Facultatea de Hidrotehnică, Geodezie şi Ingineria Mediului
Analiza Matematică II, Semestrul II
Conf. dr. Lucian MATICIUC

CURS VII – VIII

Capitolul IV: Integrala dublă

1 Definiţia integralei duble

Fie domeniul plan $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ compact (închis şi mărginit). Se numeşte **diviziunea** Δ a domeniului $\mathcal{D}$ împărţirea lui $\mathcal{D}$ în subdomenii $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, ..., \mathcal{D}_n$ astfel încât oricare două subdomenii să nu aibă în comun puncte interioare şi fiecare punct al domeniului $\mathcal{D}$ să aparţină cel puţin unui subdomeniu. Notăm cu $a_1, a_2, ..., a_n$ ariile corespunzătoare acestor subdomenii. Se numeşte **diametrul** unui domeniu închis, distanţa cea mai mare dintre două puncte oarecare, adică

$$\lambda_i = \sup_{A,B\in\mathcal{D}_i} d(A,B)$$

şi fie $\lambda_d = \max\limits_{i=\overline{1,n}} \lambda_i$ diametrul maxim al diviziunii Δ numit şi **norma** diviziunii.

Fie funcţia $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$. Alegem în mod arbitrar un **punct intermediar** $(\xi_i, \eta_i) \in \mathcal{D}_i$ şi notăm

$$\sigma_d(f) \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \cdot a_i$$

pe care o numim **suma integrală Riemann** asociată funcţiei f în domeniul $\mathcal{D}$.

Definiţia 1 *Fie $(\Delta_n)_n$ un şir de diviziuni ale domeniului $\mathcal{D}$ cu norma $\lambda_{d_n} = \|\Delta_n\| \to 0$, pentru $n \to \infty$. Dacă limita $I = \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{d_n}(f)$ există, este finită şi nu depinde de şirul de diviziuni ales şi nici de alegerea punctelor intermediare, atunci funcţia f se numeşte integrabilă pe domeniul $\mathcal{D}$. Limita I se numeşte **integrala dublă** a funcţiei f în domeniul $\mathcal{D}$ şi se notează prin*

$$I = \iint\limits_{(\mathcal{D})} f(x,y)\, da,$$

*unde da este **elementul de arie**.*

Teorema 2 *O funcţie integrabilă pe $\mathcal{D}$ este în mod necesar mărginită.*

Teorema 3 *Orice funcţie $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, continuă pe $\mathcal{D}$ este integrabilă pe $\mathcal{D}$.*

2 Proprietăţi ale integralei duble

1. Dacă $f, g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ sunt două funcţii integrabile pe $\mathcal{D}$, atunci, pentru orice constantă α, β, are loc
$$\iint\limits_{(\mathcal{D})} \left[\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)\right] da = \alpha \iint\limits_{(\mathcal{D})} f(x,y)\, da + \beta \iint\limits_{(\mathcal{D})} g(x,y)\, da$$

2. Dacă $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ unde $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ sunt domenii închise care nu au puncte interioare comune, atunci
$$\iint\limits_{(\mathcal{D})} f(x,y)\, da = \iint\limits_{(\mathcal{D}_1)} f(x,y)\, da + \iint\limits_{(\mathcal{D}_2)} f(x,y)\, da$$

3. Dacă $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in \mathcal{D}$ şi f, g sunt integrabile pe $\mathcal{D}$, atunci
$$\iint\limits_{(\mathcal{D})} f(x,y)\, da \geq \iint\limits_{(\mathcal{D})} g(x,y)\, da$$

4. Dacă $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ este integrabilă pe $\mathcal{D}$, atunci şi funcţia $|f|$ este integrabilă pe $\mathcal{D}$ şi
$$\left| \iint\limits_{(\mathcal{D})} f(x,y)\, da \right| \leq \iint\limits_{(\mathcal{D})} |f(x,y)|\, da$$

5. (**Teorema de medie**) Dacă f este continuă pe $\mathcal{D}$, atunci există un punct $(\xi, \eta) \in \mathcal{D}$ astfel încât are loc
$$\iint\limits_{(\mathcal{D})} f(x,y)\, da = f(\xi, \eta) \cdot \mathcal{A}(\mathcal{D})$$

3 Metode de calcul. Formula lui Green

Vom considera mai întâi cazul domeniilor dreptunghiulare
$$\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\right\} = [a,b] \times [c,d]$$

Teorema 4 ***(de reducere a integralei duble la o integrală iterată în cazul domeniului dreptunghiular)*** *Fie $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, unde $\mathcal{D} = [a,b] \times [c,d]$. Dacă există integrala dublă $I = \iint\limits_{(\mathcal{D})} f(x,y)\, da$ şi integrala simplă $I(x) = \int\limits_c^d f(x,y)\, dy$, $\forall x \in [a,b]$, atunci există şi integrala iterată $\int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)\, dy \right) dx$ şi are loc egalitatea*
$$\iint\limits_{(\mathcal{D})} f(x,y)\, da = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)\, dy \right) dx \tag{1}$$

Corolarul 5 *Similar, dacă există integrala dublă I şi integrala simplă $J(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$, $\forall y \in [c,d]$, atunci există şi integrala iterată $\int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)\,dx\right) dy$ şi are loc egalitatea*

$$\iint\limits_{(\mathcal{D})} f(x,y)\,da = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)\,dx\right) dy \tag{2}$$

Corolarul 6 *Dacă funcţia f este continuă atunci există toate integralele de mai sus şi au loc egalităţile (1)-(2).*

Remarca 7 *Observăm că în cazul domeniului dreptunghiular elementul de arie este*

$$da = dxdy.$$

De aceea vom nota în continuare integrala dublă prin

$$\iint\limits_{(\mathcal{D})} f(x,y)\,dxdy$$

Deci în acest caz al domeniului dreptunghiular, integrala dublă se transformă într-o succesiune de două integrale simple, deci calculul integralei duble se reduce la calculul a două integrale definite.

Exerciţiul 8 *Să se calculeze următoarea integrală dublă*

$$I = \iint\limits_{\mathcal{D}} \left(5xy^2 - 2x^3\right) dxdy$$

unde $\mathcal{D}$ este dreptunghiul $\mathcal{D} = [1,3] \times [2,5]$.

Avem reducerea integralei duble la două integrale simple

$$I = \int\limits_1^3 \left(\int\limits_2^5 \left(5xy^2 - 2x^3\right) dy\right) dx = \int\limits_2^5 \left(\int\limits_1^3 \left(5xy^2 - 2x^3\right) dx\right) dy$$

Vom calcula integrala $\int\limits_2^5 \left(5xy^2 - 2x^3\right) dy$ şi vom ţine cont de faptul că ***atunci când integrăm în raport cu o variabilă vom considera cealaltă variabilă drept constantă****. Astfel*

$$\int\limits_2^5 \left(5xy^2 - 2x^3\right) dy = \left(5x\frac{y^3}{3} - 2x^3 y\right)\Bigg|_{y=2}^{y=5} = \left(5x \cdot \frac{5^3}{3} - 2x^3 \cdot 5\right) - \left(5x \cdot \frac{2^3}{3} - 2x^3 \cdot 2\right) =$$

$$= \left(\frac{5^4}{3}x - 10x^3\right) - \left(\frac{40}{3}x - 4x^3\right) = \frac{585}{3}x - 6x^3$$

Deci

$$I=\int_1^3\left(\frac{585}{3}x-6x^3\right)dx=\left(\frac{585}{3}\frac{x^2}{2}-6\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_{x=1}^{x=3}=\cdots$$

Temă: de calculat integrala I folosind reducerea

$$I=\int_2^5\left(\int_1^3\left(5xy^2-2x^3\right)dx\right)dy=\cdots$$

Exercițiul 9 *Să se calculeze următoarea integrală dublă*

$$I=\iint_{(\mathcal{D})}\frac{y}{\left(1+x^2+y^2\right)^{3/2}}dxdy$$

unde $\mathcal{D}$ este dreptunghiul $\mathcal{D}=[0,1]\times[0,1]$.

Avem reducerea integralei duble la două integrale simple

$$I=\int_0^1\left(\int_0^1\frac{y}{\left(1+x^2+y^2\right)^{3/2}}dy\right)dx=\int_0^1\left(\int_0^1\frac{y}{\left(1+x^2+y^2\right)^{3/2}}dx\right)dy$$

*Vom calcula integrala $\int_0^1\frac{y}{\left(1+x^2+y^2\right)^{3/2}}dy$ și vom ține cont de faptul că **atunci când integrăm în raport cu o variabilă vom considera cealaltă variabilă drept constantă**. Astfel*

$$\int_0^1\frac{y}{\left(1+x^2+y^2\right)^{3/2}}dy=\frac{1}{2}\int_0^1\left(1+x^2+y^2\right)^{-3/2}\cdot\left(1+x^2+y^2\right)'_y\,dy=$$

$=$ *(folosind prima metodă de schimbare de variabilă)* $=$

$$=\frac{1}{2}\left.\frac{\left(1+x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1}\right|_{y=0}^{y=1}=-\left[\left(2+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}-\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right]=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}$$

Deci

$$I=\int_0^1\left(\int_0^1\frac{y}{\left(1+x^2+y^2\right)^{3/2}}dy\right)dx=\int_0^1\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}\right)dx$$

$$=\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-\ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)\right]\Big|_{x=0}^{x=1}=\ln\left.\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+2}}\right|_{x=0}^{x=1}=$$

$$=\ln\frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}-\ln\frac{1}{\sqrt{2}}=\ln\sqrt{2}\frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}.$$

Observăm că dacă vom calcula mai întâi $\int\limits_0^1 \frac{y}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}dx = y\int\limits_0^1 \left(1+x^2+y^2\right)^{-3/2}dx$ *atunci calculul integralei în raport cu* dx *este mai dificil.*

Vom prezenta în continuare teoreme de reducere a integralei duble atunci când domeniul este unul simplu în raport cu axele. Mai precis:

Definiţia 10 *Fie* $\mathcal{D}\subset\mathbb{R}^2$ *un domeniu compact. Spunem că* ***domeniul este simplu în raport cu axa*** Oy *dacă*

$$\mathcal{D}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : a\le x\le b,\ \varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\right\},$$

unde $\varphi_1,\varphi_2:[a,b]\to\mathbb{R}$ *sunt funcţii continue astfel încât* $\varphi_1(x)<\varphi_2(x),\ \forall x\in(a,b)$.

Definiţia 11 *Similar putem defini* ***domeniul simplu în raport cu axa*** Ox*, domeniul dat de*

$$\mathcal{D}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : c\le y\le d,\ \psi_1(y)\le x\le\psi_2(y)\right\},$$

unde $\psi_1,\psi_2:[c,d]\to\mathbb{R}$ *sunt funcţii continue astfel încât* $\psi_1(y)<\psi_2(y),\ \forall y\in(c,d)$.

Teorema 12 ***(de reducere a integralei duble la o integrală iterată în cazul domeniului simplu în raport cu*** Oy***)*** *Fie funcţia* $f:\mathcal{D}\to\mathbb{R}$ *unde* $\mathcal{D}$ *este un domeniu simplu în raport axa* Oy*. Dacă există integrala dublă* $I=\iint\limits_{(\mathcal{D})} f(x,y)\,da$ *şi pentru fiecare* $x\in[a,b]$ *există integrala simplă* $I(x)=\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$*, atunci există şi integrala iterată* $\int\limits_a^b\left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\right)dx$ *şi are loc egalitatea*

$$\iint\limits_{(\mathcal{D})} f(x,y)\,da=\int\limits_a^b\left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\right)dx \tag{3}$$

Demonstraţie. Acoperim domeniul $\mathcal{D}$ cu dreptunghiul $A'B'C'D'=[a,b]\times[c,d]$, unde $c=\min\limits_{a\le x\le b}\varphi_1(x)$ şi $d=\max\limits_{a\le x\le b}\varphi_2(x)$. Definim funcţia

$$f^*(x,y)=\begin{cases} f(x,y),\ (x,y)\in\mathcal{D}\\ 0,\ (x,y)\in([a,b]\times[c,d])\setminus\mathcal{D}\end{cases}$$

Această funcţie este integrabilă pe $\mathcal{D}$, de semenea şi pe $([a,b]\times[c,d])\setminus\mathcal{D}$ deci este integrabilă pe dreptunghiul $[a,b]\times[c,d]$ şi

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f^*(x,y)\,da=\iint\limits_{(\mathcal{D})} f(x,y)\,da$$

Pe de altă parte

$$\int\limits_c^d f^*(x,y)\,dy=\int\limits_c^{\varphi_1(x)} f^*(x,y)\,dy+\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f^*(x,y)\,dy+\int\limits_{\varphi_2(x)}^{d} f^*(x,y)\,dy$$

Dar
$$\int_c^{\varphi_1(x)} f^*(x,y)\,dy = 0 = \int_{\varphi_2(x)}^{d} f^*(x,y)\,dy\ ,\quad \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f^*(x,y)\,dy = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$$
deci
$$\int_c^d f^*(x,y)\,dy = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$$
Aplicând teorema de reducere a integralei duble la o integrală iterată în cazul domeniului dreptunghiular obţinem
$$\int_c^d f^*(x,y)\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f^*(x,y)\,dy\right) dx,$$
ceea ce trebuia demonstrat. ∎

Corolarul 13 ***(reducerea integralei duble la o integrală iterată în cazul domeniului simplu în raport cu*** Ox***)*** *Fie funcţia* $f:\mathcal{D}\to\mathbb{R}$ *unde* $\mathcal{D}$ *este un domeniu simplu în raport axa* Ox*. Dacă există integrala dublă* $I=\iint\limits_{(\mathcal{D})} f(x,y)\,da$ *şi pentru fiecare* $y\in[c,d]$ *există integrala simplă* $J(y)=\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx$*, atunci există şi integrala iterată* $\int\limits_c^d\left(\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx\right)dy$ *şi are loc egalitatea*
$$\iint\limits_{(\mathcal{D})} f(x,y)\,da = \int_c^d\left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx\right)dy$$

Exerciţiul 14 *Să se calculeze următoarea integrală dublă*
$$I=\iint\limits_{(\mathcal{D})}\left(x^2+y\right)dxdy$$
unde $\mathcal{D}$ *este domeniul mărginit de parabolele* $y=x^2$ *şi* $y^2=x$*.*

Desenăm mai întâi domeniul şi observăm că este simplu în raport cu ambele axe. ***Explicităm domeniul: luăm*** $x\in[0,1]$ ***arbitrar şi prin*** x ***ducem o paralelă la axa*** Oy ***care va intersecta domeniul*** D ***în curbele*** $\varphi_1(x)=x^2$ *şi* $\varphi_2(x)=\sqrt{x}$*. Deci obţinem explicitarea*
$$\mathcal{D}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 0\le x\le 1,\ x^2\le y\le\sqrt{x}\right\}$$

Aplicăm (3) şi obţinem

$$I = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} \left(x^2 + y\right) dy \right) dx$$

şi calculăm mai întâi

$$\int_{x^2}^{\sqrt{x}} \left(x^2 + y\right) dy = \left(x^2 y + \frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} = \left(x^2\sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}^2}{2} \right) - \left(x^2 x^2 + \frac{\left(x^2\right)^2}{2} \right) =$$

$$= \left(x^2\sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}^2}{2} \right) - \left(x^2 \cdot x^2 + \frac{\left(x^2\right)^2}{2} \right) = x^2\sqrt{x} + \frac{x}{2} - \frac{3x^4}{2} = x^{5/2} + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}x^4$$

deci

$$I = \int_0^1 \left(x^{5/2} + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}x^4 \right) dx = \left(\frac{x^{5/2+1}}{5/2+1} + \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}\frac{x5}{5} \right) \Bigg|_{x=0}^{x=1} =$$

$$= \frac{2}{7} + \frac{1}{4} - \frac{3}{10} = \frac{33}{140}$$

Temă: de calculat aceeaşi integrală I folosind faptul că domeniul $\mathcal{D}$ este simplu în raport cu axa Ox. Avem explicitarea $\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 1,\ y^2 \le x \le \sqrt{y}\right\}$ ...

Exerciţiul 15 *(Temă) Să se calculeze următoarea integrală dublă*

$$I = \iint_{(\mathcal{D})} \frac{x^2}{y^2} dxdy$$

unde $\mathcal{D}$ este domeniul mărginit de dreptele $x = 2$, $y = x$ şi de hiperbola $xy = 1$.

În cazul în care domeniul de integrare $\mathcal{D}$ nu este simplu în raport cu axele atunci se încearcă descompunerea domeniului într-un număr finit de subdomenii astfel încât ele să fie domenii simple în raport cu o axă.

Exerciţiul 16 *Să se transforme integrala dublă $\iint_{(\mathcal{D})} f(x,y)\, dxdy$ în integrale iterate, unde $\mathcal{D}$ este domeniul mărginit de cercurile $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 4x$.*

Amintim mai întâi ***ecuaţia generală a unui cerc*** *cu centru în $C(a,b)$ şi de rază r :*

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

În cazul nostru, primul cerc $(\mathcal{C}_1) : x^2 + y^2 = 2x \Leftrightarrow \left(x^2 - 2x\right) + y^2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1$ este cu centrul în $C_1(1,0)$ şi de rază $r_1 = 1$.

Al doilea cerc $(\mathcal{C}_2) : x^2 + y^2 = 4x \Leftrightarrow \left(x^2 - 4x\right) + y^2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 = 4$ este cu centrul în $C_2(2,0)$ şi de rază $r_1 = 2$.

Ducem prin $x = 2$ o paralelă la axa Oy şi astfel domeniul $\mathcal{D}$ se va împărţi în trei subdomenii: $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 \cup \mathcal{D}_3$ şi fiecare subdomeniu $\mathcal{D}_i$ este simplu în raport cu Oy. Are loc

$$I = \iint_{(\mathcal{D}_1)} f(x,y)\,dxdy + \iint_{(\mathcal{D}_2)} f(x,y)\,dxdy + \iint_{(\mathcal{D}_3)} f(x,y)\,dxdy$$

Trebuie explicitat fiecare subdomeniu. În acest sens vom scrie ecuaţiile explicite ale cercurilor:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{C}_1) &: \quad x^2+y^2=2x \Leftrightarrow y^2 = 2x-x^2 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{2x-x^2} \\
(\mathcal{C}_2) &: \quad x^2+y^2=4x \Leftrightarrow y^2 = 4x-x^2 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{4x-x^2}
\end{aligned}$$

deci obţinem

$$\mathcal{D}_1 = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2,\ \sqrt{2x-x^2} \le y \le \sqrt{4x-x^2}\right\}$$

$$\mathcal{D}_2 = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2,\ -\sqrt{4x-x^2} \le y \le -\sqrt{2x-x^2}\right\}$$

$$\mathcal{D}_3 = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 2 \le x \le 4,\ -\sqrt{4x-x^2} \le y \le \sqrt{4x-x^2}\right\}$$

În acest caz integralele sunt date de

$$\begin{aligned}
I_1 &= \iint_{(\mathcal{D}_1)} f(x,y)\,dxdy = \int_0^2 \left(\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4x-x^2}} f(x,y)\,dy\right) dx \\
I_2 &= \iint_{(\mathcal{D}_2)} f(x,y)\,dxdy = \int_0^2 \left(\int_{-\sqrt{4x-x^2}}^{-\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,dy\right) dx \\
I_3 &= \iint_{(\mathcal{D}_3)} f(x,y)\,dxdy = \int_2^4 \left(\int_{-\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{4x-x^2}} f(x,y)\,dy\right) dx
\end{aligned}$$

Teorema 17 (Formula lui Green) *Fie $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu închis şi mărginit de curba închisă şi netedă $\mathcal{C}$. Fie funcţiile $P, Q : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ continue, derivabile parţial şi cu derivatele parţiale $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ şi $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ continue pe $\mathcal{D}$. Atunci are loc formula (de legătură între integrala curbilinie de specia a II-a şi integrala dublă)*

$$\oint_{(\mathcal{C})} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_{(\mathcal{D})} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

Demonstraţie. Fie mai întâi cazul particular al unui domeniu simplu în raport cu axa Oy, adică

$$\mathcal{D} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : a \le x \le b,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\right\}$$

Deci $\mathcal{D}$ este trapezul curbiliniu $PQRS$. Avem

$$\begin{aligned}\iint\limits_{(\mathcal{D})} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy &= \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) dx = \int\limits_a^b \left(P\left(x,y\right)\Big|_{y=\varphi_1(x)}^{y=\varphi_2(x)} \right) dx = \\ &= \int\limits_a^b P\left(x,\varphi_2\left(x\right)\right) dx - \int\limits_a^b P\left(x,\varphi_1\left(x\right)\right) dx\end{aligned}$$

Pe de altă parte

$$\int\limits_a^b P\left(x,\varphi_2\left(x\right)\right) dx = \int\limits_{(\widehat{SR})} P\left(x,y\right) dx\ , \quad \int\limits_a^b P\left(x,\varphi_1\left(x\right)\right) dx = \int\limits_{(\widehat{PQ})} P\left(x,y\right) dx$$

deci

$$\iint\limits_{(\mathcal{D})} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int\limits_{(\widehat{SR})} P\left(x,y\right) dx - \int\limits_{(\widehat{PQ})} P\left(x,y\right) dx = -\int\limits_{(\widehat{RS})} P\left(x,y\right) dx - \int\limits_{(\widehat{PQ})} P\left(x,y\right) dx$$

Dar

$$\int\limits_{(\widehat{QR})} P\left(x,y\right) dx = 0 = \int\limits_{(\widehat{SP})} P\left(x,y\right) dx$$

deoarece pe curbele (segmentele) $(\widehat{QR})$, $(\widehat{SP})$ abscisa x este constantă. Deci

$$\begin{aligned}\iint\limits_{(\mathcal{D})} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy &= -\int\limits_{(\widehat{PQ})} P\left(x,y\right) dx - \int\limits_{(\widehat{QR})} P\left(x,y\right) dx - \int\limits_{(\widehat{RS})} P\left(x,y\right) dx - \int\limits_{(\widehat{SP})} P\left(x,y\right) dx = \\ &= -\int\limits_{(\widehat{PQRS})} P\left(x,y\right) dx\end{aligned}$$

Analog

$$\iint\limits_{(\mathcal{D})} \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \int\limits_{(\widehat{PQRS})} Q\left(x,y\right) dx$$

ceea ce implică relaţia enunţul teoremei. ■

Exerciţiul 18 *Aplicaţi formula lui Green pentru calculul integralei curbilinii*

$$I = \oint\limits_{(\mathcal{C})} 2\left(x^2 + y^2\right) dx + \left(x + y\right)^2 dy$$

unde $(\mathcal{C})$ *este triunghiul dat de intersecţia dreptelor* $x = 1, y = x$ *şi* $y = 4 - x$.

4 Schimbarea de variabile în integrala dublă

Fie în planul xOy domeniul $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ compact, mărginit de curba închisă $(\mathcal{C})$, netedă pe porţiuni, şi fie în planul $\xi O\eta$ domeniul $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ compact, mărginit de curba închisă $(\mathcal{L})$, netedă pe porţiuni. Să presupunem că între domeniile $\mathcal{D}$ şi Δ există o **transformare punctuală** dată prin

$$\begin{cases} x = x(\xi, \eta), \\ y = y(\xi, \eta), \ (\xi, \eta) \in \Delta \end{cases}$$

cu x, y funcţii continue, derivabile cu derivatele de ordinul întâi continue şi derivatele de ordinul doi mixte continue pe Δ. Vom presupune că **determinantul funcţional** al transformării (**jacobianul**) este diferit de zero pe Δ, adică

$$J(\xi, \eta) = \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} \overset{def}{=} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial x}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} \neq 0$$

Conform unei teoreme de la transformări punctuale (teoria sem. I) obţinem că există transformarea inversă

$$\begin{cases} \xi = \xi(x, y), \\ \eta = \eta(x, y), \ (x, y) \in \mathcal{D} \end{cases}$$

Datorită corespondenţei biunivoce dintre domeniile $\mathcal{D}$ şi Δ numerele ξ, η pot fi considerate coordonate ale punctelor din $\mathcal{D}$. Numerele ξ, η care caracterizează poziţia unui punct din planul xOy se numesc **coordonatele curbilinii** ale punctului.

Definiţia 19 *Corespondenţa dintre $\mathcal{D}$ şi Δ spunem că este directă dacă atunci când un punct de deplasează pe $(\mathcal{L})$ în sens direct, punctul corespunzător de pe $(\mathcal{C})$ se deplasează tot în sens direct.*

Teorema 20 (Expresia ariei plane în coordonate curbilinii) *1) Aria domeniului $\mathcal{D}$ se exprimă cu formula*

$$\mathcal{A} = \pm \iint\limits_{(\Delta)} J(\xi, \eta)\ d\xi d\eta,$$

unde semnul din faţa integralei este acelaşi cu semnul lui J.

2) Dacă jacobianul $J(\xi, \eta)$ este pozitiv atunci transformarea este directă.

Demonstraţie. Conform unei formule dintr-un curs precedent obţinem că

$$\mathcal{A} = \pm \int\limits_{(\mathcal{L})} x(\xi, \eta)\, dy(\xi, \eta) = \pm \int\limits_{(\mathcal{L})} x(\xi, \eta) \left[\frac{\partial y}{\partial \xi}\, d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta}\, d\eta \right]$$

Semnul $+$ corespunde cazului în care parcurgerii curbei $(\mathcal{C})$ în sensul pozitiv îi corespunde parcurgerea tot în sensul pozitiv a curbei $(\mathcal{L})$. Aplicăm formula lui Green şi obţinem

$$\begin{aligned}\mathcal{A} = \pm & \int\limits_{(\mathcal{L})} \left[x\frac{\partial y}{\partial \xi}\, d\xi + x\frac{\partial y}{\partial \eta}\, d\eta\right] = \pm \iint\limits_{(\Delta)} \left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(x\frac{\partial y}{\partial \eta}\right) - \frac{\partial}{\partial \eta}\left(x\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)\right] d\xi d\eta = \\ = & \pm \iint\limits_{(\Delta)} \left[\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} + x\frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi} - x\frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta}\right] d\xi d\eta = \pm \iint\limits_{(\Delta)} \left[\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right] d\xi d\eta = \\ = & \pm \iint\limits_{(\Delta)} J(\xi, \eta)\, d\xi d\eta\end{aligned}$$

Deoarece aria lui $\mathcal{D}$ este un număr pozitiv semnul din faţa integralei curbilinii coincide cu semnul integralei jacobianului. Deci pentru $J(\xi, \eta) > 0$ se ia semnul plus în faţa integralei curbilinii ceea ce înseamnă parcurgerea conturului $(\mathcal{L})$ tot în sens pozitiv. ■

Teorema 21 (de schimbare de variabilă în integrale duble) *În condiţiile de mai sus, dacă funcţia f este continuă pe $\mathcal{D}$ atunci are loc formula*

$$\iint\limits_{(\mathcal{D})} f(x, y)\ dxdy = \iint\limits_{(\Delta)} f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))\ |J(\xi, \eta)|\ d\xi d\eta$$

indiferent dacă domeniile au sau nu aceeaşi orientare.

Demonstraţie. Descompunem domeniul Δ cu ajutorul unei reţele de curbe netede pe porţiuni în părţi $(\Delta_i)_{i=\overline{1,n}}$. Domeniul $\mathcal{D}$ se va descompune prin urmare în părţi $(\mathcal{D}_i)_{i=\overline{1,n}}$. În fiecare $\mathcal{D}_i$ alegem arbitrar punctul (x_i, y_i) şi scriem suma integrală care are drept limită integrala dublă

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \cdot \mathcal{A}(\mathcal{D}_i) \to \iint\limits_{(\mathcal{D})} f(x, y)\ dxdy \tag{4}$$

Pe de altă parte putem deduce din teorema precedentă, aplicând o teroemă de medie, că

$$\mathcal{A}(\mathcal{D}_i) = |J(\xi_i^*, \eta_i^*)|\ \mathcal{A}(\Delta_i),\ i = \overline{1, n}$$

unde (ξ_i^*, η_i^*) este un punct al domeniului Δ_i. Suma integrală devine

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \cdot |J(\xi_i^*, \eta_i^*)|\ \mathcal{A}(\Delta_i)$$

Punctul (ξ_i^*, η_i^*) este dat de o teoremă de medie deci nu este arbitrar dar punctul (x_i, y_i) se ia în $\mathcal{D}_i$ arbitrar.Alegem

$$x_i = x(\xi_i^*, \eta_i^*),\ y_i = y(\xi_i^*, \eta_i^*)$$

iar suma integrală devine

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(x(\xi_i^*, \eta_i^*), y(\xi_i^*, \eta_i^*)) \cdot |J(\xi_i^*, \eta_i^*)|\ \mathcal{A}(\Delta_i)$$

care este suma integrală corespunzătoare integralei duble

$$\iint_{(\Delta)} f\left(x\left(\xi,\eta\right),y\left(\xi,\eta\right)\right)\ \left|J\left(\xi,\eta\right)\right|\ d\xi d\eta \tag{5}$$

În final vom face ca diametrele domeniilor Δ_i să tindă la zero ceea ce va implica că diametrele domeniilor D_i tinde la zero şi vom obţine egalitatea dintre (4) şi (5). ■

Exerciţiul 22 *Să se calculeze*

$$I=\iint_{(\mathcal{D})}\left(x^2+y^2\right)dxdy,$$

unde $\mathcal{D}$ este domeniul mărginit de curba $x^2+y^2=2$.

Exerciţiul 23 *Să se calculeze*

$$I=\iint_{(\mathcal{D})}\left(x^2+y^2\right)dxdy,$$

unde $\mathcal{D}$ este dat de $x^2+y^2\geq x$, $x^2+y^2\leq 2x$.

Pentru a desena domeniul trebuie mai întâi să luam curbele date de egalităţi:

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= x \Leftrightarrow (x-1/2)^2+y^2=1/4 \\ x^2+y^2 &= 2x \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=1 \end{aligned}$$

*Deci domeniul este dat de exteriorul ($\geq$) cercului $(x-1/2)^2+y^2=1/4$ de centrul $C\left(1/2,0\right)$ şi rază $1/2$, şi de interiorul ($\leq$) cercului $(x-1)^2+y^2=1$ de centrul $C\left(1,0\right)$ şi rază 1. Observăm că domeniul nu este simplu în raport cu nici o axă. Putem descompune domeniul în două domenii simple în raport cu axa Oy sau putem folosi **coordonatele polare** (date de coordonatele parametrice ale cercului)*

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta, \\ y=\rho\sin\theta,\ \rho\in[0,R]\,,\ \theta\in[0,2\pi] \end{cases}$$

$\boxed{\textit{Jacobianul în cazul trecerii la coordonate polare}}$ *este dat de:*

$$J\left(\rho,\theta\right)=\frac{D\left(x,y\right)}{D\left(\rho,\theta\right)}\overset{def}{=}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial\rho} & \dfrac{\partial x}{\partial\theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial\rho} & \dfrac{\partial y}{\partial\theta}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta\end{vmatrix}=\rho$$

Trebuie să determinăm domeniile exacte pentru noile variabile polare (ρ,θ). Folosim inegalităţiile domeniului dat $\mathcal{D}$

$$x^2+y^2\geq x\Rightarrow(\rho\cos\theta)^2+(\rho\sin\theta)^2\geq\rho\cos\theta\Leftrightarrow\rho^2\geq\rho\cos\theta\Leftrightarrow\rho\geq\cos\theta$$

respectiv

$$x^2+y^2\leq 2x\Rightarrow(\rho\cos\theta)^2+(\rho\sin\theta)^2\leq 2\rho\cos\theta\Leftrightarrow\rho^2\leq 2\rho\cos\theta\Leftrightarrow\rho\leq 2\cos\theta$$

În ceea ce priveşte unghiul θ deducem din graficul domeniului $\mathcal{D}$ că $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$. Deci

$$\Delta = \left\{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 : \theta \in [-\pi/2, \pi/2], \rho \in [\cos\theta, 2\cos\theta]\right\}$$

Integrala dublă devine

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Delta} \left((\rho\cos\theta)^2 + (\rho\sin\theta)^2\right) \, |J(\rho,\theta)| \, d\rho d\theta = \iint_{\Delta} \rho^2 \, \rho \, d\rho d\theta = \iint_{\Delta} \rho^3 \, d\rho d\theta = \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_{\cos\theta}^{2\cos\theta} \rho^3 \, d\rho\right) d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\rho^4}{4}\Big|_{\rho=\cos\theta}^{\rho=2\cos\theta} \, d\theta = \frac{15}{4}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4\theta \, d\theta = \\ &= \text{...(vezi integrale de funcţii trigonometrice)} \end{aligned}$$

Exerciţiul 24 *Calculaţi aria domeniului plan situat în primul cadran şi mărginit de curbele* $\begin{cases} xy = p, \\ xy = q \end{cases}$ *şi* $\begin{cases} y = ax, \\ y = bx \end{cases}$ *, cu $0 < p < q$, $0 < a < b$.*

Trebuie calculat aria dată de integrala

$$\mathcal{A} = \iint_{(\mathcal{D})} dxdy$$

Vom face schimbarea de variabilă

$$\begin{cases} xy = u, \\ y/x = v \end{cases}$$

deci echivalent obţinem

$$\begin{cases} x = \sqrt{u/v} = u^{1/2}v^{-1/2}, \\ y = \sqrt{uv} = u^{1/2}v^{1/2}, \ u \in [p,q], \ v \in [a,b] \end{cases}$$

Jacobianul este dat de $J = \dfrac{1}{2v}$ iar domeniul Δ este deci dreptunghiular

$$\Delta = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u \in [p,q], \ v \in [a,b]\right\} = [p,q] \times [a,b]$$

5 Aplicaţii ale integralei duble

- **Aria unui domeniu plan.** Fie $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu plan. Aria lui este dată de integrala

$$\mathcal{A} = \iint_{(\mathcal{D})} dxdy$$

- **Volumul unui cilindru cu generatoarele paralele cu axa Oz.** Integrala dublă

$$\iint_{(\mathcal{D})} f(x,y) \, dxdy,$$

unde f este o funcţie continuă şi $f(x,y) \geq 0$, $\forall (x,y) \in \mathcal{D}$, poate fi interpretată geometric ca măsura volumului unui corp cilindric V, cu generatoarele paralele cu cu axa Oz, fiind mărginit inferior de domeniul $\mathcal{D}$ situat în planul xOy, iar superior de porţiunea din suprafaţa dată explicit de $z = f(x,y)$ care corespunde domeniului $\mathcal{D}$.

- **Masa şi centrul de greutate ale unei plăci neomogene.** Folosind definiţia din mecanică a centrului de greutate al unui sistem de puncte materiale şi definiţia integralei duble obţinem următoarele formule pentru masa şi coordonatele (x_G, y_G) ale unui centru de greutate

$$m = \iint\limits_{(\mathcal{D})} \mu(x,y)\, dxdy,\ x_G = \frac{1}{m} \iint\limits_{(\mathcal{D})} x\, \mu(x,y)\, dxdy,\ y_G = \frac{1}{m} \iint\limits_{(\mathcal{D})} y\, \mu(x,y)\, dxdy,$$

unde μ este densitatea de masă.

Exerciţiul 25 *Să se calculeze aria domeniului $\mathcal{D}$ mărginit de parabola $y = x^2 - 1$ şi de dreapta $y = x + 1$*

Trebuie explicitat domeniul $\mathcal{D}$ care este simplu în raport cu Oy (în raport cu axa Ox nu este simplu): $\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 2,\ x^2 - 1 \leq y \leq x + 1\right\}$

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \iint\limits_{(\mathcal{D})} dxdy = \int_{-1}^{2} \left(\int_{x^2-1}^{x+1} dy \right) dx = \int_{-1}^{2} \left(y\Big|_{y=x^2-1}^{y=x+1} \right) dy = \int_{-1}^{2} \left(x + 1 - x^2 + 1 \right) dx \\ &= \left(2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_{x=-1}^{x=2} = \cdots\end{aligned}$$

Exerciţiul 26 *Să se găsească volumul unui corp mărginit de planul xOy şi de planele $x = 0, x = a$ şi $y = 0, y = b$ şi superior de suprafaţa $2z = \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q}$.*

Avem

$$I = \iint\limits_{(\mathcal{D})} f(x,y)\, dxdy,$$

unde $z = f(x,y)$ şi $\mathcal{D} = [0,a] \times [0,b]$ (dreptunghi). Deci

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_{(\mathcal{D})} \left(\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} \right) dxdy = \int_0^a \left(\int_0^b \left(\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} \right) dy \right) dx = \\ &= \int_0^a \left(\left(\frac{x^2}{2p} \cdot y + \frac{1}{2q} \cdot \frac{y^3}{3} \right)\Bigg|_{y=0}^{y=b} \right) dx = \int_0^a \left(\frac{bx^2}{2p} + \frac{b^3}{6q} \right) dx = \\ &= \left(\frac{b}{2p} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{b^3}{6q} \cdot x \right)\Bigg|_{x=0}^{x=a} = \frac{a^3 b}{6p} + \frac{ab^3}{6q}\end{aligned}$$