(c)iii.

Exemplul 3.2. Acum folosim doar mediul `itemize`:

- Procese Poisson
  - Definiţii
  - Timpii dintre două evenimente
    - Independenţa
    - Distribuţia exponenţială
      - Definiţia
      - Proprietatea „Lipsa de memorie”
  - Procese Poisson generale
    - Procese Poisson neomogene
    - Procese Poisson compuse
- Lanţuri Markov
  - Noţiuni introductive
  - Ecuaţia Chapman–Kolmogorov
  - Clasificarea stărilor
    - Periodicitate

      * Stări recurente
      * Stări tranzitorii

Exemplul 3.3. Acum scriem exact lista de mai sus, cu mediul `itemize`, în care **specificăm noi cât să fie spaţiul indent (merge la orice fel de mediu ce creează liste)**. Acolo unde nu s-a folosit se vede diferenţa !

- Procese Poisson
  - Definiţii (aici sunt 0.4 cm.)
  - Timpii dintre două evenimente (aici sunt 0.4 cm.)
    * Independenţa (aici sunt 0.4 cm.)
    * Distribuţia exponenţială (aici sunt 0.4 cm.)
      · Definiţia (aici sunt 0.3 cm.)
      · Proprietatea „Lipsa de memorie" (aici sunt 0.3 cm.)
  - Procese Poisson generale
    * Procese Poisson neomogene (începând de aici nu mai este schimbată distanţa)
    * Procese Poisson compuse
- Lanţuri Markov
  - Noţiuni introductive
  - Ecuaţia Chapman–Kolmogorov
  - Clasificarea stărilor
    * Periodicitate
    * Stări recurente
    * Stări tranzitorii

Exemplul 3.4. Avem trei medii care creează liste; le putem folosi şi intercalate (oricare trei cu oricare trei). De exemplu:

1. Procese Poisson
   (a) Definiţii
   (b) Timpii dintre două evenimente
   (c) Procese Poisson generale
2. Lanţuri Markov
   - Noţiuni introductive
   - Ecuaţia Chapman–Kolmogorov
   - Clasificarea stărilor
3. Martingale

i. Definiţii şi exemple

ii. Martingale şi lanţuri Markov

iii. Timpi de oprire

Exemplul 3.5. Putem scrie şi sub forma următoare (indicăm să apară ce vrem noi la începutul fiecărui element al listei, indiferent de mediul folosit)

1. Procese Poisson
   - (j) Definiţii
   - (jj) Timpii dintre două evenimente
   - (jjj) Procese Poisson generale
2. Lanţuri Markov
   - ∗ Noţiuni introductive
   - ∗ Ecuaţia Chapman–Kolmogorov
   - ∗ Clasificarea stărilor
3. Martingale
   - **a.** Definiţii şi exemple
   - **b.** Martingale şi lanţuri Markov
   - **c.** Timpi de oprire

Exemplul 3.6. Redefinirea automata modului de notare a elementelor listei se poate face astfel:

Q1. Întrebarea 1
   - i) Varianta 1.1
   - ii) Varianta 1.2
   - iii) Varianta 1.3

Q2. Întrebarea 2
   - i) Varianta 2.1
   - ii) Varianta 2.2
   - iii) Varianta 2.3

Răspunsul corect la întrebarea Q1. este dat de varianta Q1.ii).

Exemplul 3.7. Comenzile de tip „`\renewcommand`" si-au pierdut efectul, fiind scrise in cadrul unui mediu

1. Întrebarea 1
   (a) Varianta 1.1
   (b) Varianta 1.2
   (c) Varianta 1.3
2. Întrebarea 2
   (a) Varianta 2.1
   (b) Varianta 2.2
   (c) Varianta 2.3

Răspunsul corect la întrebarea 1 este dat de varianta 1b.

Index

Bibliografie selectivă

[1] George Ciucu, Constantin Tudor, *Probabilităţi şi procese stochastice*, vol. I, Editura Academiei, Bucureşti, 1978.

[2] Lucian Maticiuc, *Introducere în LaTeX*, Universitatea „Alexandru Ioan Cuza", Iaşi, https://www.math.uaic.ro/~maticiuc/didactic/LaTeX_Course.pdf, 2019.

[3] Lucian Maticiuc, *Teoria Probabilităţilor (Teorie şi Aplicaţii)*, Universitatea „Alexandru Ioan Cuza", Iaşi, https://www.math.uaic.ro/~maticiuc/didactic/Probability_Theory, 2019.